13.1

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 2^{\frac{1}{3}x} - 1, & \text{kun } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

a) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X \le 2) = F(2) = 2^{\frac{1}{3}\cdot 2} - 1 = 0{,}5874... \approx 0{,}587$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \le 1) \\ &= 1 - F(1) \\ &= 1 - (2^{\frac{1}{3}\cdot 1} - 1) \\ &= 0{,}7400... \approx 0{,}740 \end{aligned}$$

c) Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(1 < X \le 4) &= F(4) - F(1) \\ &= 1 - (2^{\frac{1}{3}\cdot 1} - 1) \\ &= 0{,}7400... \approx 0{,}740 \end{aligned}$$

Vastaus
a) 0,587
b) 0,740
c) 0,740

13.2

a) Pinta-ala vastaa lausekkeita

$$P(X \le -\frac{1}{2}) = F(-\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Oikea vaihtoehto on 4.

b) Pinta-ala vastaa lausekkeita

$$P(-1 \le X \le 0) = F(0) - F(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Oikea vaihtoehto on 6.

c) Pinta-ala vastaa lausekkeita

$$P(X \ge 1) = P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Oikeat vaihtoehdot ovat 2 ja 7.

Vastaus
a) 4
b) 6
c) 2 ja 7

13.3

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ \dfrac{4}{(4+x)^2}, & \text{kun } x\geq 0\end{cases}$$

a) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t)=P(X\leq t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x.$

1) Kun $t<0$, niin

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{t} 0\mathbf{d}x=0.$$

2) Kun $t\geq 0$, niin

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathbf{d}x+\int\limits_{0}^{t}\frac{4}{(4+x)^2}\mathbf{d}x$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$=0+1-\frac{4}{t+4}$$
$$=1-\frac{4}{t+4}.$$

Kertymäfunktio on

$$F(t)=\begin{cases} 0, & \text{kun } t<0 \\ 1-\dfrac{4}{t+4}, & \text{kun } t\geq 0 \end{cases}$$

eli

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{kun } x<0 \\ 1-\dfrac{4}{x+4}, & \text{kun } x\geq 0. \end{cases}$$

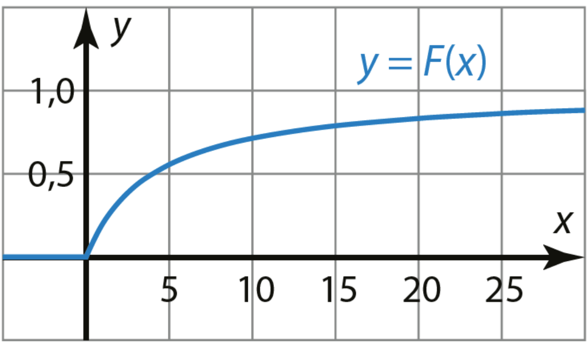
Kertymäfunktio saa aina kaikki arvot väliltä $]0,1[$.

Funktio F saa arvon 0 kaikilla $x<0$.

Funktio F ei saa arvoa 1, sillä $1-\dfrac{4}{\underbrace{x+4}_{>0}}<1$ kaikilla $x\geq 0$.

Siis kertymäfunktion F arvojoukko on $A_F=[0,1[$.

Piirretään kertymäfunktion kuvaaja.



b) $P(1 \leq X < 6) = F(6) - F(1)$

$$= 1 - \frac{4}{6+4} - (1 - \frac{4}{1+4})$$

$$= \frac{2}{5}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \dfrac{4}{x+4}, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$

b) $A_F = [0, 1[$

c) $\frac{2}{5}$

13.4

a) Satunnaismuuttuja X: "nupin etäisyys metreinä maton keskipisteestä".

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \le t)$.

Nupin etäisyys maton keskipisteestä on vähintään 0 m ja korkeintaan 1,2 m. Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 1{,}2$.

Tarkastellaan tilannetta $0 \le t \le 1{,}2$. Tapahtuma "$X \le t$" toteutuu, kun nuppi on t-säteisessä ympyrässä, jonka keskipiste on maton keskipisteessä.

$$P(X \le t) = \frac{\pi \cdot t^2}{\pi \cdot 1{,}2^2} = \frac{t^2}{1{,}44}$$

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \dfrac{t^2}{1{,}44}, & \text{kun } 0 \le t \le 1{,}2 \\ 1, & \text{kun } t > 1{,}2 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1{,}44}, & \text{kun } 0 \le x \le 1{,}2 \\ 1, & \text{kun } x > 1{,}2. \end{cases}$$

b) Nuppi on alle 25 cm:n etäisyydellä maton reunasta, kun sen etäisyys maton keskipisteestä on yli 1,2 m – 0,25 m = 0,95 m.

$$\begin{aligned} P(X > 0{,}95) &= 1 - P(X \leq 0{,}95) \\ &= 1 - F(0{,}95) \\ &= 1 - \frac{0{,}95^2}{1{,}44} \\ &= 0{,}373... \approx 0{,}37 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1{,}44}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1{,}2 \\ 1, & \text{kun } x > 1{,}2 \end{cases}$

b) 0,37

13.5

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $a \sin x \geq 0$ kaikilla $0 \leq x \leq \pi$.
Siten $a \geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 0\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} a \sin x\ \mathbf{d}x + \int\limits_{\pi}^{\infty} 0\ \mathbf{d}x = 1$$

$$\int\limits_{0}^{\pi} a \sin x\ \mathbf{d}x = 1$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = \frac{1}{2}$.

b) $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathbf{d}x$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin x\ \mathbf{d}x + \int\limits_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\ \mathbf{d}x$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin x\ \mathbf{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

c)

$$D(X)=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\ \mathbf{d}x} \qquad \Big|\text{Sijoitetaan } \mu=\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}.$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 0\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sin x\ \mathbf{d}x + \int\limits_{\pi}^{\infty}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 0\ \mathbf{d}x}$$

$$= \sqrt{\int\limits_{0}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\sin x\ \mathbf{d}x}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2-8}{4}} = \frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$$

d) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t)=P(X\le t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x.$

Kun $t<0$, niin

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x = \int\limits_{-\infty}^{t} 0\ \mathbf{d}x = 0.$$

Kun $0 \leq t \leq \pi$, niin

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\, \mathbf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{t} 0\, \mathbf{d}x + \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\sin x\, \mathbf{d}x \\
&= \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\sin x\, \mathbf{d}x \\
&= -\frac{\cos t - 1}{2} = \frac{1-\cos t}{2}.
\end{aligned}
$$

Kun $t > \pi$, niin

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\, \mathbf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, \mathbf{d}x + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\, \mathbf{d}x + \int_{\pi}^{t} 0\, \mathbf{d}x \\
&= 0 + 1 + 0 = 1.
\end{aligned}
$$

Kertymäfunktio on

$$
F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \dfrac{1-\cos t}{2}, & \text{kun } 0 \leq t \leq \pi \\ 1, & \text{kun } t > \pi \end{cases}
$$

eli

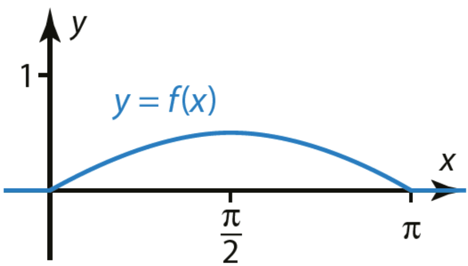
$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & \text{kun } 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \text{kun } x > \pi. \end{cases}
$$

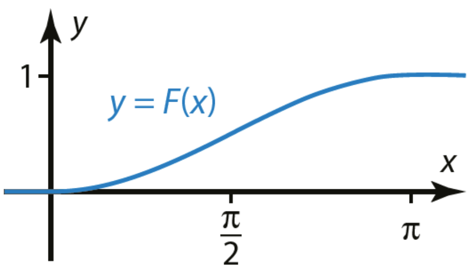
e) Kertymäfunktion F arvojoukko on $A_F = [0, 1]$.

f) Lasketaan tapahtuman "$\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}$" todennäköisyys.

$$P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{4})$$
$$= \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$$

h) Piirretään tiheysfunktion ja kertymäfunktion kuvaajat.





Vastaus

a) $a = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$

d) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1-\cos x}{2}, & \text{kun } 0 \le x \le \pi \\ 1, & \text{kun } x > \pi \end{cases}$

e) $[0, 1]$

f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $(\approx 0{,}354)$

13.6

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ 2x\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{kun } x\ge 0\end{cases}$$

a) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t)=P(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x.$

Kun $t<0$, niin

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x=\int_{-\infty}^{t} 0\ \mathbf{d}x=0.$$

Kun $t\ge 0$, niin

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x\\ &=\int_{-\infty}^{0} 0\ \mathbf{d}x+\int_{0}^{t} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathbf{d}x\\ &=0+\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\cdot\mathrm{e}^{-t^2}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{t^2}-1}{\mathrm{e}^{t^2}}=1-\frac{1}{\mathrm{e}^{t^2}}=1-\mathrm{e}^{-t^2}.\end{aligned}$$

Kertymäfunktio on

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{kun } t<0\\ 1-\mathrm{e}^{-t^2}, & \text{kun } t\ge 0\end{cases}$$

eli

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{kun } x\ge 0.\end{cases}$$

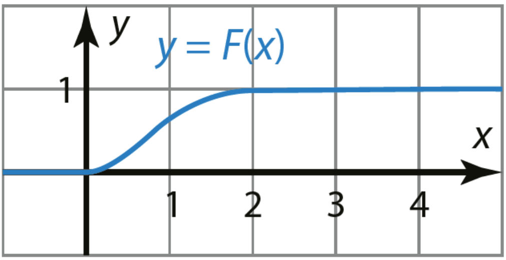
Kertymäfunktio saa aina kaikki arvot väliltä $]0,1[$.

Funktio F saa arvon 0 kaikilla $x < 0$.

Funktio F ei saa arvoa 1, koska $1 - \mathrm{e}^{-x^2} < 1$ kaikilla x.

Siis kertymäfunktion F arvojoukko on $A_F = [0,1[$.

Piirretään kertymäfunktion kuvaaja.



b) $P(-1 \le X < 1)$

$= F(1) - F(-)$

$= 1 - \mathrm{e}^{-1^2} - 0$

$= 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}632$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2}, & \text{kun } x \ge 0 \end{cases}$

arvojoukko $A_F = [0,1[$

b) $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} (\approx 0{,}632)$

13.7

a) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x)=\begin{cases} p, \text{ kun } 0 \le x \le 8 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot 1 ja 2 toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x) \ge 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p \ge 0$.

2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 8 ja korkeus on p.

Ratkaistaan p.

$$\begin{aligned} 8p &= 1 \\ p &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}, \text{ kun } 0 \le x \le 8 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

b) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x.$

Kun $t < 0$, niin $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{t} 0\mathbf{d}x = 0.$

Kun $0 \le t \le 8$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{t} \frac{1}{8}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}t.$$

Kun $t > 8$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{8} \frac{1}{8}\mathrm{d}x + \int_{8}^{t} 0\mathrm{d}x$$
$$= 1.$$

Muodostetaan kertymäfunktio ja vaihdetaan muuttujaksi x.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \le x \le 8 \\ 1, & \text{kun } x > 8 \end{cases}$$

c) Lasketaan todennäköisyydet.

$$P(X < 5) = F(5) = \frac{1}{8} \cdot 5 = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, \text{ kun } 0 \le x \le 8 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{8}x, & \text{kun } 0 \le x \le 8 \\ 1, & \text{kun } x > 8 \end{cases}$

c) $P(X < 5) = \frac{5}{8}$ $(= 0{,}625)$

$P(1 \le X \le 2) = \frac{1}{8}$ $(= 0{,}125)$

13.8

a) Satunnaismuuttuja X: "satunnaiseen aikaan pysäkille saapuvan matkustajan odotusaika minuutteina ennen bussin lähtöä".

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \le t)$.

Odotusaika on vähintään 0 minuuttia ja korkeintaan 12 minuuttia. Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 12$.

Välillä $0 \le t \le 12$ todennäköisyys $P(X \le t) = \frac{t}{12}$.

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \frac{t}{12}, & \text{kun } 0 \le t \le 12 \\ 1, & \text{kun } t > 12 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{x}{12}, & \text{kun } 0 \le x \le 12 \\ 1, & \text{kun } x > 12. \end{cases}$$

b) Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(5 \le X \le 10) &= F(10) - F(5) \\ &= \frac{10}{12} - \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{12} \approx 0{,}42 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{x}{12}, & \text{kun } 0 \le x \le 12 \\ 1, & \text{kun } x > 12. \end{cases}$

b) 0,42

13.9

Olkoon satunnaismuuttuja X: "tauluun osuneen tikan etäisyys reunasta senttimetreinä".

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \leq t)$.

Tikan etäisyys taulun reunasta on vähintään 0 cm
ja enintään 10 cm.

Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 10$.

Tarkastellaan tilannetta $0 \leq t \leq 10$. Tapahtuma "$X \leq t$" toteutuu, kun tikka on renkaassa, jonka ulkosäde on 10 ja sisäsäde on $10 - t$.

$$P(X \leq t) = \frac{\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot (10-t)^2}{\pi \cdot 10^2} = \frac{1}{5}t - \frac{1}{100}t^2$$

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \frac{1}{5}t - \frac{1}{100}t^2, & \text{kun } 0 \leq t \leq 10 \\ 1, & \text{kun } t > 10 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{100}x^2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{kun } x > 10. \end{cases}$$

Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 0$ tai $x > 10$, niin $f(x) = \mathrm{D}0 = \mathrm{D}1 = 0$.

Kun $0 < x < 10$, niin $f(x) = \mathrm{D}(\frac{1}{5}x - \frac{1}{100}x^2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x$.

Arvoilla rajakohdissa $x = 0$ ja $x = 10$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0 \leq x < 10$, voidaan odotusarvon ja keskihajonnan määritelmissä esiintyvät integraalit rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{10} x \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x)\mathrm{d}x \\ &= 3{,}333... \approx 3{,}3 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$D(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x)\mathrm{d}x}$$

$$= \sqrt{\int_{0}^{10} (x-3{,}333...)^2 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{50}x)\mathrm{d}x}$$

$$= 2{,}3570... \approx 2{,}4 \text{ (cm)}$$

Vastaus

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{100}x^2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{kun } x > 10. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$$

$E(X) \approx 3{,}3 \,\text{cm}$

$D(X) \approx 2{,}4 \,\text{cm}$

13.10

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<1\\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}, & \text{kun } 1\le x<3\\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{8}, & \text{kun } 3\le x<7\\ 1, & \text{kun } x\ge 7\end{cases}$$

a) Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(1{,}5\le X\le 5)&=F(5)-F(1{,}5)\\&=\frac{1}{8}\cdot 5+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{4}\cdot 1{,}5-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{5}{8}=0{,}625\end{aligned}$$

b) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned}P(X\ge 5)&=1-P(X<5)\\&=1-F(5)\\&=1-(\frac{1}{8}\cdot 5+\frac{1}{8})\\&=\frac{1}{4}=0{,}250\end{aligned}$$

c) Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(4<X<10)&=F(10)-F(4)\\&=1-(\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{8})\\&=\frac{3}{8}=0{,}375\end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,625

b) 0,250

c) 0,375

13.11

$$f(x) = \begin{cases} kx, \text{ kun } 1 \le x \le 5 \\ 0, \quad \text{muulloin} \end{cases}$$

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $kx \ge 0$ kaikilla $1 \le x \le 5$.
Siten $k \ge 0$.

Määritetään vakio k ehdon 2 avulla.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathbf{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{1} 0\, \mathbf{d}x + \int\limits_{1}^{5} kx\, \mathbf{d}x + \int\limits_{5}^{\infty} 0\, \mathbf{d}x = 1$$

$$\int\limits_{1}^{5} kx\, \mathbf{d}x = 1$$

$$12k = 1$$

$$k = \frac{1}{12}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $k \ge 0$, joten $k = \dfrac{1}{12}$.

b) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathbf{d}x.$

Kun $t < 1$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathbf{d}x = 0.$$

Kun $1 \le t \le 5$, niin

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathbf{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{t} \frac{1}{12}x\,\mathbf{d}x \\ &= \int_{1}^{t} \frac{1}{12}x\,\mathbf{d}x \\ &= \frac{1}{24}t^2 - \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Kun $t > 5$, niin

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathbf{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{5} \frac{1}{12}x\,\mathbf{d}x + \int_{5}^{t} 0\,\mathbf{d}x \\ &= 0 + 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Kertymäfunktio on

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 1 \\ \frac{1}{24}t^2 - \frac{1}{24}, & \text{kun } 1 \le t \le 5 \\ 1, & \text{kun } t > 5 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24}, & \text{kun } 1 \le x \le 5 \\ 1, & \text{kun } x > 5. \end{cases}$$

Vastaus

a) $k = \frac{1}{12}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{24}, & \text{kun } 1 \le x \le 5 \\ 1, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$

13.12

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<1\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$$

a) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t)=P(X\leq t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x.$

1) Kun $t<1$, niin

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{t} 0\mathbf{d}x=0.$$

2) Kun $t\geq 1$, niin

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\mathbf{d}x+\int\limits_{1}^{t}\frac{1}{x^2}\mathbf{d}x$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$=0+1-\frac{1}{t}$$

$$=1-\frac{1}{t}.$$

Kertymäfunktio on

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{kun } t<1\\ 1-\dfrac{1}{t}, & \text{kun } t\geq 1\end{cases}$$

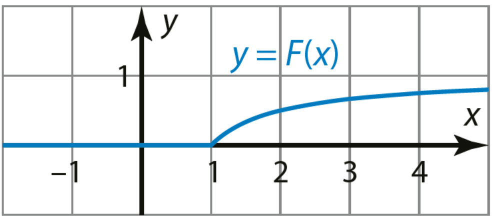
eli

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x}, & \text{kun } x\geq 1.\end{cases}$$

Kertymäfunktio saa aina kaikki arvot väliltä $]0,1[$.
Funktio F saa arvon 0 kaikilla $x<1$.
Funktio F ei saa arvoa 1, sillä $1-\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{>0}<1$ kaikilla $x\geq 1$.

Siis kertymäfunktion F arvojoukko on $A_F=[0,1[$.

Piirretään kertymäfunktion kuvaaja.



b) $P(0<X<6)=F(6)-F(0)$

$$=1-\frac{1}{6}-0$$

$$=\frac{5}{6}\approx 0{,}833$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$

b) $A_F = [0, 1[$

c) $\dfrac{5}{6}$ $(\approx 0{,}833)$

13.13

a) Satunnaismuuttuja X: "ruuvin etäisyys metreinä kentän reunasta".

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \leq t)$.

Ruuvin etäisyys kentän reunasta on vähintään 0 m ja enintään 6,0 m.
Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 6$.

Tarkastellaan tilannetta $0 \leq t \leq 6$. Tapahtuma "$X \leq t$" toteutuu, kun ruuvin on renkaassa, jonka ulkosäde on 6 ja sisäsäde $6 - t$.

$$P(X \leq t) = \frac{\pi \cdot 6^2 - \pi \cdot (6-t)^2}{\pi \cdot 6^2} = \frac{1}{3}t - \frac{1}{36}t^2$$

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{36}t^2, & \text{kun } 0 \leq t \leq 6 \\ 1, & \text{kun } t > 6 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}x^2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 6 \\ 1, & \text{kun } x > 6. \end{cases}$$

b) Ruuvi on lähempänä kentän keskipistettä kuin reunaa, kun sen etäisyys reunasta on yli 3,0 m.

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1-P(X\leq 3) \\ &= 1-F(3) \\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\cdot 3-\frac{1}{36}\cdot 3^2\right) \\ &= \frac{1}{4}=0,25 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{kun } x<0 \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{36}x^2, & \text{kun } 0\leq x\leq 6 \\ 1, & \text{kun } x>6 \end{cases}$

b) 0,25

13.14

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\lambda \underbrace{e^{-\lambda x}}_{>0} \ge 0$ kaikilla $x > 0$.

Siten $\lambda \ge 0$.

Määritetään parametri λ ehdon 2 avulla.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{=0} + \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$

Integraali suppenee, kun $\lambda > 0$.
Lasketaan CAS-laskimella.

$$1 = 1$$

Ehto 2 toteutuu, kun $\lambda > 0$.

b) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x$.

Kun $t \le 0$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{t} 0\ \mathbf{d}x = 0.$$

Kun $t > 0$, niin

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathbf{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathbf{d}x + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\ \mathbf{d}x \\ &= 0 + 1 - e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Kertymäfunktio on

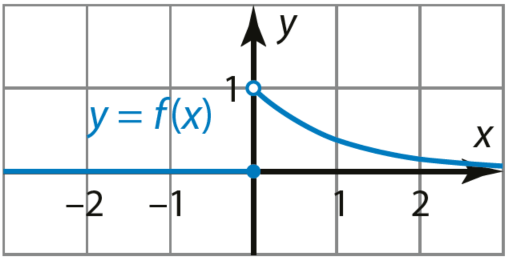
$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{kun } t > 0 \end{cases}$$

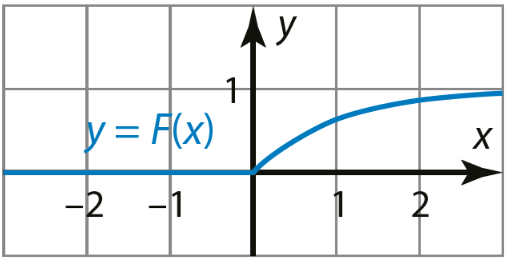
eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

c) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathbf{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\ \mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\ \mathbf{d}x$$
$$= 0 + \frac{1}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

d) Piirretään tiheysfunktion ja kertymäfunktion kuvaajat.





Vastaus

a) $\lambda > 0$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$

c) $\dfrac{1}{\lambda}$

13.15

a) Kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, & \text{kun } 0 \le x < 4 \\ 1, & \text{kun } x \ge 4. \end{cases}$$

Määritetään mediaani a.

$$\begin{aligned} P(X \le a) &= \frac{1}{2} \\ F(a) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}a &= \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

b) Tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}, & \text{kun } \ 0\le x\le \ln 3\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

Määritetään mediaani a.

$$P(X\le a)=\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\frac{3}{2}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$0+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{-a}=\frac{1}{2}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a=\ln\frac{3}{2}$$

Vastaus

a) 2

b) $\ln\frac{3}{2}$

13.16

a) Kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x^2, & \text{kun } 0 \le x < 2 \\ 1, & \text{kun } x \ge 2. \end{cases}$$

Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 0$ tai $x > 2$, niin $f(x) = \mathrm{D}0 = \mathrm{D}1 = 0.$

Kun $0 < x < 2,$ niin $f(x) = \mathrm{D}(\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x^2) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}x$.

Arvoilla rajakohdissa $x = 0$ ja $x = 2$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x, \text{ kun } 0 \le x < 2 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

b) Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{7}{9} + 0 = \frac{7}{9} \approx 0{,}778
\end{aligned}
$$

| Lasketaan CAS-laskimella.

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x, \text{ kun } 0 \leq x < 2 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$

b) $\frac{7}{9}$ $(\approx 0{,}778)$

13.17

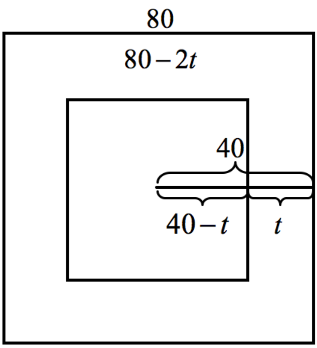
a) Olkoon satunnaismuuttuja X: " sormuksen etäisyys metreinä puiston lähimmästä reunasta ".

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \le t)$.

Sormuksen etäisyys puiston reunasta on vähintään 0 m ja enintään 40,0 m.

Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 40$.

Tarkastellaan tilannetta $0 \le t \le 40$. Tapahtuma "$X \le t$" toteutuu, kun sormus on vyöhykkeessä, jota rajoittaa ulkopuolelta neliö, jonka sivu on 80, ja sisäpuolelta neliö, jonka sivu $80 - 2t$.



$$P(X \le t) = \frac{80^2 - (80 - 2t)^2}{80^2}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= \frac{1}{20}t - \frac{1}{1600}t^2$$

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \frac{1}{20}t - \frac{1}{1600}t^2, & \text{kun } 0 \le t \le 40 \\ 1, & \text{kun } t > 40 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{20}x - \frac{1}{1600}x^2, & \text{kun } 0 \le x \le 40 \\ 1, & \text{kun } x > 40. \end{cases}$$

b) Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 0$ tai $x > 40$, niin $f(x) = \mathrm{D}0 = \mathrm{D}1 = 0$.

Kun $0 < x < 40$, niin $f(x) = \mathrm{D}(\frac{1}{20}x - \frac{1}{1600}x^2) = \frac{1}{20} - \frac{1}{800}x$.

Arvoilla rajakohdissa $x = 0$ ja $x = 10$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} - \frac{1}{800}x, \text{ kun } 0 \le x \le 40 \\ \quad 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

c) Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0 \leq x < 40$, voidaan odotusarvon määritelmässä esiintyvä integraali rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{40} x \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{800}x\right)\mathrm{d}x \\ &= 13{,}333... \approx 13{,}3 \text{ (m)} \end{aligned}$$

d) Lasketaan todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} P(X \geq 35) &= 1 - P(X < 35) \\ &= 1 - F(35) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{20} \cdot 35 - \frac{1}{1600} \cdot 35^2\right) \\ &= \frac{1}{64} \approx 0{,}0156 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{20}x - \frac{1}{1600}x^2, & \text{kun } 0 \leq x \leq 40 \\ 1, & \text{kun } x > 40 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} - \frac{1}{800}x, \text{ kun } 0 \leq x \leq 40 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$

c) 13,3 m

d) 0,0156

13.18

$$F(x)=\begin{cases} e^{2x+a}, & \text{kun } x \le -1 \\ 1, & \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

1° Funktion F tulee toteuttaa ehdot

1) F on jatkuva

2) F on kasvava

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Kun $x < -1$, funktio $F(x) = e^{2x+a}$ on jatkuva ja kasvava.

Lisäksi $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+a} = 0.$

Kun $x > -1$, funktio $F(x) = 1$ on jatkuva ja kasvava.

Lisäksi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

Määritetään vakio a siten, että funktio F on jatkuva myös kohdassa -1.

On oltava $\lim\limits_{x\to-1-} F(x) = \lim\limits_{x\to-1+} F(x) = F(-1)$.

$$\lim_{x\to-1-} F(x) = e^{2\cdot(-1)+a} = e^{a-2}$$

$$\lim_{x\to-1+} F(x) = 1$$

$$F(-1) = e^{2\cdot(-1)+a} = e^{a-2}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} e^{a-2} &= 1 \\ e^{a-2} &= e^0 \\ a-2 &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

2° Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < -1$, niin $f(x) = \mathrm{D}\, e^{2x+a} = 2e^{2x+a}$.

Kun $x > -1$, niin $f(x) = \mathrm{D}1 = 0$.

Arvolla rajakohdassa $x = -1$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{2x+2}, & \text{kun } x \leq -1 \\ 0, & \text{kun } x > -1. \end{cases}$$

Määritetään odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 2e^{2x+2}\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{\infty} x \cdot 0\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2} + 0 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

3° Määritetään todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - F(2) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vastaus

1° $a = 2$

2° $E(X) = -\dfrac{3}{2}$

3° $P(X \geq 2) = 0$

13.19

a) Luku a arvotaan väliltä $]0, 1[$.

Satunnaismuuttujan X arvo on $\frac{1}{a^2}$.

Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \leq t)$.

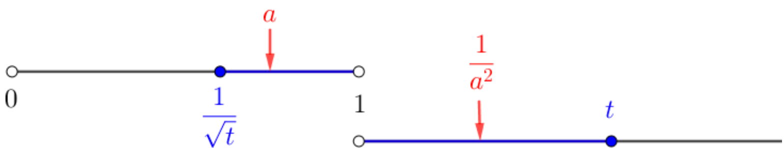
Koska luku a arvotaan väliltä $]0, 1[$, niin $\frac{1}{a^2} > 1$.

Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t \leq 1$.

Tarkastellaan tilannetta $t > 1$. Tapahtuma "$X \leq t$" toteutuu, kun

$$\frac{1}{a^2} \leq t \qquad \Big| \text{ Ratkaistaan CAS-laskimella ehdolla } 0 < a < 1.$$

$$a \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$$



$$P(X \leq t) = P(1 < \frac{1}{a^2} \leq t) = P(\frac{1}{\sqrt{t}} \leq a < 1) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{t}}}{1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Näin ollen $F(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}}$, kun $t > 1$.

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \le 1 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & \text{kun } t > 1 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 1 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

b) Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 1$, niin $f(x) = \mathrm{D}\,0 = 0$.

Kun $x > 1$ niin $f(x) = \mathrm{D}(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

Arvolla rajakohdassa $x = 1$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

c) Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} x\cdot 0\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x \cdot (1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}})\mathrm{d}x \\
&= 0 + \infty = \infty
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^3}}, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$

c) ∞