16.1

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 30$ ja yksittäisessä toistossa ykkösen todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

Lasketaan todennäköisyys saada täsmälleen 9 ykköstä.

$$P(9 \text{ ykköstä}) = \binom{30}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \left(\frac{5}{6}\right)^{30-9} \approx 0{,}0309 \qquad P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = 30,\ r = 9,\ p = 1/6$$

b) Ykkösten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(30; 1/6). Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

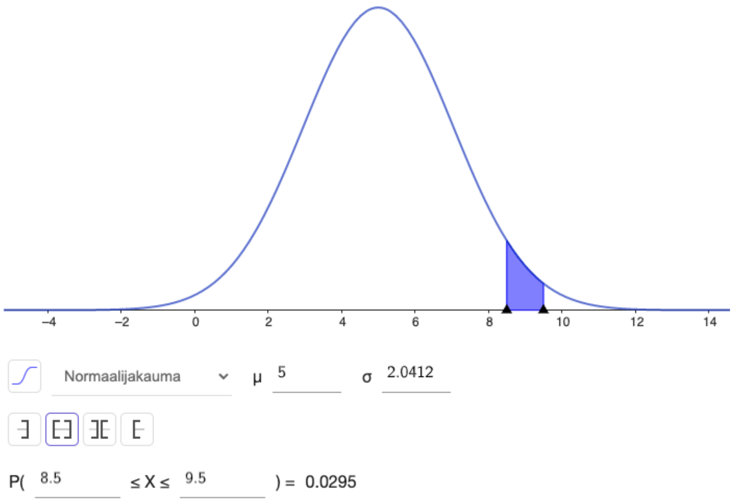
Lasketaan 30 heitolla saatavien ykkösten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 2{,}0412 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Ykkösten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(5; 2,04121).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 9 ykköstä eli $P(8{,}5 \leq X < 9{,}5)$.



$$P(8{,}5 \leq X < 9{,}5) \approx 0{,}0295$$

Vastaus

a) 0,0309

b) 0,0295

16.2

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 100$ ja yksittäisessä toistossa klaavan todennäköisyys $p = 0{,}5$.

Lasketaan todennäköisyys saada täsmälleen 50 klaavaa.

$$P(50\ \text{klaavaa}) = \binom{100}{50} \cdot 0{,}5^{50}(1-0{,}5)^{100-50} \qquad P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$\approx 0{,}0796$$

$$n = 30,\ r = 9,\ p = 1/6$$

b) Klaavojen lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(100; 0,5). Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

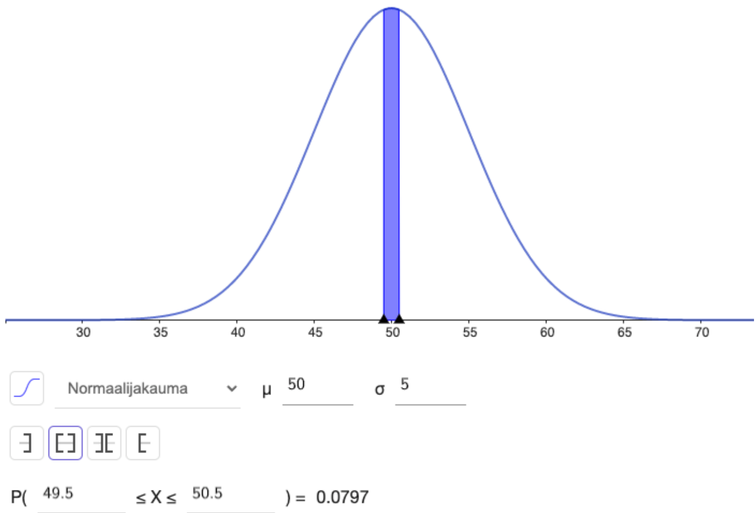
Lasketaan 100 heitolla saatavien klaavojen lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 100 \cdot 0{,}5 = 50 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot (1-0{,}5)} = 5 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Klaavojen lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(5; 2,04121).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 50 klaavaa eli $P(49{,}5 \leq X < 50{,}5)$.



$P(49{,}5 \leq X < 50{,}5) \approx 0{,}0797$

Vastaus
a) 0,0796
b) 0,0797

16.3

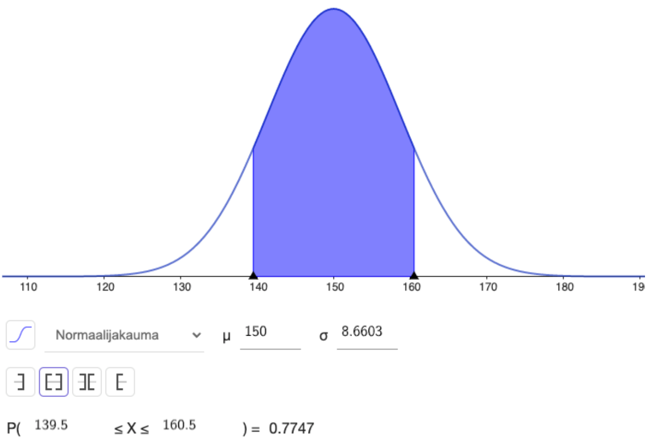
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 300$ ja yksittäisessä toistossa kruunan todennäköisyys $p = 0,5$.

Kruunien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(300; 0,5). Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Lasketaan 300 heitolla saatavien kruunien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 300 \cdot 0,5 = 150 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{300 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5)} \approx 8,6603 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Kruunien lukumäärä X noudattaa siis likimain normaalijakaumaa N(150; 8,6603).
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 140–160 kruunaa eli $P(139,5 \leq X < 160,5)$.



$P(139,5 \leq X < 160,5) \approx 0,775$

Kun kolikkoa heitetään 300 kertaa, saadaan 140–160 kruunaa todennäköisyydellä 0,775.

Vastaus 0,775

16.4

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 2000$ ja yksittäisessä toistossa kuutosen todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

Kuutosten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(2000; 1/6).
Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

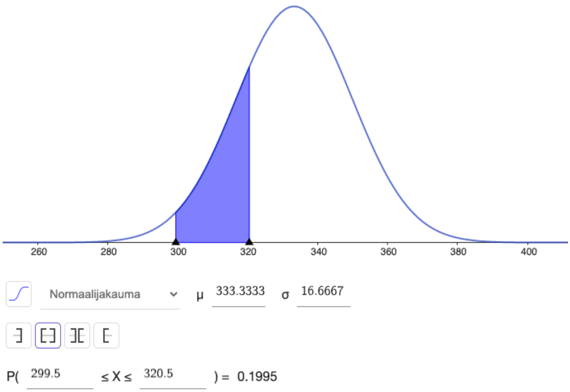
Lasketaan 2000 heitolla saatavien kuutosten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 2000 \cdot \frac{1}{6} \approx 333{,}3333 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{2000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 16{,}6667 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

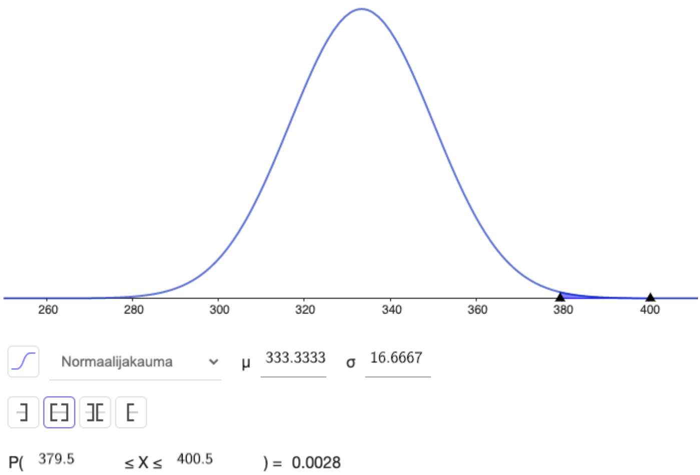
Kuutosten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(333,3333; 16,6667).

a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 300–320 kuutosta eli $P(299{,}5 \leq X < 320{,}5)$.



$P(299{,}5 \leq X < 320{,}5) \approx 0{,}1995$

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 380–400 kuutosta eli $P(379{,}5 \leq X < 400{,}5)$.



$P(279{,}5 \leq X < 400{,}5) \approx 0{,}0028$

Vastaus

a) 0,1995 **b)** 0,0028

16.5

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 1000$ ja yksittäisessä toistossa klaavan todennäköisyys $p = 0{,}5$.

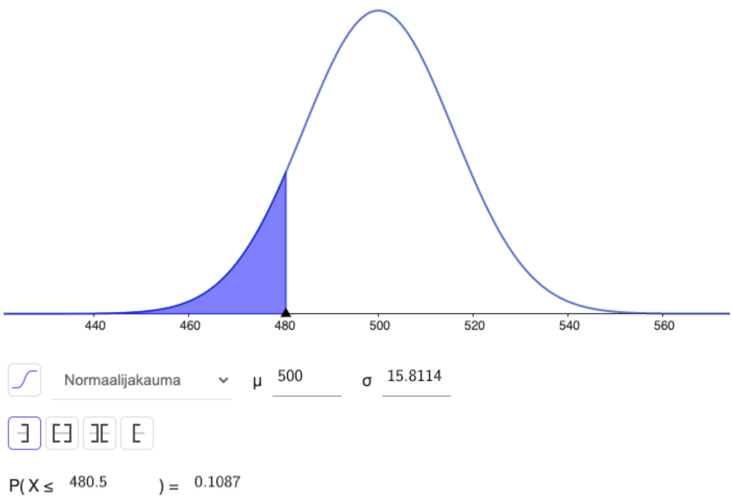
Klaavojen lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(1000; 0,5). Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Lasketaan 1000 heitolla saatavien klaavojen lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$\mu = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$ $\quad\quad \mu = np$

$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5)} \approx 15{,}8114$ $\quad\quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Klaavojen lukumäärä X noudattaa siis likimain normaalijakaumaa N(500; 15,8114).

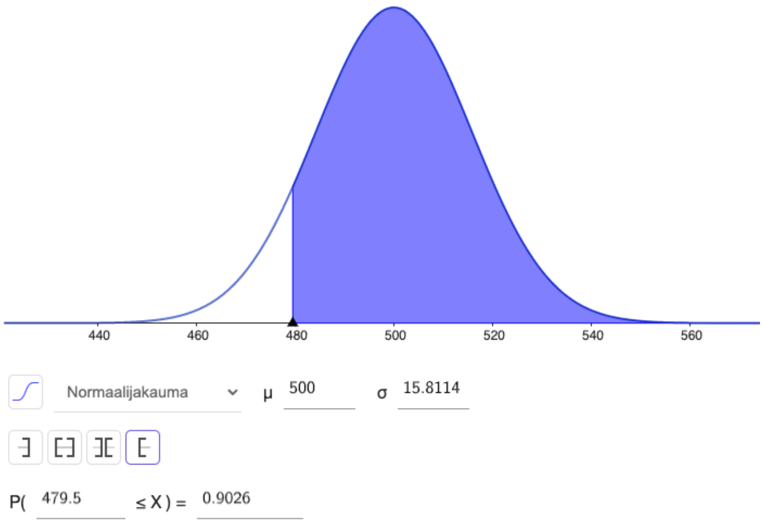
a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada korkeintaan 480 klaavaa eli $P(X \leq 480{,}5)$.



$P(X \leq 480{,}5) \approx 0{,}109$.

Kun kolikkoa heitetään 1000 kertaa, saadaan korkeintaan 480 klaavaa todennäköisyydellä 0,109.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada vähintään 480 klaavaa eli $P(X \geq 479{,}5)$.



$P(X \geq 479{,}5) \approx 0{,}903$.

Kun kolikkoa heitetään 1000 kertaa, saadaan vähintään 480 klaavaa todennäköisyydellä 0,903.

Vastaus

a) 0,109

b) 0,903

16.6

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 132$ ja yksittäisessä toistossa oikean arvauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$.

Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(132; 1/3).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

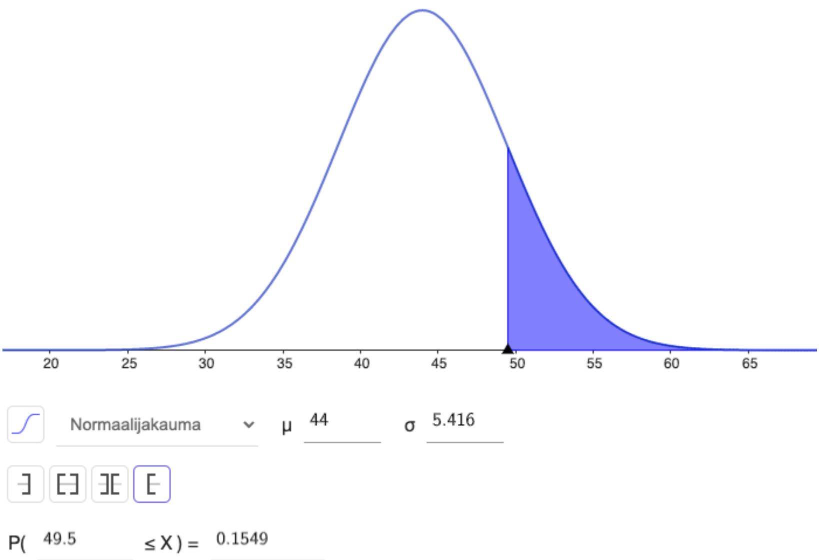
Lasketaan 132 arvauksella saatavien oikeiden arvausten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 132 \cdot \frac{1}{3} = 44 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{132 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 5{,}4160 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(44; 5,4160).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada vähintään 50 arvausta oikein eli $P(X \geq 49{,}5)$.



$P(X \geq 49{,}5) \approx 0{,}155$.

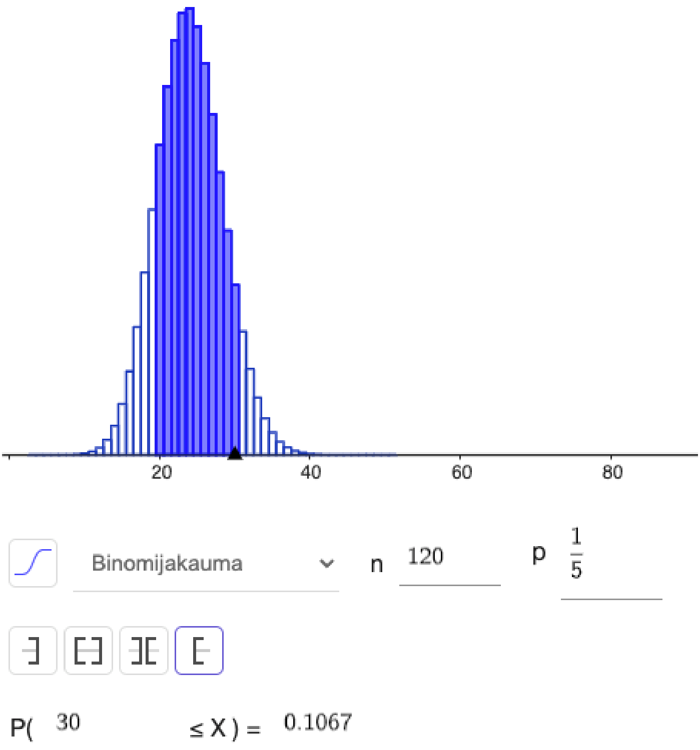
Mika saa vähintään 50 arvausta oikein todennäköisyydellä 0,155.

Vastaus
0,155

16.7

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 120$ ja yksittäisessä toistossa oikean arvauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{5}$.

Lasketaan GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada ainakin 30 arvausta oikein.



$P(\text{ainakin 30 oikein}) \approx 0{,}0107$

b) Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(120; 1/5).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

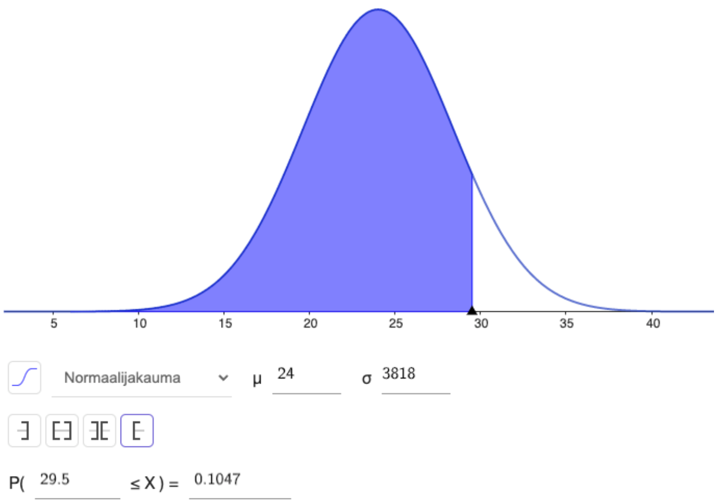
Lasketaan 120 arvauksella saatavien oikeiden vastausten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 120 \cdot \frac{1}{5} = 24 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} \approx 4,3818 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(24; 4,3818).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada vähintään 30 arvausta oikein eli $P(X \geq 29,5)$.



$$P(X \geq 29,5) \approx 0,105$$

Vastaus **a)** 0,107 **b)** 0,105

16.8

Taulukoidaan kahden nopan silmälukujen summat 6×6-taulukkoon.

2. noppa						
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

1. noppa

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 100$ ja yksittäisessä toistossa silmälukujen summa on yli 8 todennäköisyydellä $p = \frac{10}{36}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”niiden heittojen lukumäärä, joissa silmälukujen summa on yli 8”.

X noudattaa binomijakaumaa Bin(100; 10/36).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

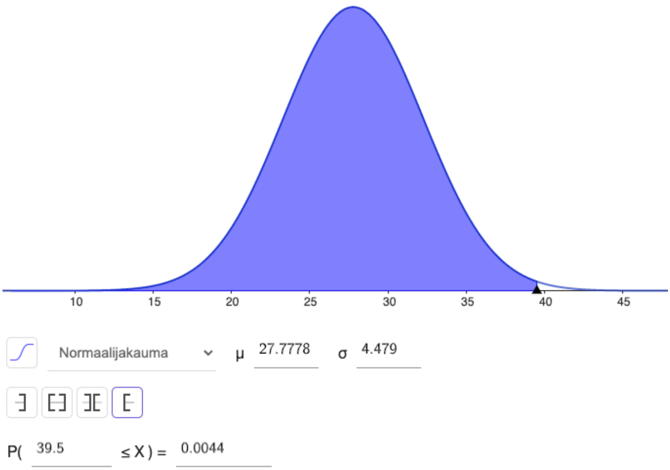
Lasketaan binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 100 \cdot \frac{10}{36} \approx 27{,}7778 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{10}{36} \cdot \frac{36-10}{36}} \approx 4{,}4790 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(27,7778; 4,4790).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada ainakin 40 kertaa silmälukujen summaksi yli 8 eli $P(X \geq 39{,}5)$.



$$P(X \geq 39{,}5) \approx 0{,}0044$$

Vastaus
0,0044

16.9

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 379$ ja yksittäisessä toistossa henkilö saapuu lennolle todennäköisyydellä $p = 95\ \% = 0{,}95$.

Lennolle saapuvien matkustajien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(379; 0,95).

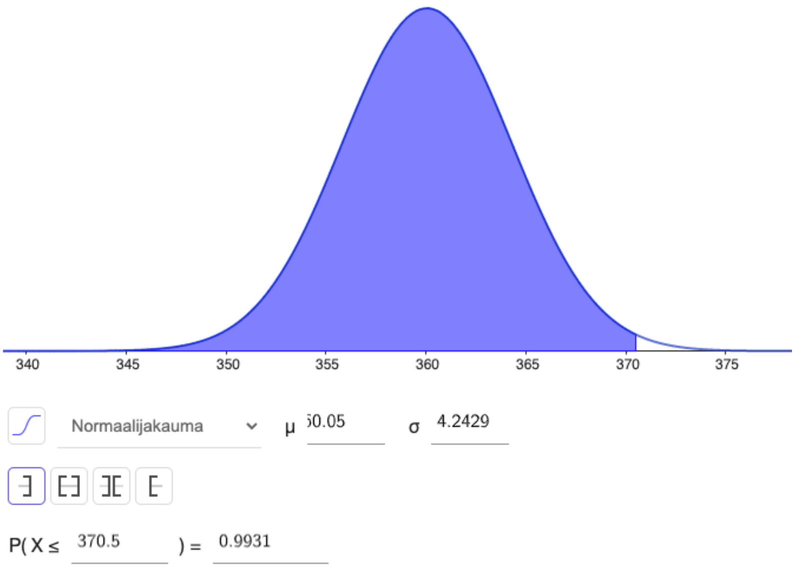
Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

Lasketaan 379 toistolla saapuvien matkustajien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 379 \cdot 0{,}95 = 360{,}05 \qquad \mu = np$$
$$\sigma = \sqrt{379 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} \approx 4{,}2429 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Saapuvien matkustajien lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(360,05; 4,2429).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että korkeintaan 370 matkustajaa saapuu lennolle.
On määritettävä $P(X < 370,5)$.



$P(X < 370,5) \approx 0,99$.

Lennolle saapuu korkeintaan 370 matkustajaa todennäköisyydellä 0,99.

Vastaus
0,99

16.10

Kyseessä on toistokoe, jossa on n toistoa. Todennäköisyys saada ässä yksittäisellä toistolla on $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Lasketaan n toistolla saatavien ässien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

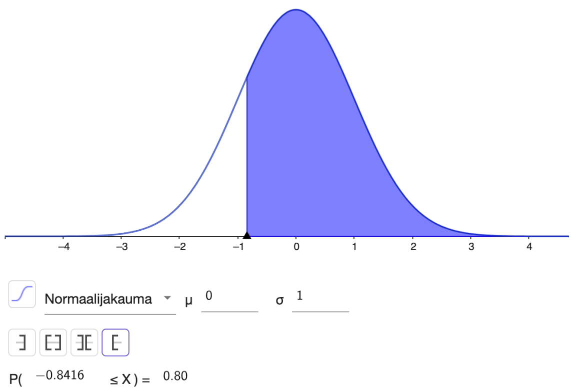
$$\mu = np = n \cdot \frac{1}{13} = \frac{n}{13}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot \frac{1}{13} \cdot (1 - \frac{1}{13})} = \frac{2\sqrt{3n}}{13}$$

Kun n on suuri, ässien lukumäärä n toistolla noudattaa likimain normaalijakaumaa $N(\frac{n}{13}, \frac{2\sqrt{3n}}{13})$.

On selvitettävä n, jotta $P(\text{tulee vähintään } 4{,}5 \text{ ässää}) \geq 0{,}80$.

Selvitetään normitetun normaalijakauman $N(0,\ 1)$ avulla ensin todennäköisyyttä $0{,}80$ vastaava normitettu arvo z.



Saadaan $z \approx -0{,}8416$.

Koska tavoitteena on selvittää n, jolla
$P(\text{tulee vähintään } 4{,}5 \text{ ässää}) \geq 0{,}80$, on oltava $z \leq -0{,}8416$.

Ratkaistaan tästä normitusyhtälön avulla n.

$$z \leq -0{,}8410 \qquad \Big| \text{ Normitusyhtälö } z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \leq -0{,}8410$$

$$\frac{4{,}5 - \dfrac{n}{13}}{\dfrac{2\sqrt{3n}}{13}} \leq -0{,}8416$$

$$n \geq 85{,}45$$

$$n \geq 86$$

Nosto on toistettava vähintään 86 kertaa.

Vastaus
vähintään 86 kertaa

16.11

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 40$ ja yksittäisessä toistossa ykkösen todennäköisyys $p = \dfrac{1}{4}$.

Lasketaan todennäköisyys saada täsmälleen 10 ykköstä.

$$P(10 \text{ ykköstä}) = \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{40-10} \approx 0{,}144 \qquad P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$n = 40,\ r = 10,\ p = 1/4$$

b) Ykkösten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(40; 1/4).
Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

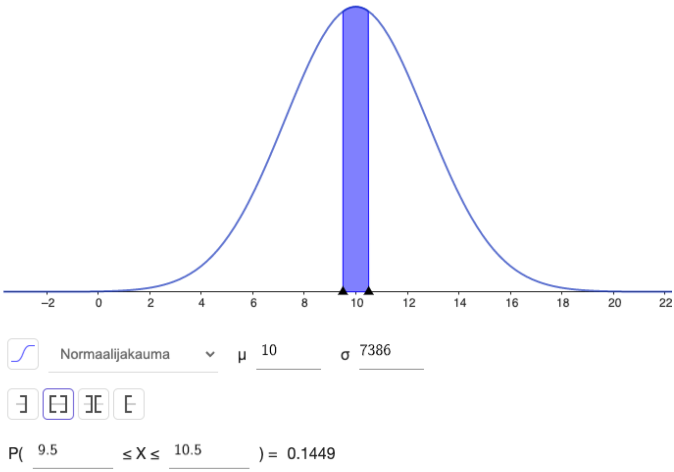
Lasketaan 40 heitolla saatavien ykkösten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{40 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 2{,}7386 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Ykkösten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(10; 2,7386).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 10 ykköstä eli $P(9{,}5 \le X < 10{,}5)$.



$P(9{,}5 \le X < 10{,}5) \approx 0{,}145$

Vastaus
a) 0,144
b) 0,145

16.12

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 500$ ja yksittäisessä toistossa klaavan todennäköisyys $p = 0,5$.

Klaavojen lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(500; 0,5).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

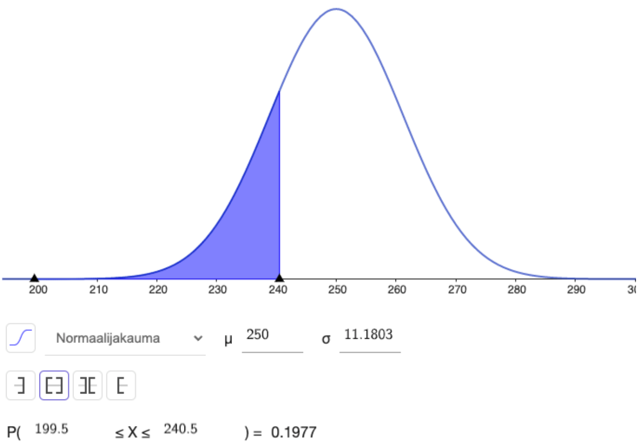
Lasketaan 500 heitolla saatavien klaavojen lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$\mu = 500 \cdot 0,5 = 250$ $\quad\quad \mu = np$

$\sigma = \sqrt{500 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5)} = 11,1803$ $\quad\quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

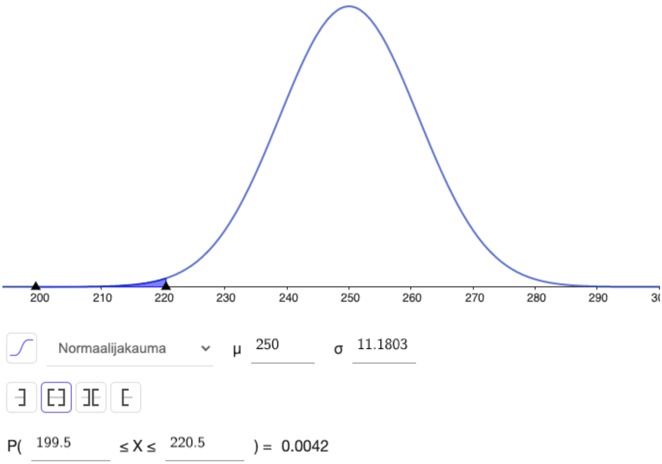
Klaavojen lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(250; 11,1803).

a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 200–240 klaavaa eli $P(199,5 \le X < 240,5)$.



$P(199,5 \le X < 240,5) \approx 0,1977$

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 200–220 klaavaa eli $P(199{,}5 \leq X < 220{,}5)$.



$$P(199{,}5 \leq X < 240{,}5) \approx 0{,}1977$$

Vastaus

a) 0,1977

b) 0,0042

16.13

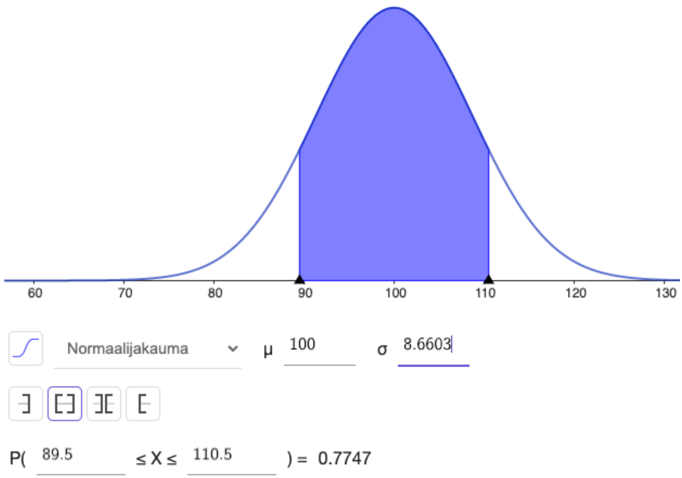
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 400$ ja yksittäisessä toistossa kahden kruunan todennäköisyys $p = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Kruunaparien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(400; 0,25).
Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.
Lasketaan 400 toistolla saatavien kruunaparien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$\mu = 400 \cdot 0,25 = 100$ $\quad \mu = np$

$\sigma = \sqrt{400 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)} \approx 8,6603$ $\quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Klaavojen lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(100; 8,6603).
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 90–110 klaavaa eli $P(89,5 \leq X < 110,5)$.



$P(89,5 \leq X < 110,5) \approx 0,775$

Vastaus 0,775

16.14

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 60$ ja yksittäisessä toistossa oikean arvauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$.

Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(60; 1/3).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

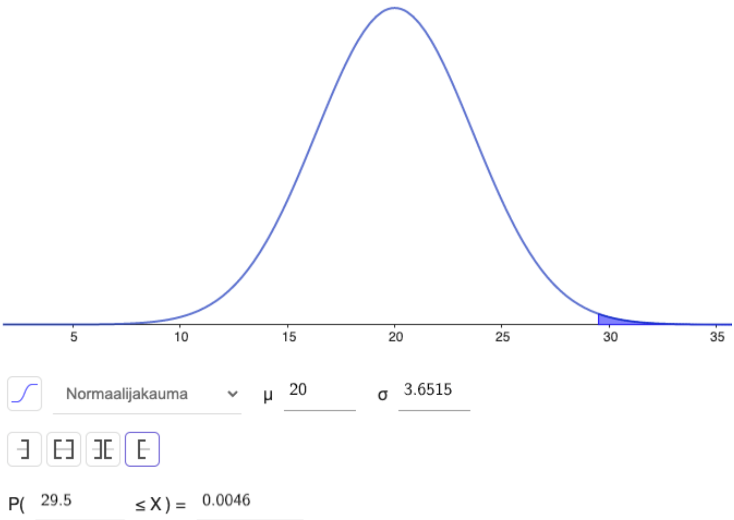
Lasketaan 60 arvauksella saatavien oikeiden arvausten lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{60 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 3{,}6515 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Oikeiden arvausten lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(20; 3,6515).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada vähintään puolet eli 30 arvausta oikein eli $P(X \geq 29{,}5)$.



$P(X \geq 29{,}5) \approx 0{,}0046$.

Arvaamalla vastaava opiskelija läpäisee kokeen todennäköisyydellä 0,0046.

Vastaus
0,0046

16.15

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 1900$ ja yksittäisessä toistossa henkilö kannattaa ehdokasta todennäköisyydellä $p = 49\ \% = 0,49$.

Kannattajien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(1900; 0,49).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

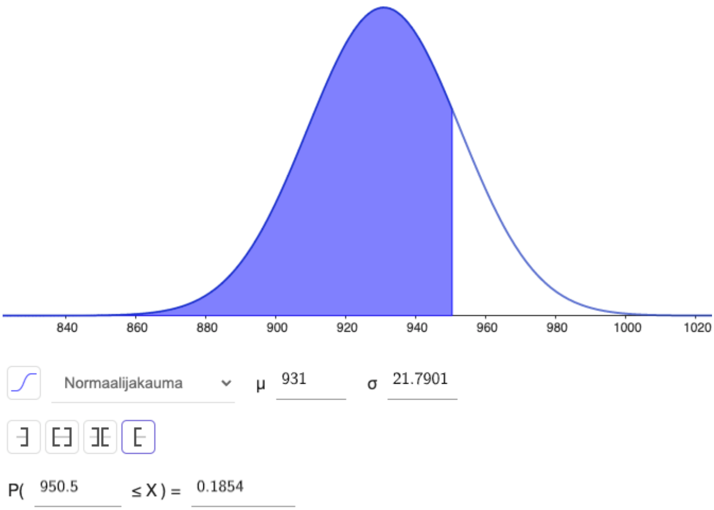
Lasketaan 1900 toistolla saatavien kannattajien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 1900 \cdot 0,49 = 931 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{1900 \cdot 0,49 \cdot (1 - 0,49)} \approx 21,7901 \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Kannattajien lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(931; 21,7901).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että yli puolet eli yli $\dfrac{1900}{2} = 950$ henkilöä kannattaa ehdokasta.
On siis määritettävä $P(X \geq 950{,}5)$.



$P(X \geq 950{,}5) \approx 0{,}185$.

Enemmistö kannattaa ehdokasta todennäköisyydellä $0{,}185$.

Vastaus
0,185

16.16

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 2000$ ja yksittäisessä toistossa valittu henkilö kävi äänestämässä todennäköisyydellä $p = 72{,}1\ \% = 0{,}721$.

Äänestäneiden lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(2000; 0,721).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

Lasketaan 2000 toistolla saatavien äänestäneiden lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

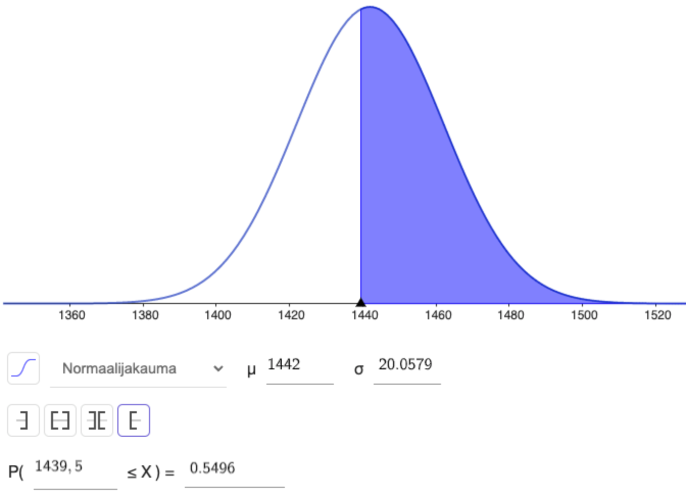
$$\mu = 2000 \cdot 0{,}721 = 1442 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{2000 \cdot 0{,}721 \cdot (1 - 0{,}721)} \approx 20{,}0579 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Äänestäneiden lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(1442; 20,0579).

a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että vähintään 72 % otoksen äänioikeutetuista kävi äänestämässä.

Koska $0,72 \cdot 2000 = 1440$, on määritettävä $P(X \geq 1439,5)$.



$P(X \geq 1439,5) \approx 0,550 = 55,0\ \%$.

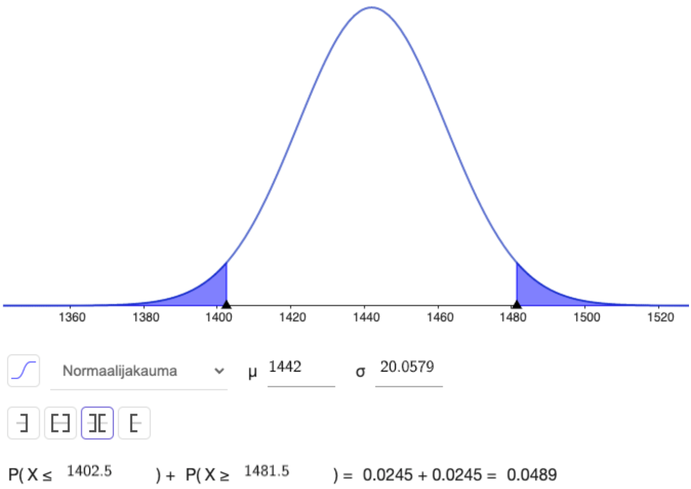
Vähintään 72 % otoksen äänioikeutetuista kävi äänestämässä todennäköisyydellä 55,0 %.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että valitun otoksen äänestysaktiivisuus poikkeaa todellisesta 72,1 %:n äänestysaktiivisuudesta vähintään 2,0 prosenttiyksikköä.
Otoksen äänestysaktiivisuuden on tällöin oltava

korkeintaan 72,1 % – 2,0 % = 70,1 % = 0,701
tai
vähintään 72,1 % + 2,0 % = 74,1 % = 0,741.

Vastaavat rajat ovat $0,701 \cdot 2000 = 1402$ ja $0,741 \cdot 2000 = 1482$.

On määritettävä $P(X < 1402,5 \text{ tai } X \geq 1481,5)$.



$P(X < 1402,5 \text{ tai } X \geq 1481,5) \approx 0,049 = 4,9\ \%$.

Otoksen äänestysaktiivisuus poikkesi vähintään 2,0 prosenttiyksikköä todellisesta äänestysaktiivisuudesta todennäköisyydellä 4,9 %.

Vastaus
a) 55,0 % **b)** 4,9 %

16.17

Taulukoidaan kahden nopan silmälukujen erot 6×6-taulukkoon.

2. noppa

6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

1. noppa

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 200$ ja yksittäisessä toistossa silmälukujen ero on vähintään 4 todennäköisyydellä $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”niiden heittojen lukumäärä, joissa silmälukujen ero on vähintään 4”.

X noudattaa binomijakaumaa Bin(200; 1/6).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

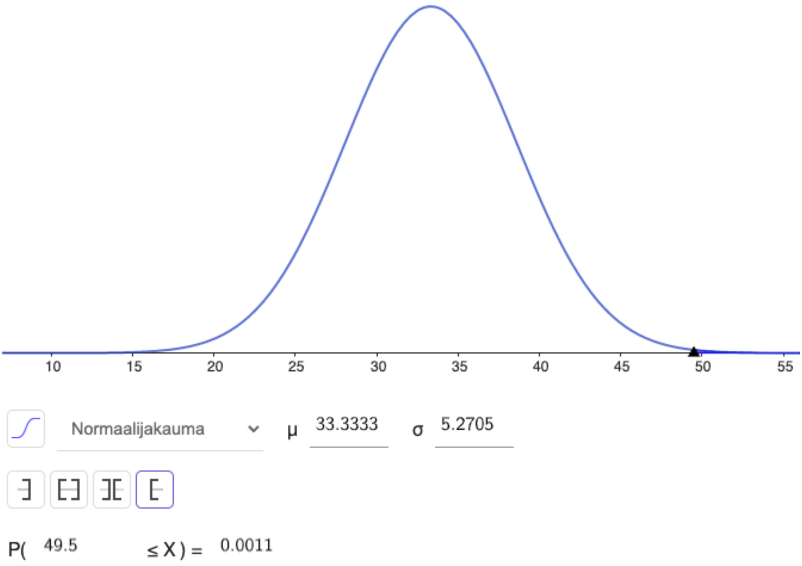
Lasketaan binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 200 \cdot \frac{1}{6} \approx 33,3333 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})} \approx 5,2705 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(33,3333; 5,2705).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada ainakin 50 kertaa silmälukujen eroksi vähintään 4 eli $P(X \geq 49{,}5)$.



$P(X \geq 49{,}5) \approx 0{,}0011$

b) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 200$ ja yksittäisessä toistossa silmälukujen ero on tasan 1 todennäköisyydellä $p = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Olkoon satunnaismuuttuja Y: ”niiden heittojen lukumäärä, joissa silmälukujen ero on tasan 1”.

Y noudattaa binomijakaumaa Bin(200; 5/18).

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

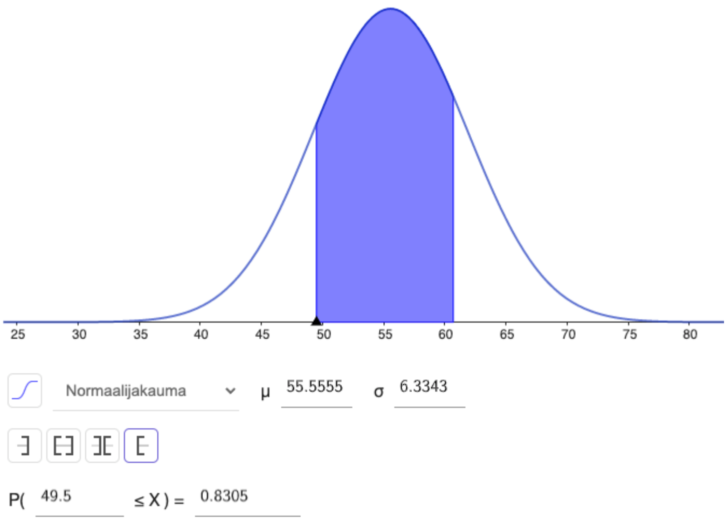
Lasketaan binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 200 \cdot \frac{5}{18} \approx 55{,}5555 \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{5}{18} \cdot (1 - \frac{5}{18})} \approx 6{,}3343 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Satunnaismuuttuja Y noudattaa likimain normaalijakaumaa N(55,5555; 6,3343).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada ainakin 50 kertaa silmälukujen eroksi tasan 1 eli $P(Y \geq 49{,}5)$.



$$P(Y \geq 49{,}5) \approx 0{,}8305$$

Vastaus
a) 0,0011
b) 0,8305

16.18

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 402$ ja yksittäisessä toistossa henkilö saapuu lennolle todennäköisyydellä $p = 95\ \% = 0{,}95$.

Lennolle saapuvien matkustajien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa Bin(402; 0,95).

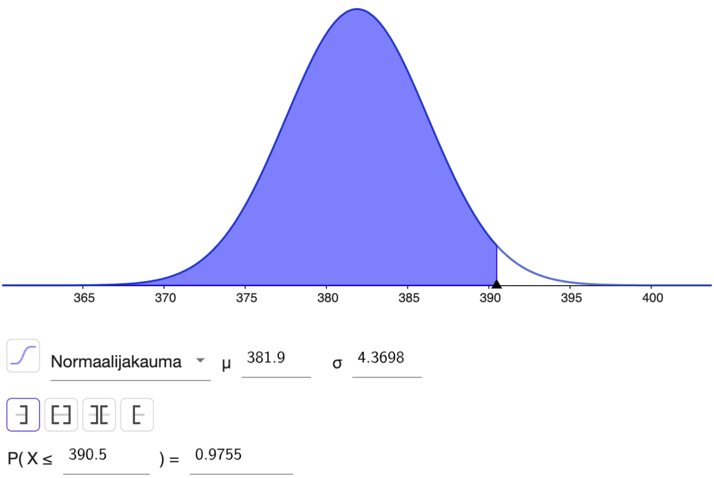
Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

Lasketaan 402 toistolla saapuvien matkustajien lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.

$$\mu = 402 \cdot 0{,}95 = 381{,}9 \qquad \mu = np$$
$$\sigma = \sqrt{402 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} \approx 4{,}3698 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Saapuvien matkustajien lukumäärä X noudattaa likimain normaalijakaumaa N(381,9; 4,3698).

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että korkeintaan 390 matkustajaa saapuu lennolle.
On määritettävä $P(X < 390{,}5)$.



$$P(X < 390{,}5) \approx 0{,}98\,.$$

Lennolle saapuu korkeintaan 390 matkustajaa todennäköisyydellä 0,98.

Vastaus
0,98

16.19

Taulukoidaan kahden nopan silmälukujen summat 6×6-taulukkoon.

2. noppa

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

1. noppa

a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä on n ja yksittäisessä toistossa silmälukujen summa on tasan 7 todennäköisyydellä $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X: ”niiden heittojen lukumäärä, joissa silmälukujen summa on tasan 7”.

X noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}\,(n, \frac{1}{6})$.

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

Lasketaan binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta.

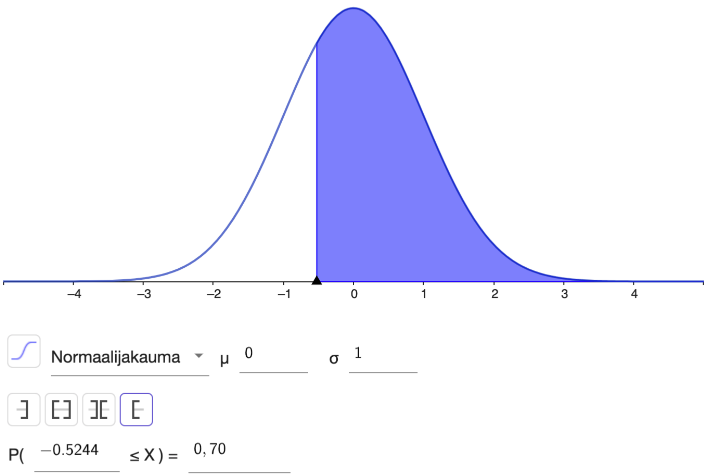
$$\mu = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6} \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{5n}{36}} = \frac{\sqrt{5n}}{6} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain normaalijakaumaa $\mathrm{N}\left(\frac{n}{6}, \frac{\sqrt{5n}}{6}\right)$.

On ratkaistava toistojen lukumäärä n niin, että $P(X \geq 50) > 0,70$.

Määritetään normitetun normaalijakauman avulla normitettu satunnaismuuttujan arvo z niin, että $P(Z \geq z) > 0,70$.



Saadaan $z \approx -0,5244$.

Koska tavoitteena on selvittää n, jolla $P(X \geq 50) > 0,70$, on oltava $z \leq -0,5244$.

Ratkaistaan tästä normitusyhtälön avulla n.

$$z \leq -0{,}5244 \qquad \Big|\ \text{Normitusyhtälö } z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \leq -0{,}5244$$

$$\frac{49{,}5 - \frac{n}{6}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}} \leq -0{,}5244$$

$$n \geq 317{,}9... \qquad \Big|\ n \in \mathbf{N}$$

$$n \geq 318$$

Noppaa on heitettävä vähintään 318 kertaa.

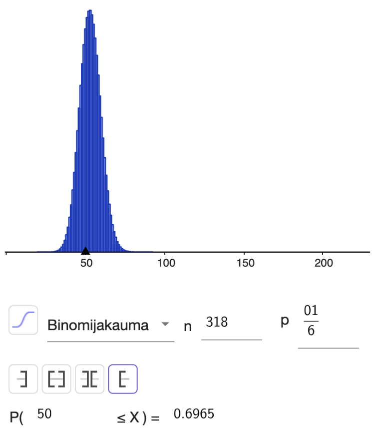
b) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä on n ja yksittäisessä toistossa silmälukujen summa on tasan 7 todennäköisyydellä $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

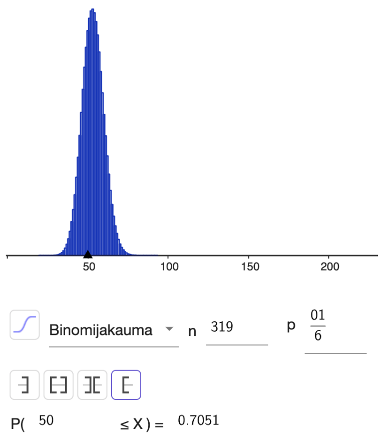
Olkoon satunnaismuuttuja X: ”niiden heittojen lukumäärä, joissa silmälukujen summa on tasan 7”.

X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}\,(n, \frac{1}{6})$.

On ratkaistava toistojen lukumäärä n niin, että $P(X \geq 50) > 0,70$.

Ratkaistaan n GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kokeilemalla binomijakaumaan eri n:n arvoja.





Osoittautuu, että n:n arvoksi on valittava vähintään 319, jotta todennäköisyys $0,70$ ylittyy.
Noppaa on siis heitettävä vähintään 319 kertaa.

Vastaus
a) vähintään 318 kertaa
b) vähintään 319 kertaa

16.20

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä on n ja yksittäisessä toistossa saadaan kuutonen todennäköisyydellä $p = \frac{1}{6}$.

a) Olkoon satunnaismuuttuja X: ”kuutosten lukumäärä n heitolla”.

X noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}\,(n, \frac{1}{6})$.

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla.

Lasketaan binomijakauman odotusarvo ja keskihajonta.

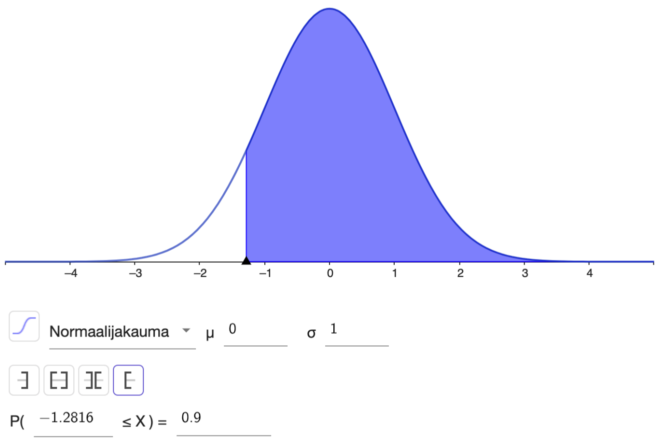
$$\mu = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{6} \qquad \mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{5n}{36}} = \frac{\sqrt{5n}}{6} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain normaalijakaumaa $\text{N}\,(\frac{n}{6}, \frac{\sqrt{5n}}{6})$.

On ratkaistava toistojen lukumäärä n niin, että $P(X \geq 10) \geq 0{,}90$.

Määritetään normitetun normaalijakauman avulla normitettu satunnaismuuttujan arvo z niin, että $P(Z \geq z) \geq 0{,}90$.



Saadaan $z \approx -1{,}2816$.

Koska tavoitteena on selvittää n, jolla
$P(X \geq 10) \geq 0{,}90$, on oltava $z \leq -1{,}2816$.

Ratkaistaan tästä normitusyhtälön avulla n.

$$z \leq -1{,}2816 \qquad \Big| \text{ Normitusyhtälö } z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} \leq -1{,}2816$$

$$\frac{9{,}5 - \dfrac{n}{6}}{\dfrac{\sqrt{5n}}{6}} \leq -1{,}2816$$

$$n \geq 83{,}12\ldots \qquad \Big| \; n \in \mathbf{N}$$

$$n \geq 84$$

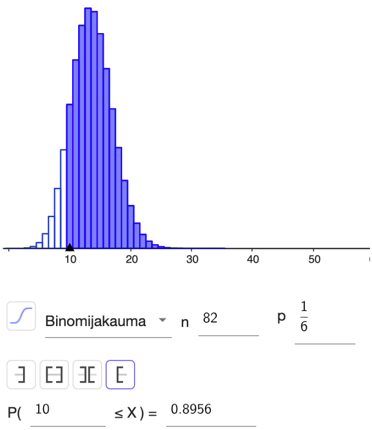
Noppaa on heitettävä vähintään 84 kertaa.

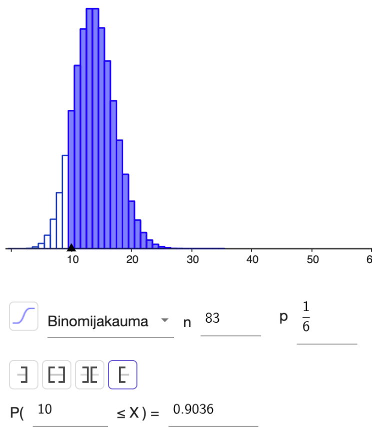
b) Olkoon satunnaismuuttuja X: ”kuutosten lukumäärä n heitolla”.

X noudattaa binomijakaumaa $\mathrm{Bin}\,(n, \frac{1}{6})$.

On ratkaistava toistojen lukumäärä n niin, että $P(X \geq 10) > 0{,}90$.

Ratkaistaan n GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kokeilemalla binomijakaumaan eri n:n arvoja.





Osoittautuu, että n:n arvoksi on valittava vähintään 83, jotta todennäköisyys 0,90 ylittyy.

Noppaa on siis heitettävä vähintään 83 kertaa.

Vastaus
a) vähintään 84 kertaa
b) vähintään 83 kertaa