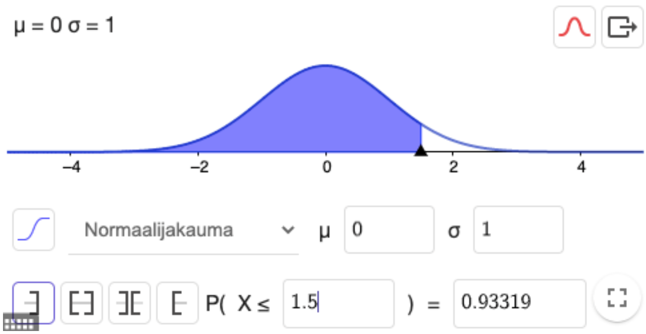
15.1

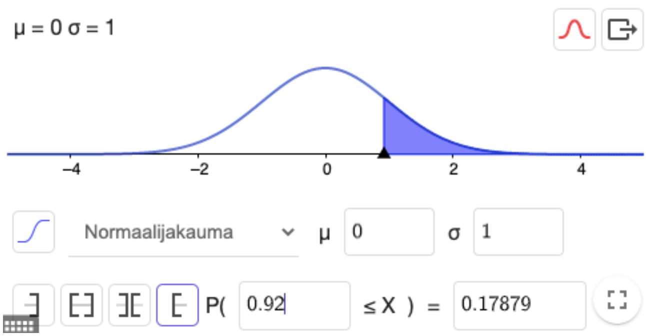
a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.
Siis $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Määritetään todennäköisyys GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



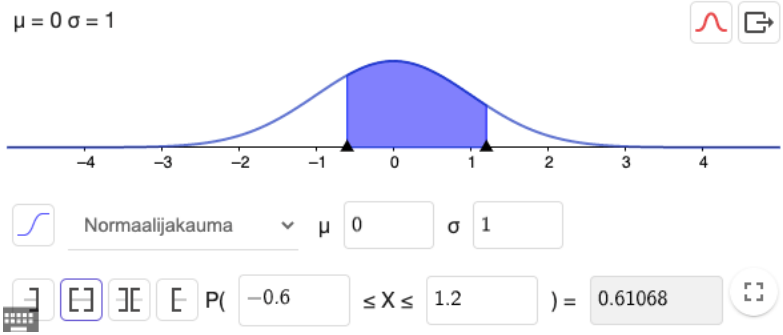
Saadaan $P(Z \leq 1{,}5) \approx 0{,}93$.

b)



Saadaan $P(Z \geq 0{,}92) \approx 0{,}18$.

c)



Saadaan $P(-0{,}6 \leq Z \leq 1{,}2) \approx 0{,}61$.

Vastaus

a) 0,93

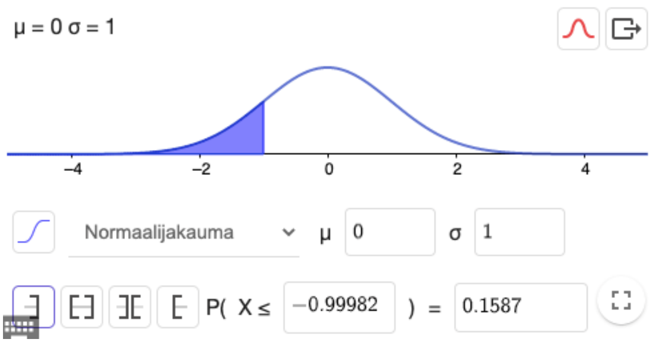
b) 0,18

c) 0,61

15.2

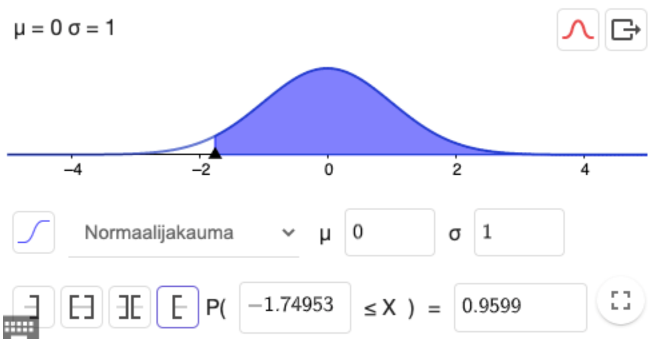
a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.
Siis $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Määritetään arvo a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$P(Z \leq a) = 0{,}1587$, kun $a \approx -1{,}00$.

b)

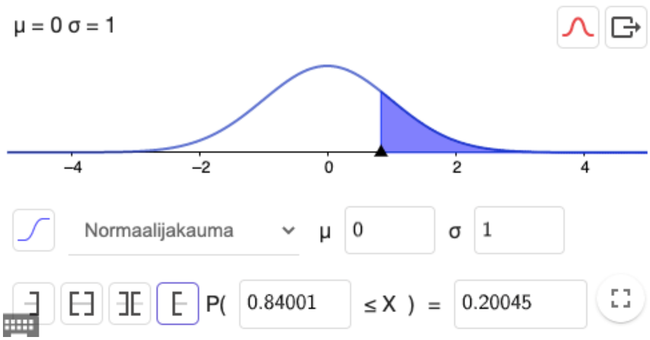


$P(Z \geq a) = 0{,}9599$, kun $a \approx -1{,}75$.

c) Väritetty alue sijaitsee symmetrisesti odotusarvon 0 molemmin puolin. Väritetyn alueen yläpuolinen osuus jakaumasta on

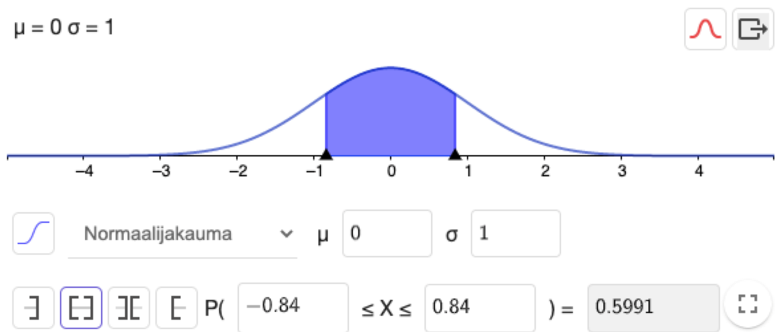
$$\frac{1-0{,}5991}{2}=0{,}20045\,.$$

Määritetään sellainen arvo a, että $P(Z\geq a)=0{,}20045$.



$P(Z\geq a)=0{,}20045$, kun $a\approx 0{,}84$.

Tarkistetaan, toteutuuko annettu ehto.



Vastaus

a) –1,00

b) –1,75

c) 0,84

15.3

a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 65 ja keskihajonta 10.
Siis $\mu = 65$ ja $\sigma = 10$.

Lasketaan arvoa $x = 80$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{80-65}{10} = 1{,}5$$

Arvo $x = 80$ poikkeaa odotusarvosta 1,5 keskihajonnan verran ylöspäin.

b) Lasketaan arvoa $x = 45$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{45-65}{10} = -2$$

Arvo $x = 45$ poikkeaa odotusarvosta 2 keskihajonnan verran alaspäin.

Vastaus
a) normitettu arvo 1,5; poikkeaa 1,5 keskihajonnan verran ylöspäin
b) normitettu arvo –2, poikkeaa 2 keskihajonnan verran alaspäin

15.4

a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 45 ja keskihajonta 6.
Siis $\mu = 45$ ja $\sigma = 6$.

Lasketaan arvoa $x = 45$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{45-45}{6} = 0$$

Oikea vaihtoehto on 3.

b) Lasketaan arvoa $x = 54$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{54-45}{6} = 1{,}5$$

Oikea vaihtoehto on 5.

c) Lasketaan arvoa $x = 33$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{33-45}{6} = -2$$

Oikea vaihtoehto on 1.

d) Lasketaan arvoa $x = 41$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{41-45}{6} = -\frac{2}{3} \approx -0{,}67$$

Oikea vaihtoehto on 2.

Vastaus
a) 3
b) 5
c) 1
d) 2

15.5

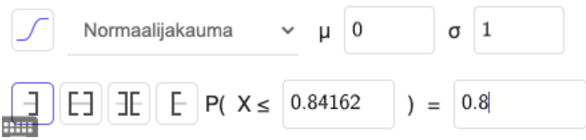
Tehtävänä on määrittää satunnaismuuttujan X keskihajonta σ, kun odotusarvo $\mu = 28$.

Olkoon arvoa $x = 36$ vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X \leq 36) = P(Z \leq z) = 0{,}80$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$\boldsymbol{P(Z \leq z) = 0{,}80}$, kun $z \approx 0{,}84162$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad z \approx 0{,}84162,\ x = 36,\ \mu = 28$$

$$0{,}84162 = \frac{36 - 28}{\sigma} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 9{,}5$$

Vastaus
9,5

15.6

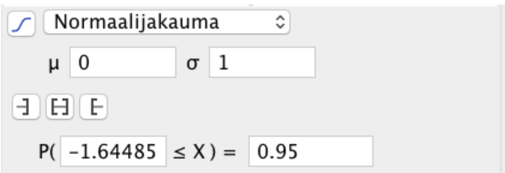
Tehtävänä on määrittää myslipussin massan X odotusarvo μ, kun keskihajonta $\sigma = 12$ (g).

Olkoon arvoa $x = 400$ (g) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X \geq 400) = P(Z \geq z) = 0{,}95$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z \geq z) = 0{,}95$, kun $z \approx -1{,}64485$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx -1{,}64485,\ x = 400,\ \sigma = 12$$

$$-1{,}64485 = \frac{400-\mu}{12} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 420$$

Keskimääräiseksi massaksi on säädettävä 420 g.

Vastaus
420 g

15.7

Tehtävänä on määrittää vuorokauden keskilämpötilan X keskihajonta σ, kun odotusarvo $\mu = 4{,}0$ (°C).

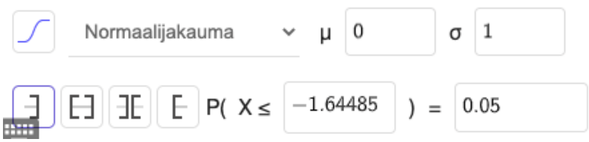
90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on välillä 2 °C–6 °C,
joten 5 % lämpötiloista on alle 2 °C ja 5 % lämpötiloista on yli 6 °C.

Olkoon arvoa $x = 2$ (°C) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X < 2) = P(Z < z) = 0{,}05$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z < z) = 0{,}05$, kun $z \approx -1{,}64485$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx -1{,}64485,\ x = 2,\ \mu = 4{,}0$$

$$-1{,}64485 = \frac{2-4{,}0}{\sigma} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 1{,}2$$

Keskihajonta on 1,2 °C.

Vastaus
1,2 °C

15.8

Tehtävänä on määrittää 7-vuotiaiden poikien pituuden X odotusarvo μ ja keskihajonta σ.

Puolet pojista ovat alle 125 cm pitkiä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella pituuden odotusarvo $\mu = 125$ (cm).

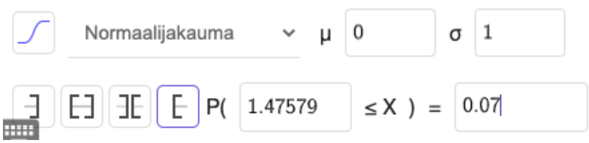
Pisimmät 7 % pojista ovat yli 132 cm pitkiä.

Olkoon arvoa $x = 132$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X > 132) = P(Z > z) = 0{,}07$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että $P(Z > z) = 0{,}07$, kun $z \approx 1{,}47579$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx 1{,}47579,\ x = 132,\ \mu = 125$$

$$1{,}47579 = \frac{132-125}{\sigma} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

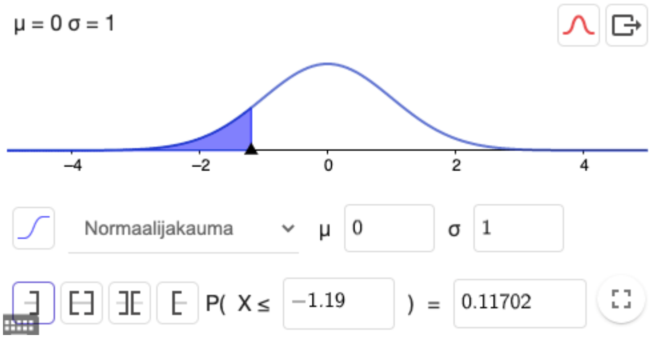
$$\sigma \approx 5$$

Keskihajonta on 5 cm.
Vastaus
odotusarvo 125 cm, keskihajonta 5 cm

15.9

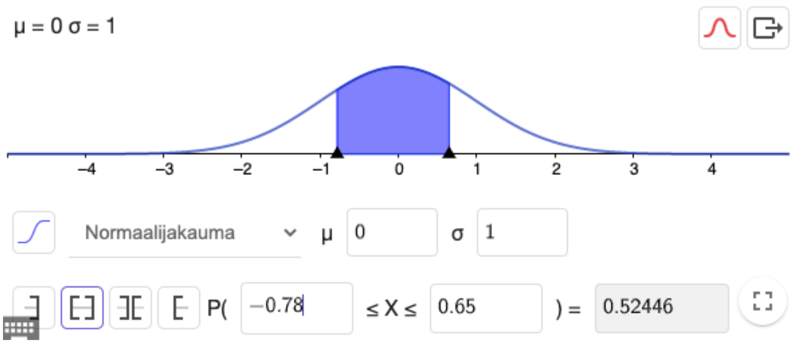
a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.
Siis $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Määritetään todennäköisyys GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



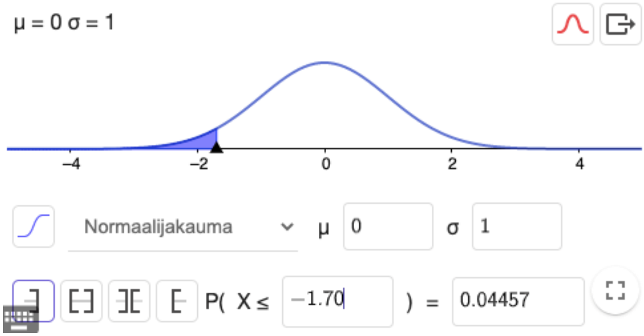
Saadaan $P(Z \leq -1{,}19) \approx 0{,}12.$

b)



Saadaan $P(-0{,}78 \leq Z \leq 0{,}65) \approx 0{,}52.$

c)



Saadaan $P(Z \le -1{,}70) \approx 0{,}04457.$

Normaalijakauman symmetrian perusteella

$$P(Z \le -1{,}70 \ \text{ tai } \ Z \ge 1{,}70) \approx 2 \cdot 0{,}04457 \approx 0{,}09.$$

Vastaus

a) 0,12

b) 0,52

c) 0,09

15.10

a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 15 ja keskihajonta $2{,}5$.
Siis $\mu = 15$ ja $\sigma = 2{,}5$.

Lasketaan arvoa $x = 20$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{20-15}{2{,}5} = 2$$

Arvo $x = 20$ poikkeaa odotusarvosta 2 keskihajonnan verran ylöspäin.

b) Lasketaan arvoa $x = 12{,}5$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{12{,}5-15}{2{,}5} = -1$$

Arvo $x = 12{,}5$ poikkeaa odotusarvosta 1 keskihajonnan verran alaspäin.

c) Lasketaan arvoa $x = 13$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{13-15}{2{,}5} = -0{,}8$$

Arvo $x = 12{,}5$ poikkeaa odotusarvosta $0{,}8$ keskihajonnan verran alaspäin.

Vastaus
a) normitettu arvo 2; poikkeaa 2 keskihajonnan verran ylöspäin
b) normitettu arvo $–1$, poikkeaa 1 keskihajonnan verran alaspäin
c) normitettu arvo $–0{,}8$; poikkeaa $0{,}8$ keskihajonnan verran alaspäin

15.11

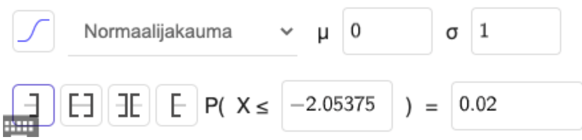
Tehtävänä on määrittää kahvipaketin massan X odotusarvo μ, kun keskihajonta $\sigma = 10$ (g).

Olkoon arvoa $x = 500$ (g) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X < 500) = P(Z < z) = 0{,}02$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z < z) = 0{,}02$, kun $z \approx -2{,}05375$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx -2{,}05375,\ x = 500,\ \sigma = 10$$

$$-2{,}05375 = \frac{500-\mu}{10} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 521$$

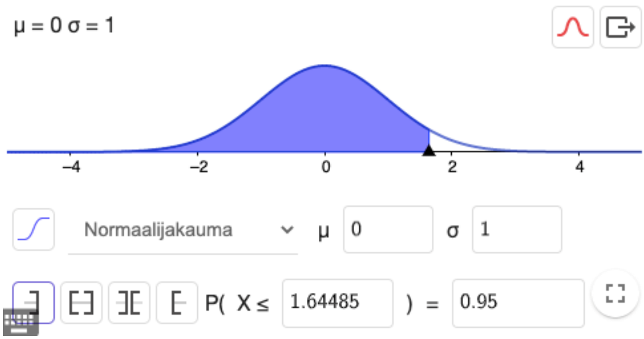
Odotusarvoksi pitäisi säätää 521 g.

Vastaus
521 g

15.12

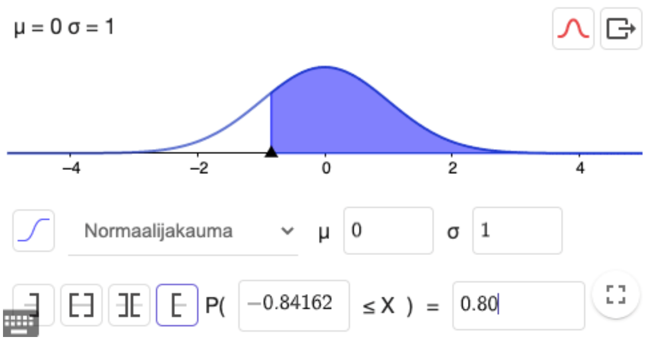
a) Normitetun normaalijakauman odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.
Siis $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.

Määritetään arvo a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$P(Z \leq a) = 0{,}95$, kun $a \approx 1{,}64$.

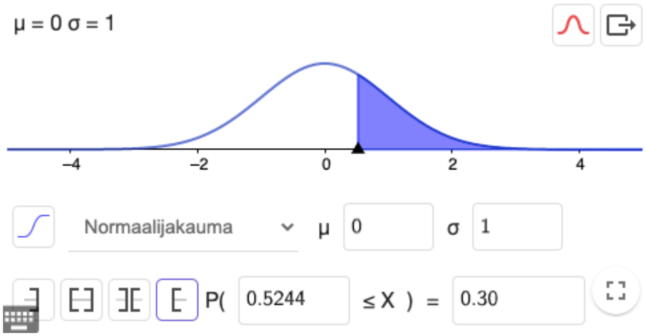
b)



$P(Z \geq a) = 0{,}80$, kun $a \approx -0{,}84$.

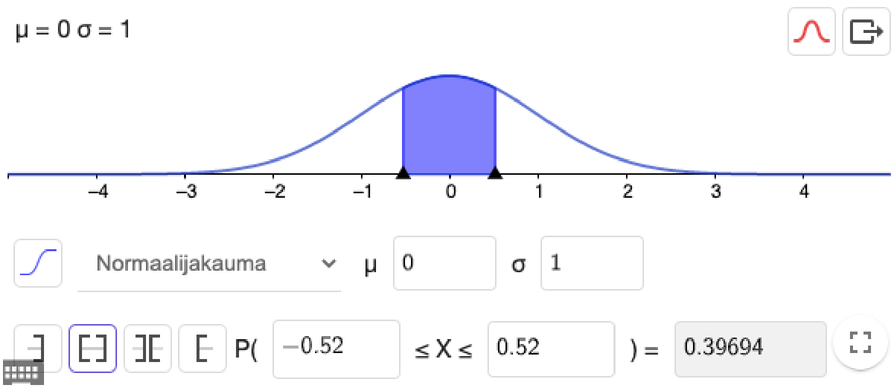
c) Väli $-a \leq Z \leq a$ sijaitsee symmetrisesti odotusarvon 0 molemmin puolin. Välin yläpuolinen osuus jakaumasta on $\dfrac{0{,}60}{2} = 0{,}30$.

Määritetään sellainen arvo a, että $P(Z > a) = 0{,}30$



$P(Z > a) = 0{,}30$, kun $a \approx 0{,}52$.

Tarkistetaan, toteutuuko annettu ehto.



Vastaus

a) –1,64

b) –0,84

c) 0,52

15.13

a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 36 ja keskihajonta 4.
Siis $\mu = 36$ ja $\sigma = 4$.

Lasketaan arvoa $x = 48$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{48-36}{4} = 3$$

Oikea vaihtoehto on 5.

b) Lasketaan arvoa $x = 42$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{42-36}{4} = 1{,}5$$

Oikea vaihtoehto on 4.

c) Lasketaan arvoa $x = 33$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{33-36}{4} = -0{,}75$$

Oikea vaihtoehto on 3.

d) Lasketaan arvoa $x = 30$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{30-46}{4} = -1{,}5$$

Oikea vaihtoehto on 2.

Vastaus
a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2

15.14

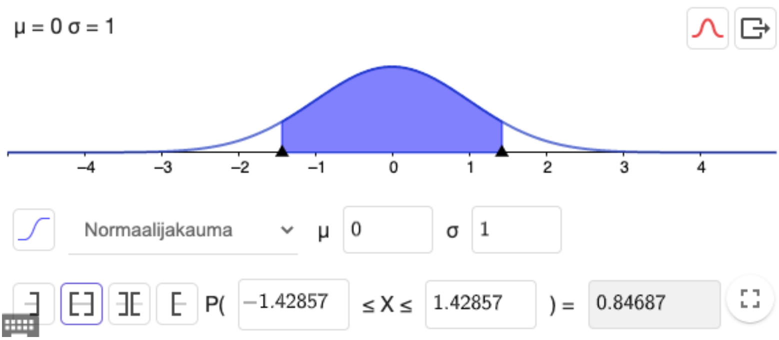
Teräslevyn paksuus X noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskihajonta $\sigma = 0,70$ (mm).

Sattumanvaraisesti valitun levyn paksuus poikkeaa keskiarvosta enintään 1,0 mm alas- tai ylöspäin.

Lasketaan poikkeamaa 1,0 mm vastaava normitettu arvo z.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1,0 \text{ mm}}{0,7 \text{ mm}} \approx 1,42857$$

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa.
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys $P(-1,42857 \leq Z \leq 1,42857)$.



Levyn paksuus poikkeaa keskiarvosta vähemmän kuin 1,0 mm todennäköisyydellä 0,85.

Vastaus
0,85

15.15

Tehtävänä on määrittää autojen nopeuden X odotusarvo μ ja keskihajonta σ.

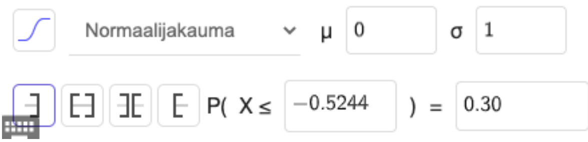
30 % autoista ajoi alle 60 km/h.

Olkoon arvoa $x = 60$ (km/h) vastaava normitettu arvo z_1.

Tulee olla $P(X < 60) = P(Z < z_1) = 0{,}30.$

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1).$

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z < z_1) = 0{,}30$, kun $z_1 \approx -0{,}5244.$

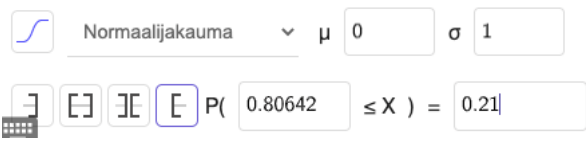


21 % autoista ajoi yli 80 km/h.

Olkoon arvoa $x = 80$ (km/h) vastaava normitettu arvo z_2.

Tulee olla $P(X > 80) = P(Z > z_2) = 0{,}80.$

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z > z_2) = 0{,}80$, kun $z_2 \approx 0{,}80642.$



Muodostetaan normitusyhtälöt ja ratkaistaan μ ja σ.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{cases} \dfrac{60-\mu}{\sigma} = -0,5244 \\ \dfrac{80-\mu}{\sigma} = 0,80642 \end{cases}$$

$\mu \approx 68$ ja $\sigma \approx 15$

Nopeuksien keskiarvo oli 68 km/h ja keskihajonta 15 km/h.

Vastaus
keskiarvo 68 km/h, keskihajonta 15 km/h

15.16

Tehtävänä on määrittää led-lampun käyttöiän X odotusarvo μ ja keskihajonta σ.

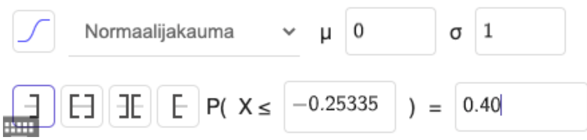
$\dfrac{400}{1000} = 40\,\%$ lampuista kesti enintään 28 000 tuntia.

Olkoon arvoa $x = 28\ 000$ (h) vastaava normitettu arvo z_1.

Tulee olla $P(X \leq 28\,000) = P(Z \leq z_1) = 0,40.$

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1).$

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z \leq z_1) = 0,40$, kun $z_1 \approx -0,25335.$

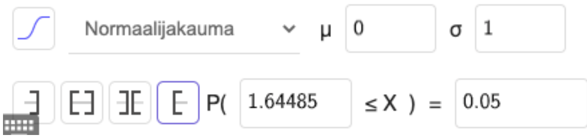


$\dfrac{50}{1000} = 5\,\%$ lampuista kesti ainakin 34 000 tuntia.

Olkoon arvoa $x = 34\ 000$ (km/h) vastaava normitettu arvo z_2.

Tulee olla $P(X \geq 34\,000) = P(Z \geq z_2) = 0,05.$

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z \geq z_2) = 0,05$, kun $z_2 \approx 1,64485.$



Muodostetaan normitusyhtälöt ja ratkaistaan μ ja σ.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{cases} \dfrac{28\,000-\mu}{\sigma} = -0{,}25335 \\ \dfrac{34\,000-\mu}{\sigma} = 1{,}64485 \end{cases}$$

$\mu \approx 28\,800$ ja $\sigma \approx 3160$

Lamppujen kestoiän odotusarvo on 28 800 h ja keskihajonta 3160 h.

Vastaus

odotusarvo 28 800 h, keskihajonta 3160 h

15.17

a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{<0} \cdot x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{>0}$$

Derivaattafunktion merkki on positiivinen, kun $x < 0$, ja negatiivinen, kun $x > 0$. Laaditaan kulkukaavio.

		0	
$\varphi'(x)$	+		−
$\varphi(x)$	↗		↘
		max	

Kulkukaavion perusteella tiheysfunktion φ maksimikohta on $x = 0$ ja maksimiarvo

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

b) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \int_{s}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x + \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s}^{0} -x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x\right) + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x\right)$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{s}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right) + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s^2})\right) + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} - \mathrm{e}^0)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\infty}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathrm{e}^{-\infty} - \mathrm{e}^0)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - 0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 - 1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Vastaus

a) maksimikohta $x = 0$, maksimiarvo $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

b) odotusarvo 0