14.1

a) Merkitään satunnaisesti valitun pojan pituutta senttimetreinä kirjaimella X. On määritettävä todennäköisyys $P(97 \leq X \leq 105)$.

Kuvion mukaan $P(97 \leq X \leq 105) = 0{,}14 + 0{,}34 = 0{,}48$.

b) On määritettävä todennäköisyys $P(X \leq 109)$.

Kuvion mukaan $P(X \leq 109) = 0{,}02 + 0{,}14 + 0{,}34 + 0{,}34 = 0{,}84$.

c) On määritettävä todennäköisyys $P(X > 109)$.

Kuvion mukaan $P(X > 109) = 0{,}14 + 0{,}02 = 0{,}16$.

d) On määritettävä todennäköisyys $P(X = 105)$.

Koska todennäköisyydet ovat pinta-aloja ja janan pinta-ala on nolla, niin

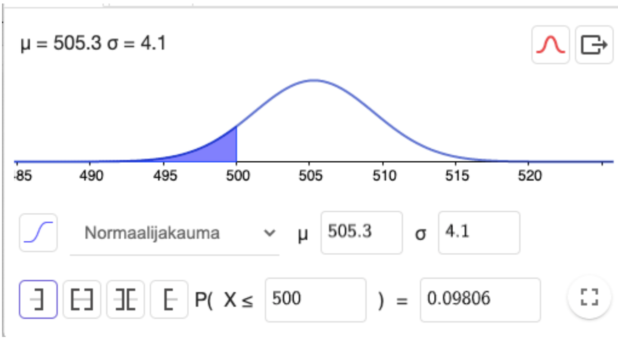
$P(X = 105) = 0$.

Vastaus
a) 0,48
b) 0,84
c) 0,16
d) 0

14.2

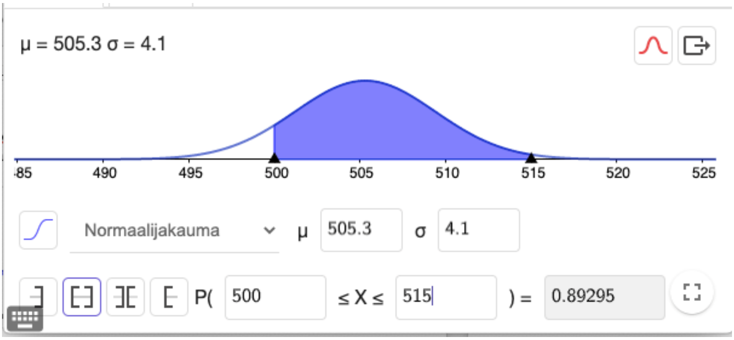
a) Merkitään satunnaisesti valitun riisipakkauksen painoa grammoina kirjaimella X. Pakkausten painon keskiarvo on 505,3 g ja keskihajonta 4,1 g. Siis $\mu = 505{,}3$ ja $\sigma = 4{,}1$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pakkaus painaa alle 500g.



Saadaan $P(X < 500) \approx 0{,}098$.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun pakkauksen paino on välillä 500–515 g.



Saadaan $P(500 \le X \le 515) \approx 0{,}89$.

Paino on välillä 500–515 g 89 %:lla pakkauksista.

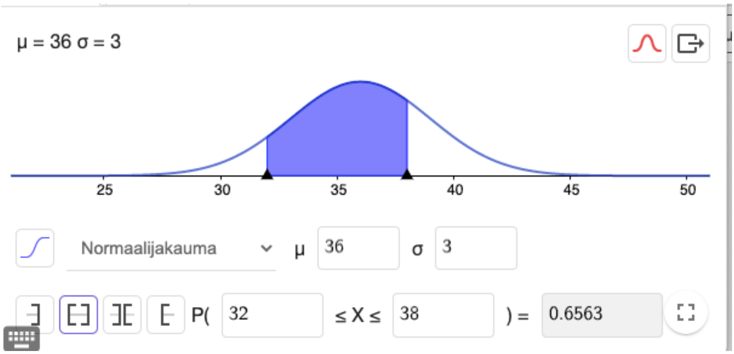
Vastaus

a) 0,098

b) 89 %

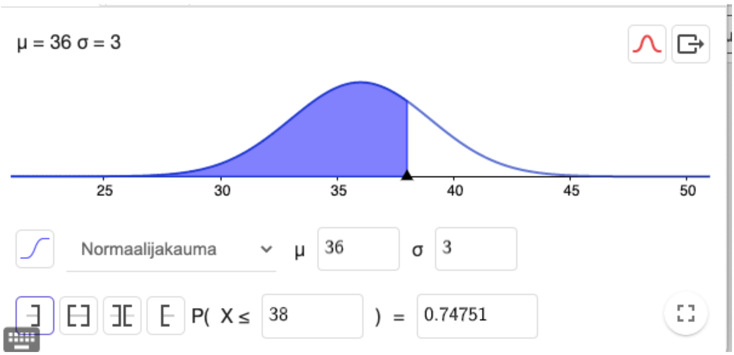
14.3

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



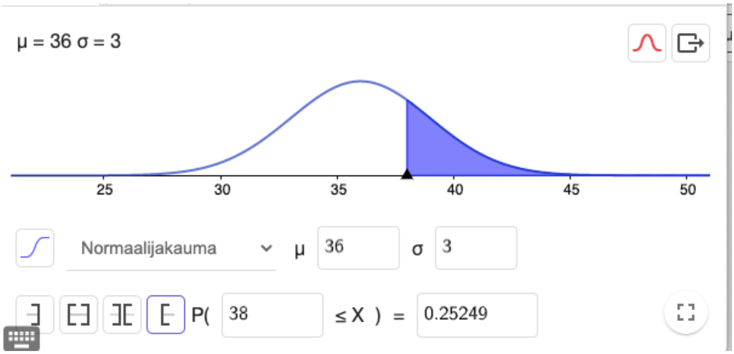
$P(32 \leq X \leq 38) \approx 0{,}66$

b)



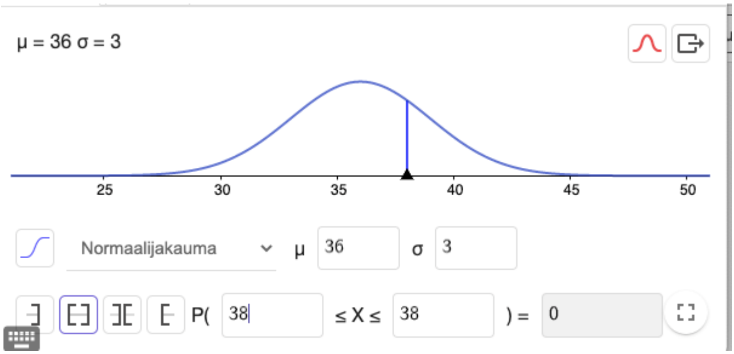
$P(X \leq 38) \approx 0{,}75$

c)



$P(X \geq 38) \approx 0,25$

d)



$P(X = 38) = 0$

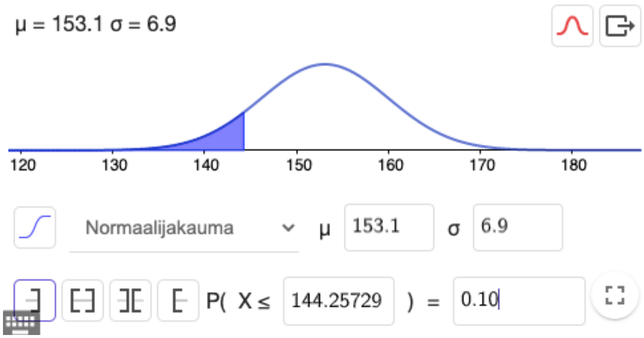
Vastaus

a) 0,66
b) 0,75
c) 0,25
d) 0

14.4

a) Merkitään satunnaisesti valitun tytön pituutta senttimetreinä kirjaimella X. On määritettävä raja, jonka alapuolella on $10\ \%$ pituuksista, eli sellainen pituus a, että $P(X < a) = 0{,}10$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

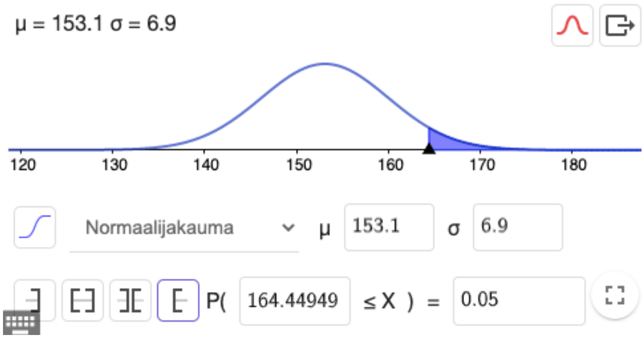


$P(X < a) = 0{,}10$, kun $a \approx 144$

Lyhimmät $10\ \%$ tytöistä ovat alle 144 cm pitkiä.

b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on $5\ \%$ pituuksista, eli sellainen pituus a, että $P(X > a) = 0{,}05$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$P(X > a) = 0{,}05$, kun $a \approx 164$

Pisimmät $5\ \%$ tytöistä ovat yli 164 cm pitkiä.

Vastaus

a) alle 144 cm

b) yli 164 cm

14.5

a) Kuvion 2 perusteella $a = 8$.

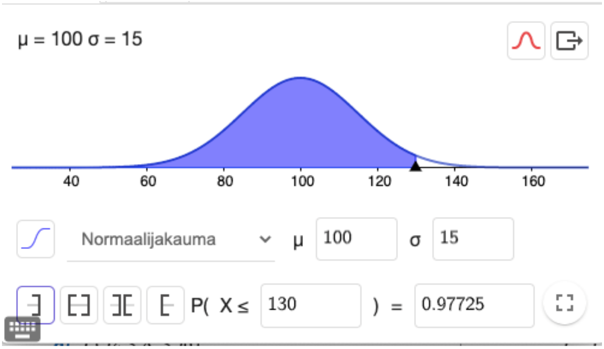
b) Kuvion 3 perusteella $a = 14$.

c) Kuvion 1 perusteella $a = 12$.

Vastaus
a) $a = 8$
b) $a = 14$
c) $a = 12$

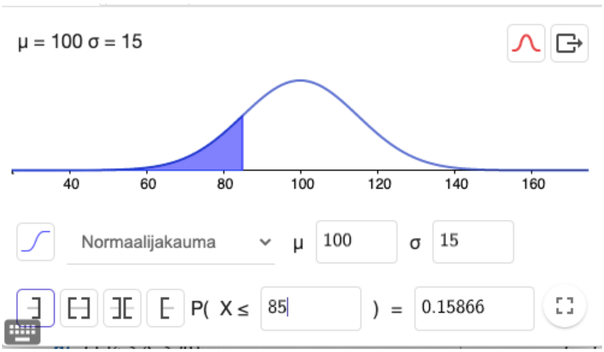
14.6

a) Satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärä X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$ Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 130)$.



Saadaan $P(X < 130) \approx 0{,}98$.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 85)$.



Saadaan $P(X < 85) \approx 0{,}16$.

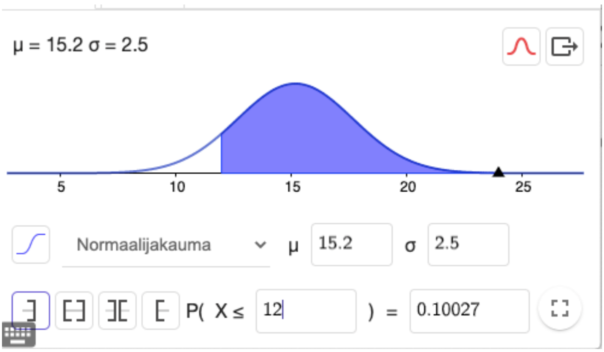
c) a- ja b-kohdan perusteella $P(85 \le X \le 130) \approx 0{,}98 - 0{,}16 = 0{,}82$.

Vastaus
a) 0,98 **b)** 0,16 **c)** 0,82

14.7

a) Olkoon satunnaismuuttuja X hiustenkuivaajan toiminta-aika. Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 15{,}2$ kuukautta ja keskihajonta $\sigma = 2{,}5$ kuukautta.

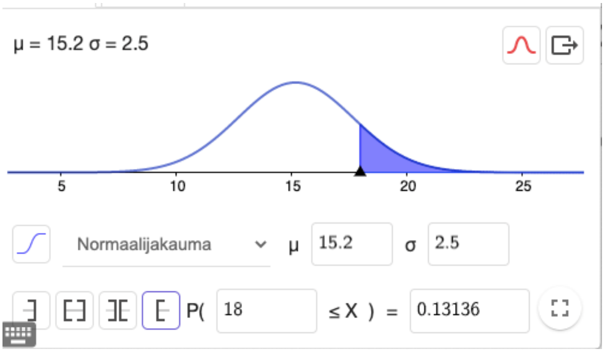
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että hiustenkuivaaja rikkoutuu ensimmäisen vuoden aikana.



Saadaan $P(X \leq 12) \approx 0{,}10$.

Hiustenkuivaajista joutuu takuukorjaukseen noin $10\ \%$.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että hiustenkuivaaja toimii rikkoutumatta yli 18 kuukautta.



Saadaan $P(X > 18) \approx 0{,}13$.

Noin 13 % hiustenkuivaajista toimii yli 18 kuukautta.

Vastaus
a) 10 %
b) 13 %

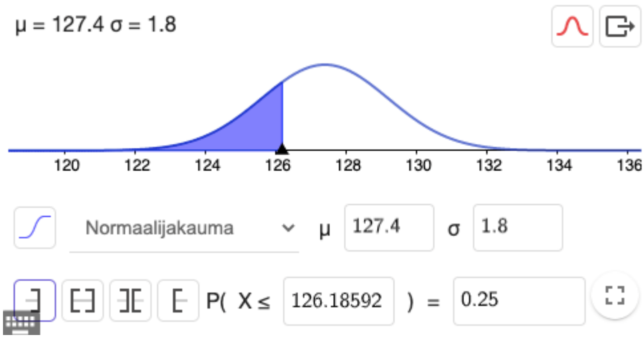
14.8

a) Määritettävän massavälin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmin puolin.

Massavälillä tulee olla 50 % mittaustuloksista, joten välin ulkopuolella on 50 % mittaustuloksista. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella on $\frac{50\,\%}{2} = 25\,\%$ mittaustuloksista.

Merkitään satunnaisesti valittua mittaustulosta grammoina kirjaimella X.

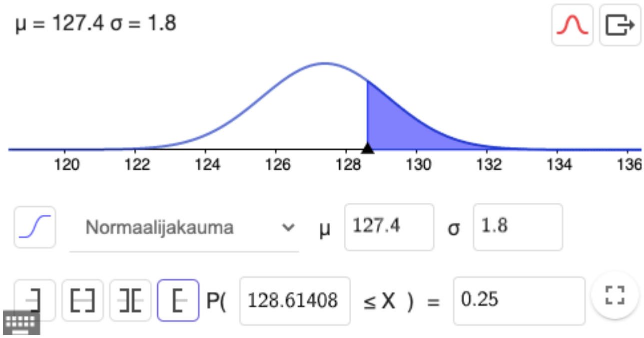
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a.



$P(X < a) = 0,25$, kun $a \approx 126,2$

Alaraja on 126,2 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b.



$P(X > b) = 0{,}25$, kun $b \approx 128{,}6$

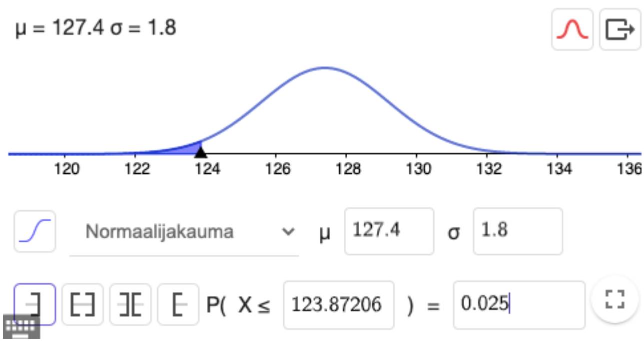
Yläraja on 128,6 g.

Massaväli on siis 126,2–128,6 g.

b) Määritettävän massavälin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmin puolin.

Massavälillä tulee olla 95 % mittaustuloksista, joten välin ulkopuolella on 5 % mittaustuloksista. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella on $\frac{5\,\%}{2} = 2{,}5\,\%$ mittaustuloksista.

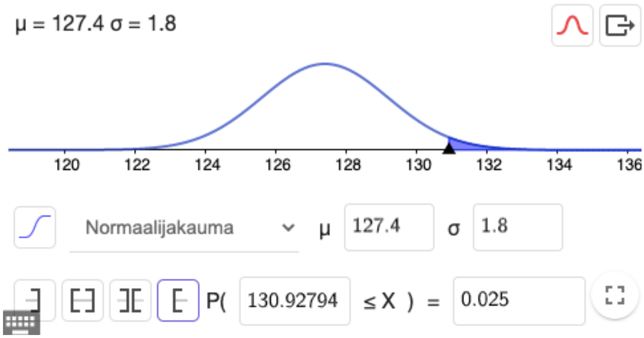
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a.



$P(X < a) = 0{,}025$, kun $a \approx 123{,}9$

Alaraja on 123,9 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b.



$P(X > b) = 0{,}025$, kun $b \approx 130{,}9$

Yläraja on 130,9 g.

Massaväli on siis 123,9–130,9 g.

Vastaus

a) 126,2–128,6 g

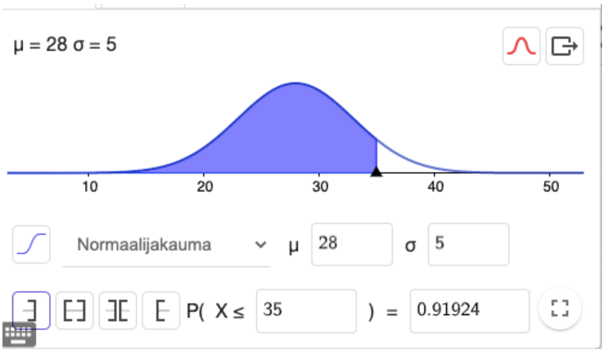
b) 123,9–130,9 g

14.9

a) Koulumatkan kesto X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 28$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma = 5{,}0$ minuuttia.

Anna ehtii tunnille, jos koulumatka kestää enintään 35 minuuttia.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X \leq 35)$.



Saadaan $P(X \leq 35) \approx 0{,}91924$.

Lasketaan todennäköisyys, että Anna ehtii tunnille jokaisena viitenä aamuna.

$$0{,}91924^5 \approx 0{,}66$$

b) Tapahtuma "myöhästyy ainakin kerran" on tapahtuman "ehtii tunnille jokaisena aamuna" vastatapahtuma.

Lasketaan tapahtuma "myöhästyy ainakin kerran" todennäköisyys.

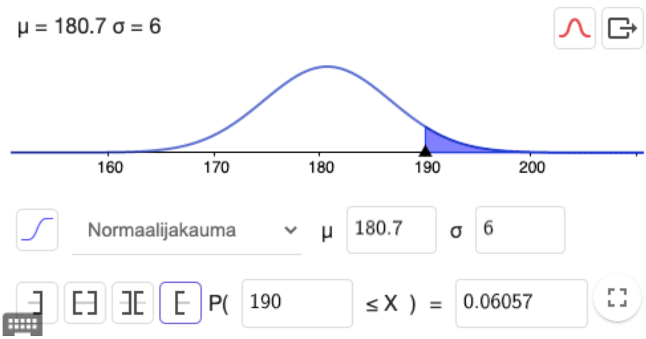
$$1 - 0{,}66 = 0{,}34$$

Vastaus
a) 0,66
b) 0,34

14.9

a) Täysikasvuisen miehen pituus X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 180,7$ cm ja keskihajonta $\sigma = 6,0$ cm .

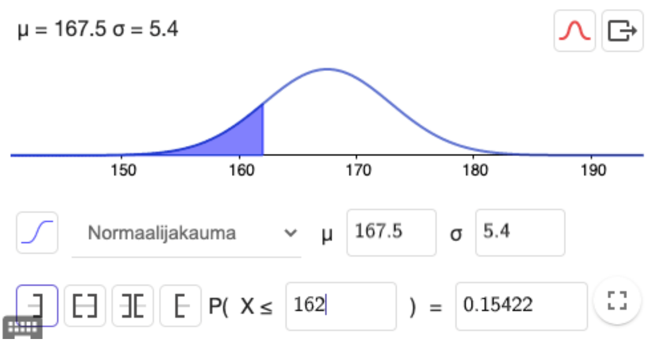
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X \geq 190)$.



Saadaan $P(X \geq 190) \approx 0,061$.

b) Täysikasvuisen naisen pituus Y noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 167,5$ cm ja keskihajonta $\sigma = 5,4$ cm .

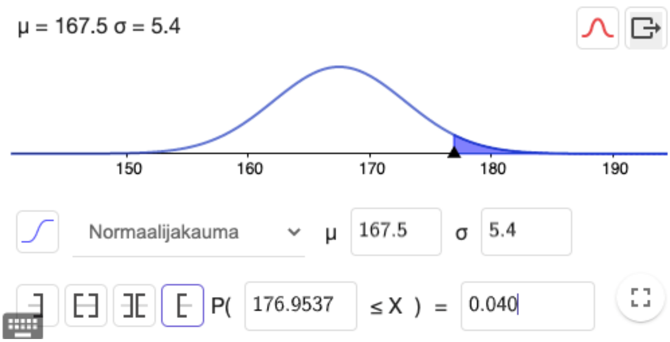
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(Y < 162)$.



Saadaan $P(Y < 162) \approx 0{,}15.$

15 % kaikista täysikasvuisista suomalaisista naisista on pituudeltaan alle 162 cm.

c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen pituus L, että $P(Y > L) = 0{,}040.$



$P(Y > L) = 0{,}040,$ kun $L \approx 177$

Pituuden L tulee olla 177 cm.

Vastaus

a) 0,061
b) 15 %
c) $L \approx 177$ cm

14.11

a) Merkitään satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärää kirjaimella X.

Kuvion mukaan $P(85 \leq X \leq 115) = 0,34 + 0,34 = 0,68.$

Älykkyydeltään normaaleja on 68 % väestöstä.

b) Älykkyysosamäärän odotusarvo on 100 ja keskihajonta 15. Kahden keskihajonnan verran odotusarvon yläpuolella on älykkyysosamäärä $100 + 2 \cdot 15 = 130$.

Kuvion mukaan $P(X \geq 130) = 0,02.$

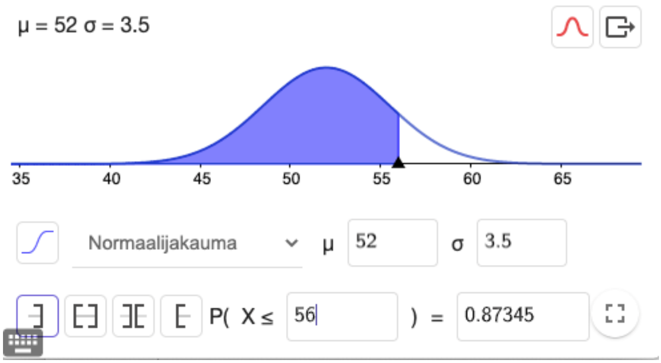
Huippuälykkäitä on 2 % väestöstä.

Vastaus
a) 68 %
b) 2 %

14.12

a) Merkitään satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituutta senttimetreinä kirjaimella X. Syntymäpituuden keskiarvo on 52 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Siis $\mu = 52$ ja $\sigma = 3{,}5$.

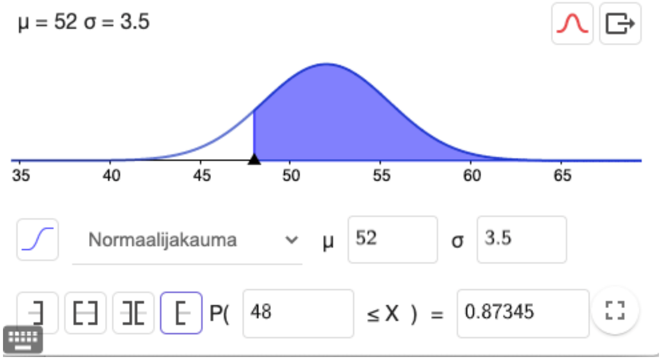
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on alle 56 cm.



Saadaan $P(X < 56) \approx 0{,}87$.

Poikavauvoista 87 % on syntymäpituudeltaan alle 56 cm.

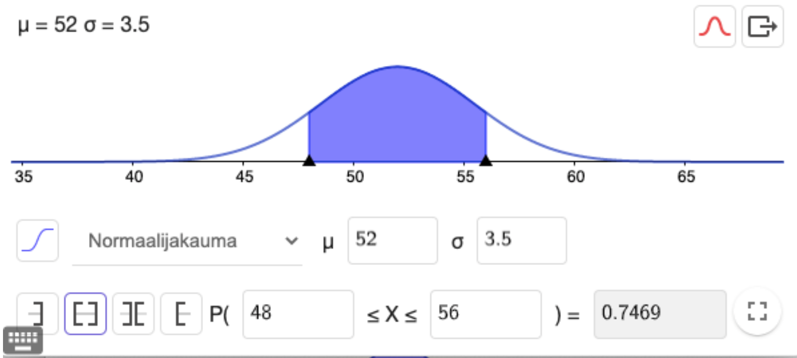
b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on yli 48 cm.



Saadaan $P(X > 48) \approx 0{,}87$.

Poikavauvoista 87 % on syntymäpituudeltaan yli 48 cm.

c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on 48–56 cm.



Saadaan $P(48 \leq X \leq 56) \approx 0{,}75$.

Poikavauvoista 75 % on syntymäpituudeltaan välillä 48–56 cm.

Vastaus

a) 87 %

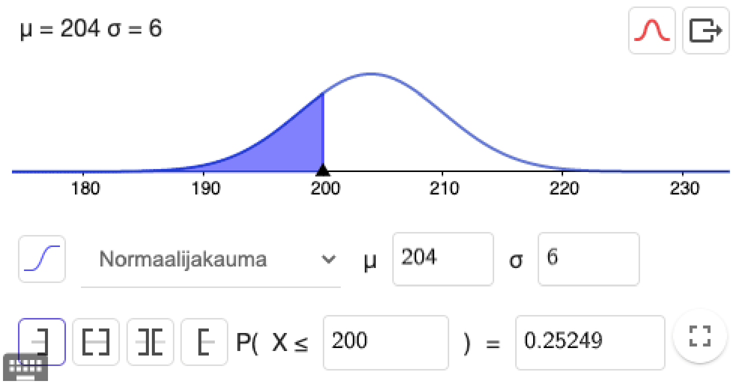
b) 87 %

c) 75 %

14.13

Keksipakkauksen massa X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 204$ grammaa ja keskihajonta $\sigma = 6$ grammaa.

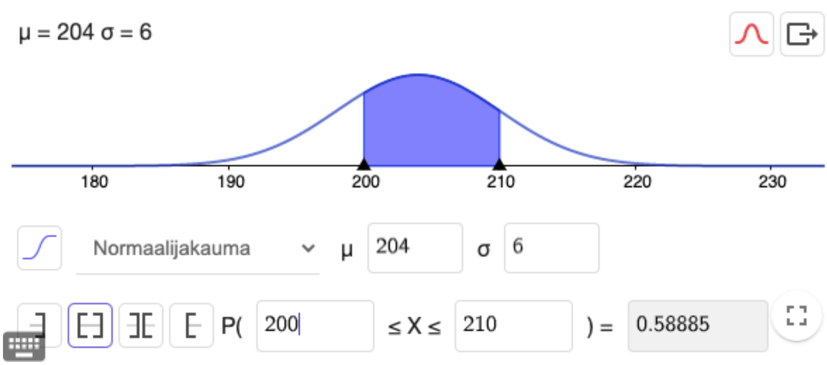
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 200)$.



Saadaan $P(X < 200) \approx 0,25$.

Keksipakkauksista 25 %:lla massa oli alle 200 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(200 \leq X \leq 210)$.



Saadaan $P(200 \leq X \leq 210) \approx 0,59$.

Keksipakkauksista 59 %:lla massa oli välillä 200 g–210 g.

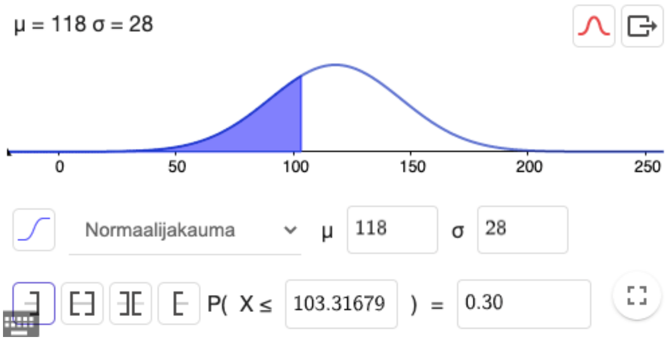
Vastaus
25 %:lla pakkauksista massa oli alle 200 g
ja 59 %:lla välillä 200 g–210 g.

14.14

Merkitään satunnaisesti valitun soveltuvuuskokeen pistemäärää kirjaimella X.

On määritettävä raja, jonka alapuolella on $30\ \%$ pistemääristä, eli sellainen pistemäärä a, että $P(X \leq a) = 0{,}30$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

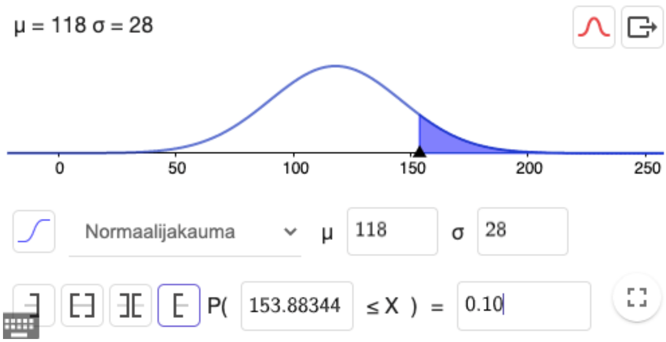


$P(X \leq a) = 0{,}30$, kun $a \approx 103$

Heikoimmat $30\ \%$ saavat enintään 103 pistettä.

On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 10 % pituuksista, eli sellainen pituus a, että $P(X \geq a) = 0{,}10$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



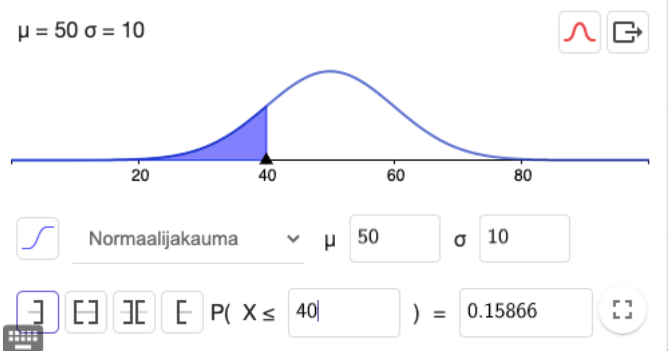
$P(X \geq a) = 0{,}10$, kun $a \approx 154$

Parhaat 10 % saavat ainakin 154 pistettä.

Vastaus
103 pistettä ja 154 pistettä

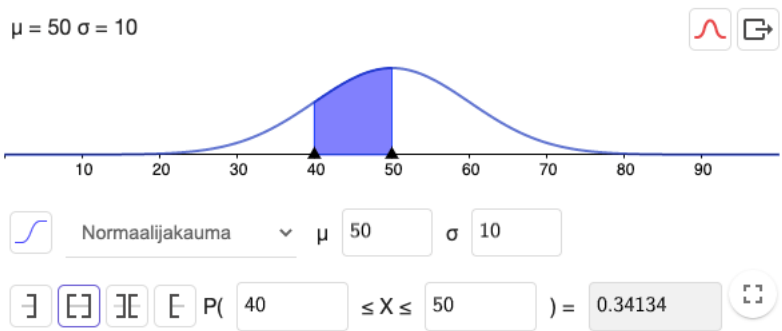
14.15

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



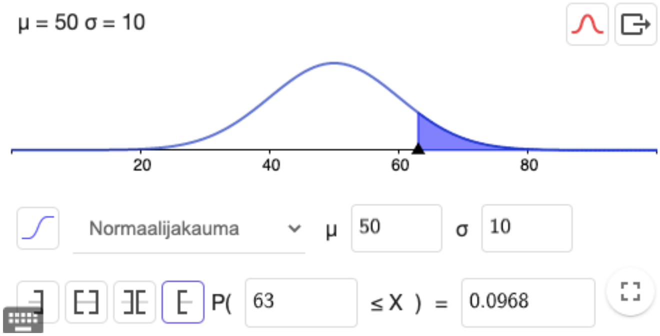
$P(X \leq 40) \approx 0{,}16$

b)



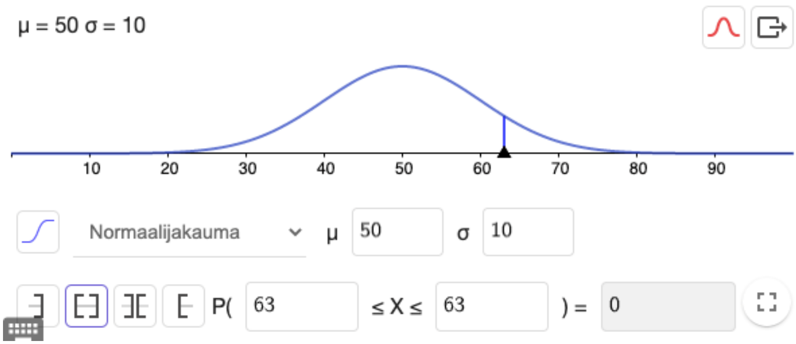
$P(40 \leq X \leq 50) \approx 0{,}34$

c)



$P(X \geq 63) \approx 0{,}10$

d)



$P(X = 63) = 0$

Vastaus

a) 0,16
b) 0,34
c) 0,10
d) 0,00

14.16

a) Kuvion 1 perusteella $a = -0,5$.

b) Kuvion 2 perusteella $a = 1,0$.

c) Kuvioiden 1 ja 2 perusteella $a = 1,0$.

d) Kuvion 3 perusteella $a = 0,72 \approx 0,7$.

Vastaus

a) $a = -0,5$

b) $a = 1,0$

c) $a = 1,0$

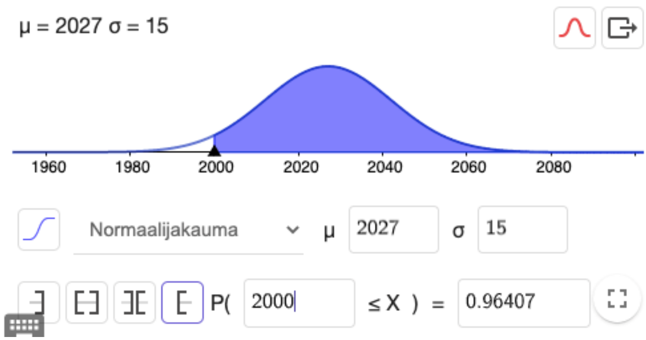
d) $a \approx 0,7$

14.17

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Silmukan kantokyky X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 2027$ kg ja keskihajonta $\sigma = 15$ kg.

Määritetään todennäköisyys, että satunnaisesti valittu silmukka kestää 2000 kg:n taakan.



Saadaan $P(X \geq 2000) \approx 0{,}96407$.

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki 10 silmukkaa kestävät 2000 kg:n taakan.

$0{,}96407^{10} \approx 0{,}69$

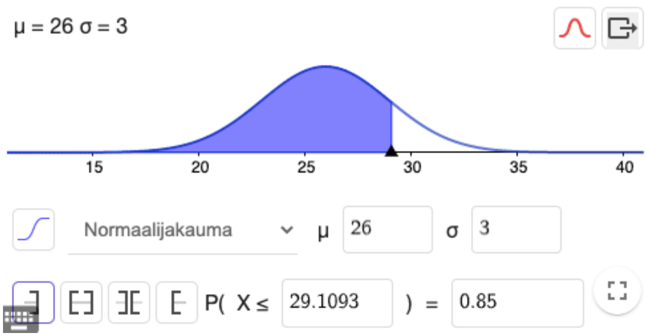
Vastaus
0,69

14.18

a) Riittävä annos lääkettä X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 26{,}0$ mg ja keskihajonta $\sigma = 3{,}0$ mg .

On määritettävä sellainen lääkeannoksen suuruus, että se riittää parantamaan 85 % koirista eli että 85 % koirista jää tämän rajan alapuolelle.

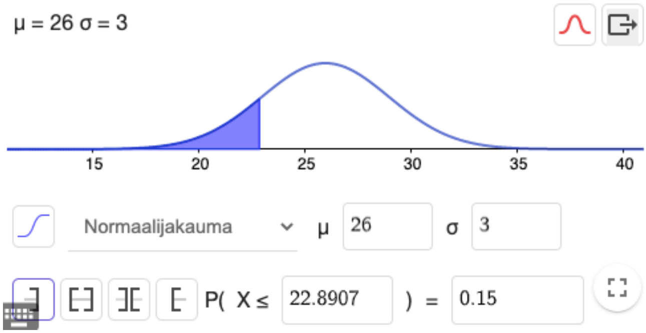
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen annoksen suuruus a, että $P(X \le a) = 0{,}85$.



$P(X \le a) = 0{,}85,$ kun $a \approx 29{,}1$.

Annoksen suuruuden tulee olla 29,1 mg.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen annoksen suuruus a, että $P(X \leq a) = 0{,}15$.



$P(X \leq a) = 0{,}15$, kun $a \approx 22{,}9$.

Annoksen suuruuden tulee olla 22,9 mg.

Vastaus

a) 29,1 mg

b) 22,9 mg

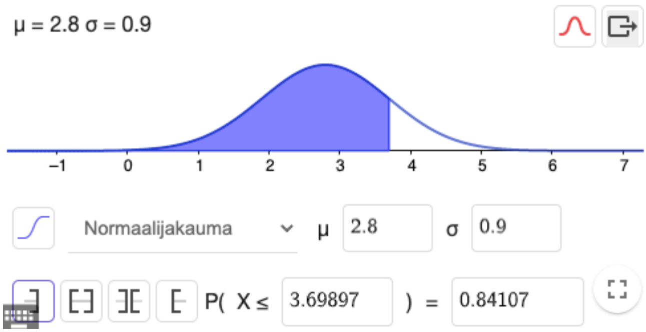
14.19

a) Merkitään satunnaisesti valitussa kanassa esiintyvien punkkien lukumäärää kirjaimella X.

$\log_{10} X$ noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 2{,}8$ ja keskihajonta $\sigma = 0{,}9$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(\log_{10} X \leq \log_{10} 5000)$.

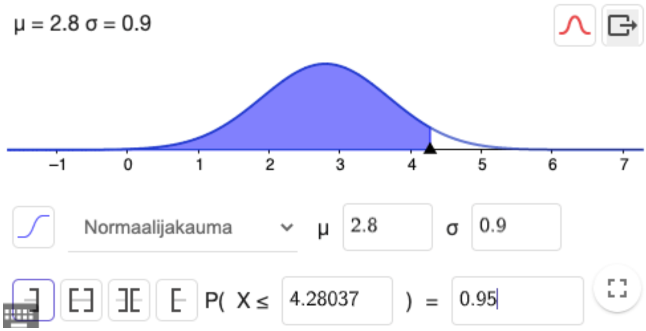
$\log_{10} 5000 \approx 3{,}69897$



Saadaan $P(\log_{10} X \leq \log_{10} 5000) \approx 0{,}84$.

Alle 5000 punkkia on 84 %:lla kanoista.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen logaritmin arvo a, että $P(\log_{10} X < a) = 0{,}95$.



$P(\log_{10} X < a) = 0{,}95$, kun $a \approx 4{,}28037$.

Ratkaistaan punkkimäärä X.

$$\begin{aligned} \log_{10} X &\approx 4{,}28037 \\ X &\approx 10^{4{,}28037} \\ &\approx 19\,000 \end{aligned}$$

95 % kanoista jää punkkimäärän 19 000 alapuolelle.

Vastaus

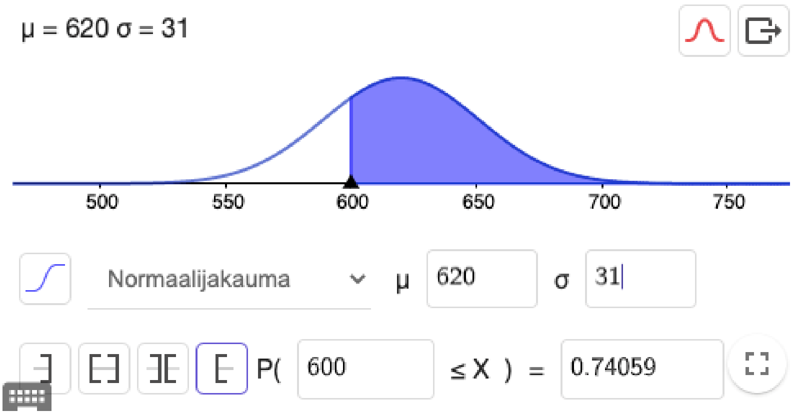
a) 84 %

b) 19 000

14.20

a) Akun toiminta-aika X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 620$ tuntia ja keskihajonta $\sigma = 31$ tuntia.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X \geq 600)$.



Saadaan $P(X \geq 600) \approx 0{,}74059$.

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki neljä akkua toimivat yli 600 tuntia.

$0{,}74059^4 \approx 0{,}30$

b) Tapahtuma "ainakin yksi akku toimii yli 600 tuntia" on tapahtuman "kaikki 4 akkua toimivat alle 600 tuntia" vastatapahtuma.

a-kohdan perusteella $P(X < 600) \approx 1 - 0,74059 = 0,25941$.

Tapahtuman "kaikki 4 akkua toimivat alle 600 tuntia" todennäköisyys on $0,25941^4$.

Lasketaan tapahtuma "ainakin yksi akku toimii" todennäköisyys.

$1 - 0,25941^4 \approx 0{,}995$

Vastaus

a) 0,30

b) 0,995

14.21

Olkoon satunnaismuuttuja X_1 automatkan kesto minuutteina.
Satunnaismuuttujan X_1 odotusarvo $\mu_1 = 17$ minuuttia
ja keskihajonta $\sigma_1 = 5{,}0$ minuuttia.

Olkoon satunnaismuuttuja X_2 metromatkan kesto minuutteina.
Satunnaismuuttujan X_2 odotusarvo $\mu_2 = 13$ minuuttia
ja keskihajonta $\sigma_2 = 2{,}0$ minuuttia.

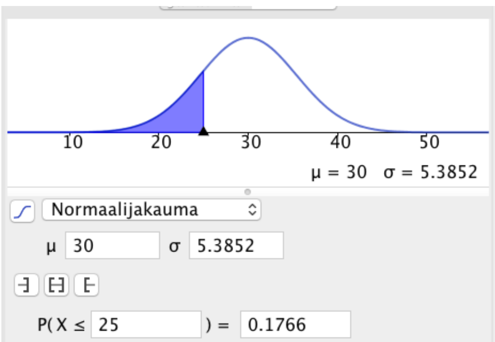
Olkoon satunnaismuuttuja $X = X_1 + X_2$ työmatkan pituus minuutteina.
Tällöin satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 17 + 13 = 30 \ \text{(min)}$$

ja keskihajonta

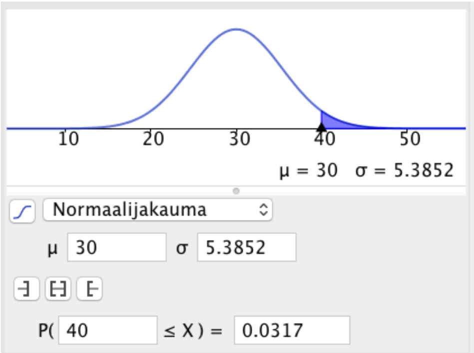
$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}0^2} \approx 5{,}3852 \ \text{(min)}\,.$$

a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että työmatkaan kuluu alle 25 minuuttia.



$P(X < 25) \approx 0{,}18$

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että työmatkaan kuluu yli 40 minuuttia.



$P(X > 40) \approx 0{,}032$

Vastaus

a) 0,18

b) 0,995

14.22

Olkoon satunnaismuuttuja X henkilön saapumisaika pysäköintialueelle minuutteina keskiyöstä lukien.

Saapumisajan keskiarvo on klo 8.50 ja keskihajonta 5 min.
$\mu = 8 \cdot 60 + 50 = 530$ ja $\sigma = 5$

Tehtävänä on laskea todennäköisyys tapahtumalle

A: ”henkilö saapuu työpaikalle klo 9.00 jälkeen”.

Tapahtuman A vastatapahtuma on

$\overline{A}$: "henkilö saapuu työpaikalle viimeistään klo 9.00".

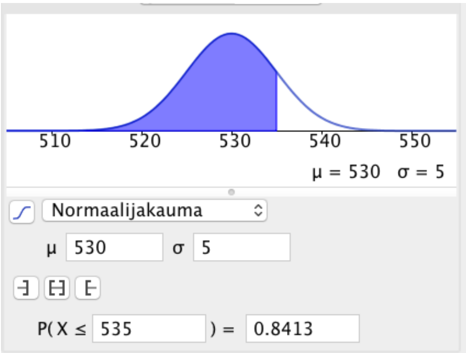
Jos henkilö löytää paikan ensimmäiseltä pysäköintialueelta, hänen on saavuttava sinne viimeistään klo 8.55, jotta hän ehtii työpaikalle viimeistään klo 9.00.

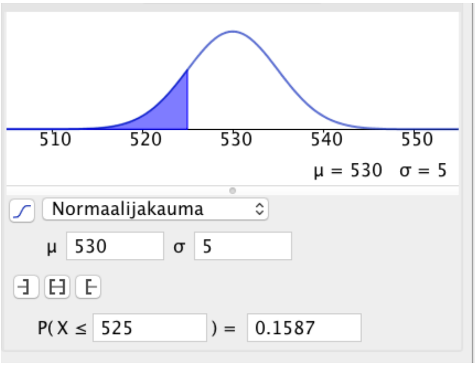
Kellonaika 8.55 on minuutteina $8 \cdot 60 + 55 = 535$.

Jos henkilö ei löydä paikkaa ensimmäiseltä pysäköintialueelta, hänen on saavuttava sinne viimeistään klo 8.45, jotta hän ehtii työpaikalle viimeistään klo 9.00.

Kellonaika 8.45 on minuutteina $8 \cdot 60 + 45 = 525$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyydet
$P(X \leq 535)$ ja $P(X \leq 525)$.





$P(\text{henkilö saapuu työpaikalle klo 9 jälkeen})$

$= 1 - P(\text{henkilö saapuu työpaikalle viimeistään klo 9})$

$= 1 - (P(\text{löytää paikan}) \cdot P(\text{saapuu viimeistään 8.55})$
$\quad + P(\text{ei löydä paikkaa}) \cdot P(\text{saapuu viimeistään 8.45}))$

$= 1 - (0,65 \cdot P(X \leq 535) + (1 - 0,65) \cdot P(X \leq 525))$
$\approx 1 - (0,65 \cdot 0,8413) + (1 - 0,65) \cdot 0,1587)$
$\approx 0,40$

Vastaus0,40