12.1

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\dfrac{a}{x^2} \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$.

Siten $a \geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^2}\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^2}\,\mathbf{d}x = 1$$

Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$a = 1$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = 1$.

b) Lasketaan tapahtuman "$X < 3$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(X<3) = P(X \leq 3) \\
&= \int_{-\infty}^{3} f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathbf{d}x}_{=0} + \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathbf{d}x \\
&= \frac{2}{3} \approx 0{,}667
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $a = 1$

b) $0{,}667$

12.2

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehto 1 toteutuu kaikilla a, koska $x\mathbf{e}^{ax^2} \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} x\mathbf{e}^{ax^2}\,\mathbf{d}x = 1$$

Jotta integraali suppenee, täytyy olla $a < 0$. Lasketaan integraali CAS-laskimella.

$$-\frac{1}{2a} = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a < 0$, joten $a = -\frac{1}{2}$.

b) Lasketaan tapahtuman "$X > 2$" todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(X > 2) = P(X \geq 2) &= \int_2^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x \\ &= \int_2^{\infty} x\mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathbf{d}x \\ &= \frac{1}{\mathbf{e}^2} \approx 0{,}135 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $a = -\frac{1}{2}$

b) 0,135

12.3

a) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathbf{d}x$

$$= \int_{-\infty}^{1} x\cdot 0\,\mathbf{d}x+\int_{1}^{\infty} x\cdot\frac{3}{x^4}\,\mathbf{d}x$$

$$= \int_{1}^{\infty}\frac{3}{x^3}\,\mathbf{d}x$$

Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$= \frac{3}{2}$$

b)

$$D(X)=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathbf{d}x}$$

Sijoitetaan $\mu=\frac{3}{2}$.

$$=\sqrt{\int_{-\infty}^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot 0\,\mathbf{d}x+\int_{1}^{\infty}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{x^4}\,\mathbf{d}x}$$

$$=\sqrt{\int_{1}^{\infty}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{x^4}\,\mathbf{d}x}$$

Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vastaus

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12.4

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1\,.$

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\frac{a}{\sqrt[4]{x}} \geq 0$ kaikilla $0 < x \leq 1\,.$

Siten $a \geq 0\,.$

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{1} \frac{a}{\sqrt[4]{x}}\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{0}^{1} \frac{a}{\sqrt[4]{x}}\,\mathbf{d}x = 1$$

Lasketaan määrätty integraali CAS-laskimella.

$$\frac{4a}{3} = 1$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = \frac{3}{4}\,.$

b) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathbf{d}x$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{1} x \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt[4]{x}}\ \mathbf{d}x + \int\limits_{1}^{\infty} x \cdot 0\ \mathbf{d}x$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{3x}{4\sqrt[4]{x}}\ \mathbf{d}x = \frac{3}{7}$$

c)

$$D(X) = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\ \mathbf{d}x} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan } \mu = \frac{3}{7}.$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{0} \left(x - \frac{3}{7}\right)^2 \cdot 0\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left(x - \frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\ \mathbf{d}x + \int\limits_{1}^{\infty} \left(x - \frac{3}{7}\right)^2 \cdot 0\ \mathbf{d}x}$$

$$= \sqrt{\int\limits_{0}^{1} \left(x - \frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\ \mathbf{d}x}$$

$$= \sqrt{\frac{48}{539}} = \frac{4\sqrt{33}}{77}$$

Vastaus

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{4\sqrt{33}}{77}$

12.5

a) X: ”satunnaiseen aikaan pysäkille saapuvan henkilön odotusaika ennen bussin lähtöä”

Bussi lähtee 20 minuutin välein, joten odotusaika on välillä $0 \leq X < 20$.

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} p, \text{ kun } 0 \leq x < 20 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot 1 ja 2 toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x) \geq 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p \geq 0$.

2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 20 ja korkeus on p.

Ratkaistaan p.

$$\begin{aligned} 20p &= 1 \\ p &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, \text{ kun } 0 \leq x < 20 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että odotusaika on yli 15 min eli $15-20$ minuuttia.

$$\begin{aligned} P(X>15) &= P(15<X<20) \\ &= \int_{15}^{20} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{15}^{20} \frac{1}{20}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\ &= \frac{1}{4} = 0{,}25 \end{aligned}$$

c) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{20} x\cdot\frac{1}{20}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{20}^{\infty} x\cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} \\ &= \int_{0}^{20} x\cdot\frac{1}{20}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Odotusarvo on 10 minuuttia. Satunnaiseen aikaan pysäkille saapuvan matkustajan keskimääräinen odotusaika lähestyy 10 minuuttia, jos saapumisia on hyvin paljon.

Vastaus

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & \text{kun } 0 \le x < 20\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$

b) 0,25

c) Odotusarvo on 10 minuuttia. Satunnaiseen aikaan pysäkille saapuvan matkustajan keskimääräinen odotusaika lähestyy 10 minuuttia, jos saapumisia on hyvin paljon.

12.6

a) 3

Funktion arvo on 0, kun $x < 0$.
Funktion arvo on 0,2, kun $0 \leq x < 5$.
Funktion arvo on 0, kun $x \geq 5$.

b) 2

Todennäköisyys $P(1 < X < 3)$ on funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $1 < X < 3$ rajaaman alueen pinta-ala.

$$P(1 < X < 3) = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$$

c) 2

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{5} x \cdot 0{,}2\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{5}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= \int_{0}^{5} x \cdot 0{,}2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

12.7

a)

$$P(X>2)=\int_{2}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{2}^{3}(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4})\mathrm{d}x+\underbrace{\int_{3}^{\infty}0\mathrm{d}x}_{=0}$$

$$=\frac{9}{16}$$

b) $$P(\frac{3}{2}\leq X\leq\frac{5}{2})=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}$$

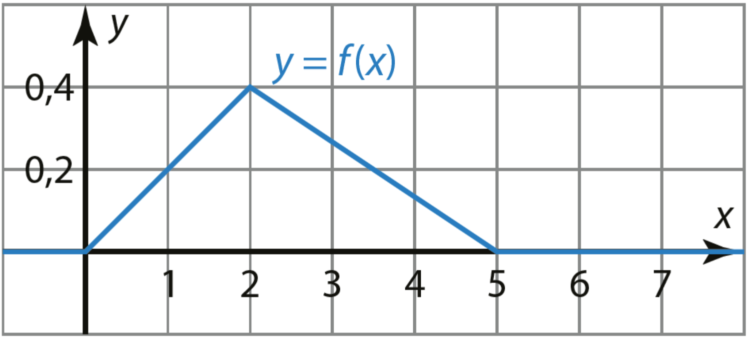
Vastaus

a) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{1}{2}$

12.8

a) Piirretään tiheysfunktion kuvaaja.



b) Lasketaan todennäköisyydet.

$$\begin{aligned}
P(x \leq 1) &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{1} \frac{1}{5}x\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$$P(1 < x \leq 3) = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{5}x\mathrm{d}x + \int_2^3 (-\frac{2}{15}x + \frac{2}{3})\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30}$$

$$P(x > 3) = \int_3^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x + \int_5^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_3^5 (-\frac{2}{15}x + \frac{2}{3})\mathrm{d}x + \underbrace{\int_5^\infty 0\mathrm{d}x}_{=0}$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{4}{15}$$

Vastaus

b) $P(x \leq 1) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$P(1 < x \leq 3) = \frac{19}{30} \approx 0{,}633$

$P(x > 3) = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$

12.9

a) Taulussa jokaisen renkaan leveys on $\frac{20\text{ cm}}{10}=2\text{ cm}$ ja 10-ympyrän säde on 2 cm. Jotta tikka osuisi 9:ään tai 10:een, sen etäisyys keskipisteestä voi olla korkeintaan 4 cm.

Lasketaan todennäköisyys.

$$P(0\le r\le 4)=\int_0^4 \frac{3}{16000}(400-r^2)\mathrm{d}r \quad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$
$$=0{,}296$$
$$\approx 0{,}30$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een.

Kyseessä on toistokoe, jossa on 5 toistoa.
Onnistumisen todennäköisyys on 0,296
ja epäonnistumisen $1-0{,}296=0{,}704$.

$$P(\text{ainakin 3 osuu 9:ään tai 10:een})$$
$$=P(\text{3 tai 4 tai 5 osuu 9:ään tai 10:een})$$
$$=\binom{5}{3}\cdot 0{,}296^3\cdot 0{,}704^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}296^4\cdot 0{,}704^1+\binom{5}{5}\cdot 0{,}296^5\cdot 0{,}704^0$$
$$=0{,}1578...$$
$$\approx 0{,}16$$

Vastaus
a) 0,30
b) 0,16

12.10

a) Koska

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{kun } 0\le x\le 3 \\ 0, & \text{muualla} \end{cases}$$

on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x)\ge 0$ kaikilla $x\in\mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdosta 2 seuraa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{3} (ax+b)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{3}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x}_{=0} = 1$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$\frac{9}{2}a+3b=1$$

Lisäksi odotusarvon tulee olla 1.

$$E(X) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{3} x(ax+b)\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{3}^{\infty} x \cdot 0\mathrm{d}x}_{=0} = 1$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$9a + \frac{1}{2}b = 1$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{9}{2}a + 3b = 1 \\ 9a + \frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Saadaan $a = -\frac{2}{9}$ ja $b = \frac{2}{3}$.

Tarkistetaan, että myös ehto 1 toteutuu.

$$-\frac{2}{9}x + \frac{2}{3} \geq 0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 3$$

Koska välillä $0 \leq x \leq 3$ funktion $f(x)$ arvot ovat epänegatiivisia, ehto 1 toteutuu.

b) Lasketaan todennäköisyys, että satunnaismuuttujan arvo on vähintään 1.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= P(1 \leq X \leq 3) \\
&= \int_1^3 \left(-\frac{2}{9}x + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{9} = 0{,}4444... \approx 0{,}444
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $a = -\frac{2}{9}$ ja $b = \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{9} \approx 0{,}444$

12.11

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\frac{ax}{(x+1)^4} \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$.

Siten $a \geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 0\, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{ax}{(x+1)^4}\, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{ax}{(x+1)^4}\, \mathrm{d}x = 1$$

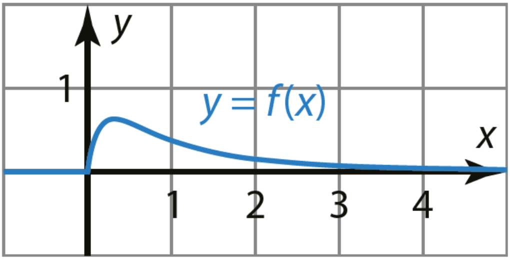
Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$\frac{a}{6} = 1$$

$$a = 6$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = 6$.

b) Piirretään tiheysfunktion kuvaaja.



c) Lasketaan tapahtuman "$X < 5$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(X < 5) &= P(X \leq 5) \\
&= \int_{-\infty}^{5} f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{5} \frac{6x}{(x+1)^4}\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{0}^{5} \frac{6x}{(x+1)^4}\,\mathbf{d}x \\
&= \frac{25}{27} \approx 0{,}926
\end{aligned}
$$

Lasketaan integraali CAS-laskimella.

Lasketaan tapahtuman "$X \geq 1$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{1}^{\infty} \frac{6x}{(x+1)^4}\,\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $a = 6$

c) $P(X < 5) = \frac{25}{27} \approx 0{,}926$

$P(X \geq 1) = \frac{1}{2}$

12.12

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{1}^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\mathrm{e}}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= \int_{1}^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{1}^{\mathrm{e}}\, x \\
&= \mathrm{e} - 1
\end{aligned}
$$

Vastaus

e – 1

12.13

a) Väliltä $[0, 5]$ arvotaan reaaliluku.

Satunnaismuuttujan X: ”arvottu luku” tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \begin{cases} p, \text{ kun } 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Määritetään vakio p niin, että tiheysfunktion määritelmän ehdot 1 ja 2 toteutuvat.

1) Pitää olla $f(x) \geq 0$ kaikilla x. Tämä toteutuu kun $p \geq 0$.

2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Tämä alue on suorakulmio, jonka leveys on 5 ja korkeus on p.

Ratkaistaan p.

$$\begin{aligned} 5p &= 1 \\ p &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, \text{ kun } 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

b) Lasketaan tapahtuman "$X < 1,4$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(X < 1,4) &= P(0 \le X < 1,4) \\
&= \int_0^{1,4} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1,4} \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= 0,28
\end{aligned}
$$

c) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_5^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= 2,5
\end{aligned}
$$

Odotusarvo on 2,5. Arvottujen lukujen keskiarvo lähestyy lukua 2,5, jos arpomisia tehdään hyvin paljon.

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, \text{ kun } 0 \le x \le 5 \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases}$

b) 0,28

c) Odotusarvo on 2,5. Arvottujen lukujen keskiarvo lähestyy lukua 2,5, jos arpomisia tehdään hyvin paljon.

12.14

a) 2

Tiheysfunktion ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1.
Vain kuvaaja 2 toteuttaa tämän ehdon.

b) 3

Todennäköisyys $P(X \leq 2)$ on funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $0 \leq X \leq 2$ rajaaman alueen pinta-ala.

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}25$$

c) 3

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{4} x \cdot \frac{0{,}5}{4} x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{4}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} \\
&= \int_{0}^{5} \frac{1}{8} x^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

12.15

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathbf{d}x = 1$.

Ehto 1 toteutuu, sillä $\left|ax \cdot 2^{-x^2}\right| \geq 0$ kaikilla a.

$$\left|ax \cdot 2^{-x^2}\right| = \begin{cases} -|a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}, \text{kun } x < 0 \\ |a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}, \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} -|a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} |a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

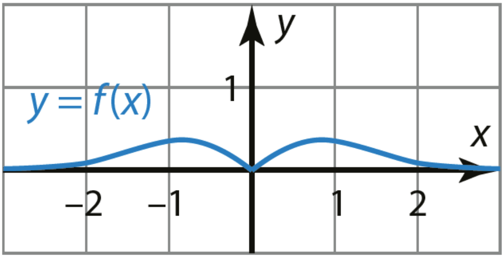
Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$\frac{|a|}{2\ln 2} + \frac{|a|}{2\ln 2} = 1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = \ln 2 \text{ tai } a = -\ln 2$$

b) Piirretään tiheysfunktion kuvaaja.



c) Lasketaan tapahtuman "$|X| < 1$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(|X| < 1) &= P(|X| \leq 1) \\
&= P(-1 \leq X \leq 1) \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} -|a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{1} |a| \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathbf{d}x \qquad |a| = \ln 2 \\
&= \int_{-1}^{0} -\ln 2 \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{1} \ln 2 \cdot x \cdot 2^{-x^2}\,\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $a = \ln 2$ tai $a = -\ln 2$

c) $\frac{1}{2}$

12.16

a) Ilmaistaan funktio ilman itseisarvomerkkejä.

$$f(x) = \left| x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2 \right| = \begin{cases} -x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2, \text{ kun } x < 0 \\ x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2, \quad \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathbf{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} x(-x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2) \, \mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} x(x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2) \, \mathbf{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Lasketaan keskihajonta.

$$\begin{aligned} D(X) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \, \mathbf{d}x} \qquad \left| \text{Sijoitetaan } \mu = 0 \right. \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{0} x^2(-x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2)\mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} x^2(x \cdot 2^{-x^2} \cdot \ln 2)\mathbf{d}x} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\ln 2}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0

b) $\dfrac{1}{\sqrt{\ln 2}}$

12.17

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Määritetään odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathbf{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Vastaus

∞

12.18

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & \text{kun } 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

a) $P(X < 2) = P(X \le 2)$

$$= \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 0{,}70807... \approx 0{,}71$$

b) $P(\frac{\pi}{3} \le X \le \frac{4\pi}{3}) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} 0\,\mathrm{d}x}_{=0}$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 0{,}75$$

Vastaus
a) 0,71
b) 0,75

12.19

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x), & \text{kun } 0\le x\le 1\\ 0, & \text{muulloin.}\end{cases}$$

a) Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0}+\int_{0}^{1} x\cdot\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)\,\mathrm{d}x+\underbrace{\int_{1}^{\infty} x\cdot 0\,\mathrm{d}x}_{=0}\\ &=\frac{\pi-2}{\pi}\end{aligned}$$

b) Lasketaan keskihajonta.

$$\begin{aligned}D(X)&=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x} && \Big|\text{Sijoitetaan } \mu=\frac{\pi-2}{\pi}.\\ &=\sqrt{\int_{0}^{1}(x-\frac{\pi-2}{\pi})^2\cdot\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)\,\mathrm{d}x}\\ &=\frac{2\sqrt{\pi-3}}{\pi}\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\frac{\pi-2}{\pi}$

b) $\frac{2\sqrt{\pi-3}}{\pi}$

12.20

a) Oletetaan, että $a > 0$ ja $f(t) = ae^{-at}$, kun $t \geq 0$.

Tehtävänä on osoittaa, että funktio $f(t)$ toteuttaa ehdon

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = 1,$$

jokaisella parametrin a arvolla.

Lasketaan epäoleellinen integraali.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b a \cdot \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b -1 \cdot (\underbrace{-a}_{s'(t)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{u(s(t))})\mathrm{d}t \quad \text{Yhdistetyn funktion integroimissääntö.} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big/_0^b - \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{U(s(t))} \\
&= \lim_{b\to\infty} (-\mathrm{e}^{-a\cdot b} + \mathrm{e}^{-a\cdot 0}) \\
&= \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{\mathrm{e}^{a\cdot b}} + 1) \\
&= -0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Väite on näin todistettu.

b) Olkoon satunnaismuuttuja X: "peräkkäisten neutriinohavaintojen välinen aika minuutteina".

Tulee olla $P(X \leq 46{,}90) = \frac{1}{2}$.

Määritetään vakio a siten, että tiheysfunktio $f(t)$ kuvaa satunnaismuuttujan X jakaumaa.

$$P(X \leq 46{,}90) = 0{,}5$$

$$\int_0^{46{,}90} f(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}5$$

$$\int_0^{46{,}90} a\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = 0{,}5$$

Yhtälön voi ratkaista myös CAS-laskimella.

$$\Big/_{0}^{46{,}90} -\mathrm{e}^{-at} = 0{,}5$$

$$-\mathrm{e}^{-a\cdot 46{,}90} + e^{a\cdot 0} = 0{,}5$$

$$-\mathrm{e}^{-46{,}90a} + 1 = 0{,}5$$

$$-\mathrm{e}^{-46{,}90a} = 0{,}5$$

$$\mathrm{e}^{-46{,}90a} = 0{,}5$$

$$-46{,}90a = \ln 0{,}5$$

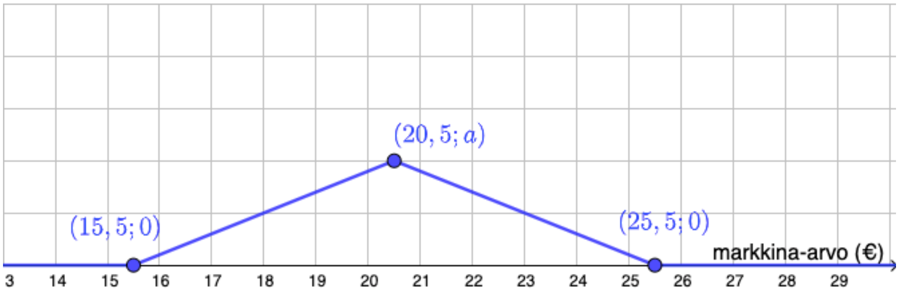
$$a = \frac{\ln 0{,}5}{-46{,}90} \approx 0{,}015$$

Vastaus

b) $a \approx 0{,}015$ (kun aikaa mitataan minuutteina)

12.21

a) Luonnostellaan tiheysfunktion f kuvaaja.



Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 2 mukaan tiheysfunktion f kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Alue on muodoltaan kolmio, jonka korkeus on a ja kanta 10. Ratkaistaan vakio a.

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot a = 1$$
$$a = \frac{1}{5}$$

Välillä [15,5; 20,5] suoran yhtälö on

$$y - 0 = \frac{\frac{1}{5}}{5}(x - 15{,}5)$$
$$y = \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}$$

Välillä [20,5; 25,5] suoran yhtälö on

$$y - 0 = -\frac{\frac{1}{5}}{5}(x - 25{,}5)$$

$$y = -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}$$

Tiheysfunktion lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 15{,}5 \\ \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}, & \text{kun } 15{,}5 < x \le 20{,}5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}, & \text{kun } 20{,}5 < x \le 25{,}5 \\ 0, & \text{kun } x > 25{,}5. \end{cases}$$

b) Lasketaan todennäköisyys, että markkina-arvo on alle 19 €.

$$P(x < 19) = \int_{-\infty}^{19} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{15{,}50}^{19} \left(\frac{1}{25}x - \frac{31}{50}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 0{,}245$$

c) Nyt tiheysfunktion kuvaajaa rajaavat pisteet (15,5; 0), (20,5, b) ja (30,5; 0).

Kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan tulee olla 1. Ratkaistaan vakio b.

$$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot b = 1$$
$$b = \frac{2}{15}$$

Välillä [15,5; 20,5] suoran yhtälö on

$$y-0 = \frac{\frac{2}{15}}{5}(x-15,5)$$
$$y = \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}$$

Välillä [20,5; 30,5] suoran yhtälö on

$$y-0 = -\frac{\frac{2}{15}}{10}(x-30,5)$$
$$y = -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}$$

Tiheysfunktion lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 15,5 \\ \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}, & \text{kun } 15,5 < x \le 20,5 \\ -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}, & \text{kun } 20,5 < x \le 30,5 \\ 0, & \text{kun } x > 30,5. \end{cases}$$

Lasketaan odotusarvo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{15,50}^{30,50} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{15,50}^{20,50} x(\frac{2}{75}x - \frac{31}{75})\,\mathrm{d}x + \int_{20,50}^{30,50} x(-\frac{1}{75}x + \frac{61}{150})\,\mathrm{d}x \\
&= 22{,}1666... \approx 22{,}17
\end{aligned}
$$

Osakkeen markkina-arvon odotusarvo on 22,17 €.

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 15{,}5 \\ \frac{1}{25}x - \frac{31}{50}, & \text{kun } 15{,}5 < x \leq 20{,}5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}, & \text{kun } 20{,}5 < x \leq 25{,}5 \\ 0, & \text{kun } x > 25{,}5. \end{cases}$

b) 0,245

c) 22,17 €