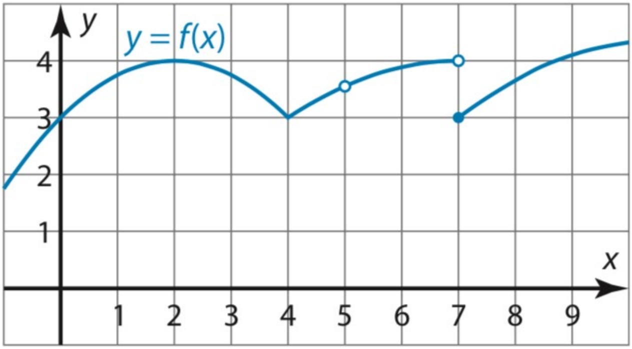
3.1



a) Kohtaan $x = 2$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f on derivoituva kohdassa 2.

b) Kohtaan $x = 3$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f on derivoituva kohdassa 3.

c) Kohdassa $x = 4$ kuvaajassa on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 4.

d) Kohdassa $x = 5$ funktiota ei ole määritelty, joten kohtaan $x = 5$ ei voida piirtää tangenttia.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 5.

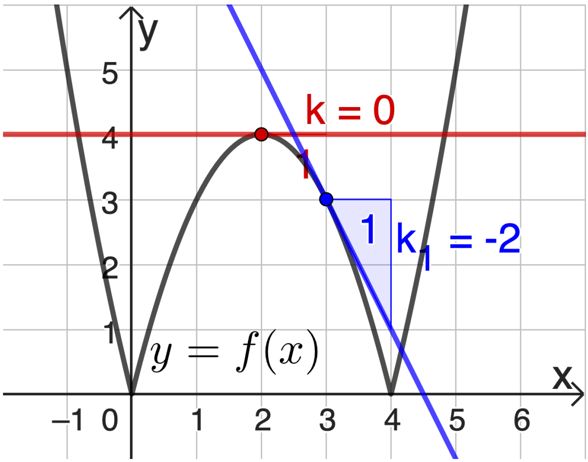
e) Kohdassa $x = 7$ funktio f on epäjatkuva, eikä sen kuvaajalle voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 7.

3.2

Piirretään funktion $f(x) = |x^2 - 4x|$ kuvaaja.

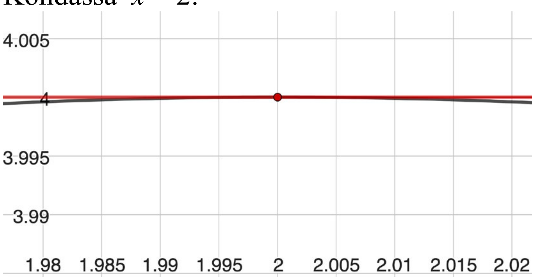
Lisätään kuvaajalle pisteet kohtiin $x = 2$ ja $x = 3$. Piirretään näihin pisteisiin tangentit ja mitataan niiden kulmakertoimet.



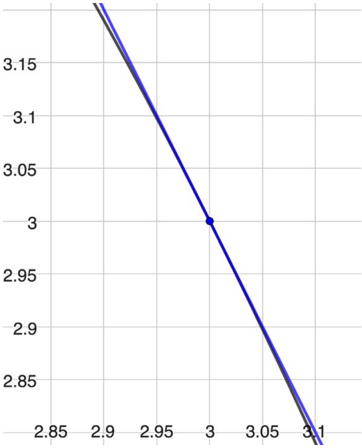
a) $f'(2) \approx 0$ ja $f'(3) \approx -2$

b) Kuvaaja näyttää oikenevan suoraksi viivaksi, joka on kyseiseen kohtaan piirretty tangenttisuora.

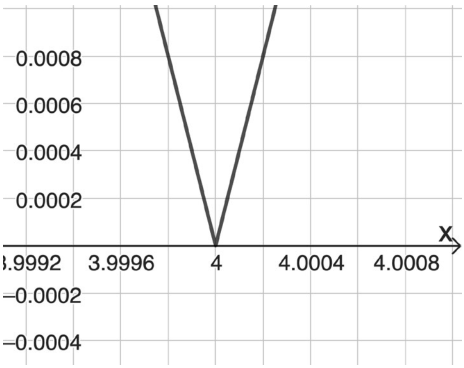
Kohdassa $x = 2$:



Kohdassa $x = 3$:



c) Kuvaajassa on aina terävä kärki.



Huomaa, että kohdissa 2 ja 3 funktio f on derivoituva ja kohdassa 4 funktio f ei ole derivoituva.

3.3

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} && \color{blue}{f(x) = x^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} && \color{blue}{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (6+h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h \to 0} (6+h) \\
&= 6 + 0 = 6
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} && \color{blue}{f(x) = x^2} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} && \color{blue}{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} \\
&= \lim_{x \to 3} (x+3) \\
&= 3 + 3 = 6
\end{aligned}
$$

Vastaus $f'(3) = 6$

3.4

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \qquad f(x)=x^2+3x\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h-(0^2+3\cdot 0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(h+3)}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}(h+3)\\
&= 0+3=3
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad f(x)=x^2+3x\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x-(0^2+3\cdot 0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot(x+3)}{\cancel{x}}\\
&= \lim_{x\to 0}(x+3)\\
&= 0+3=3
\end{aligned}
$$

Vastaus $f'(0)=3$

3.5

Oletetaan, että $-20 \leq g(x) \leq 16$ kaikilla x.

Pitää osoittaa, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Lasketaan funktion f arvo kohdassa 0.

$$f(0) = 0^2 \cdot g(0) = 0$$

Lasketaan funktion f derivaatta kohdassa $x = 0$ derivaatan määritelmää käyttäen.

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} && f(x) = x^2 g(x) \text{ ja } f(0) = 0 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot g(h) - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \cdot g(h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h \to 0} h \cdot g(h)
\end{aligned}$$

Koska $-20 \leq g(x) \leq 16$ ja $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$,

niin $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} h \cdot g(h) = 0$.

On osoitettu, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$.

3.6

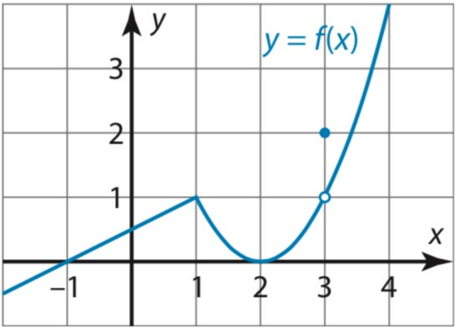
$$f(x) = 2\sqrt{x}$$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt{1}}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} {}^{2\sqrt{x}+2)} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(2\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 2)}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(2\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{4x - 4}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{4 \cdot \cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}\,(2\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{4}{2\sqrt{x} + 2} \\
&= \frac{4}{2 \cdot \sqrt{1} + 2} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Vastaus $f'(1) = 1$

3.7



a) Tosi.

Funktion arvo lähestyy arvoa 1, kun muuttujan x arvo lähestyy lukua 1 kummalta puolelta tahansa.

b) Tosi.

Funktio on jatkuva kohdassa 1, koska $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ ja $f(1) = 1$.

c) Epätosi.

Funktion kuvaajassa on terävä kärki kohdassa $x = 1$, joten siihen ei voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

d) Tosi.

Funktion arvo lähestyy arvoa 0, kun muuttujan x arvo lähestyy lukua 2 kummalta puolelta tahansa.

e) Tosi.

Funktio on jatkuva kohdassa 2, koska $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ ja $f(2) = 0$.

f) Tosi.

Funktion kuvaajalle voidaan piirtää kohtaan $x = 2$ tangentti yksikäsitteisellä tavalla.

g) Tosi.

Funktion arvo lähestyy arvoa 1, kun muuttujan x arvo lähestyy lukua 3 kummalta puolelta tahansa.

h) Epätosi.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 3, koska $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ ja $f(3) = 2$.

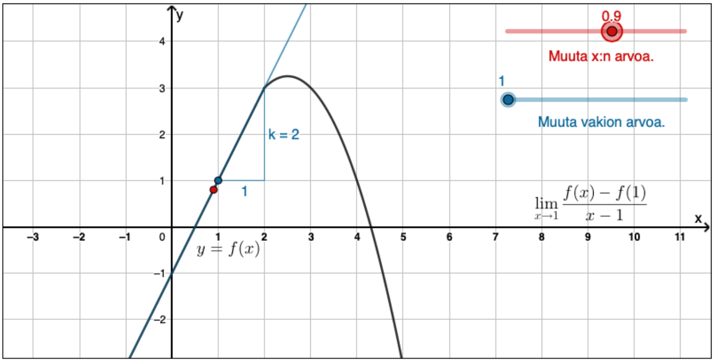
i) Epätosi.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 3, joten se ei ole myöskään derivoituva kohdassa 3.

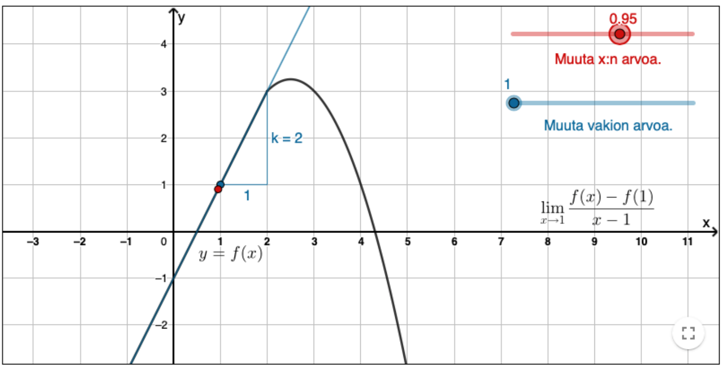
3.8

a) Lauseke $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ on funktion f erotusosamäärä kohdassa 1.
Erotusosamäärän arvo on appletissa näkyvän sekantin kulmakerroin.

Kun $x \to 1-$, niin erotusosamäärän raja-arvo on 2.



Kun $x \to 1+$, niin erotusosamäärän raja-arvo on 2.

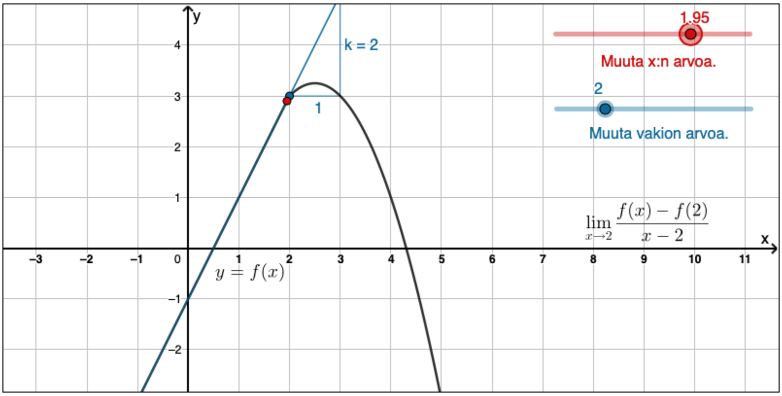


Siten $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$.

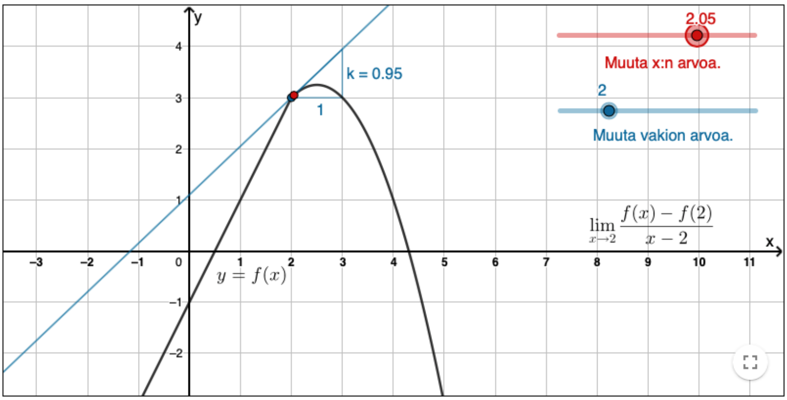
Funktio f on siis derivoituva kohdassa 1 ja derivaatan arvo on 2.

b) Lauseke $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ on funktion f erotusosamäärä kohdassa 2.
Erotusosamäärän arvo on appletissa näkyvän sekantin kulmakerroin.

Kun $x \to 2-$, niin erotusosamäärän raja-arvo on 2.



Kun $x \to 2+$, niin erotusosamäärän raja-arvo on 1.

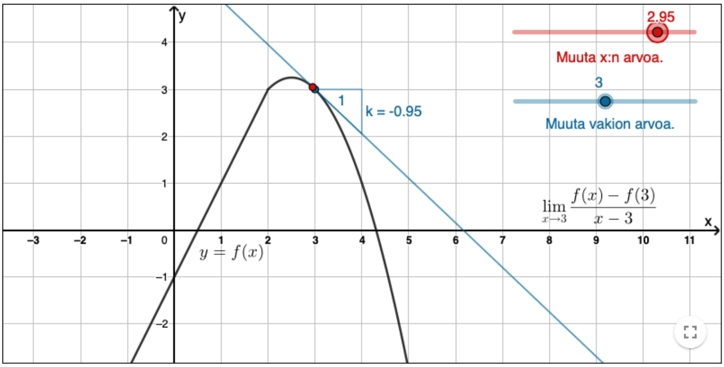


Siten raja-arvoa $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ei ole olemassa.

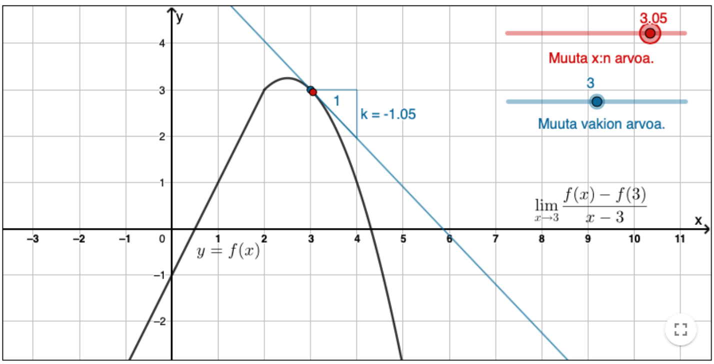
Funktio f ei siis ole derivoituva kohdassa 2.

c) Lauseke $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ on funktion f erotusosamäärä kohdassa 1. Erotusosamäärän arvo on appletissa näkyvän sekantin kulmakerroin.

Kun $x \to 3-$, niin erotusosamäärän raja-arvo on -1.



Kun $x \to 3+$, niin erotusosamäärän raja-arvo on -1.



Siten $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = -1$.

Funktio f on siis derivoituva kohdassa 3 ja derivaatan arvo on -1.

3.9

Derivaatan määritelmä on $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Koska funktiolle f pätee $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 0$,

niin $f'(2) = 0$.

Täten funktio f on derivoituva kohdassa 2 ja derivaatan arvo on 0.

Koska funktio f on derivoituva kohdassa 2, se on myös jatkuva kohdassa 2.

Funktion arvosta kohdassa 2 ei voida päätellä mitään.

3.10

Funktiolla f on seuraavat ominaisuudet.

- $f(x+y)=f(x)+f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y
- f on derivoituva muuttujan arvolla 0

a) Sijoitetaan $x=0$ ja $y=0$ ja ratkaistaan funktion arvo $f(0)$.

$$\begin{aligned}
f(0+0) &= f(0)+f(0) \\
f(0) &= 2\cdot f(0) \qquad \Big| -f(0) \\
0 &= f(0) \\
f(0) &= 0
\end{aligned}$$

Siis $f(0)=0$.

b) Koska funktio f on derivoituva kohdassa 0 ja $f(0)=0$, niin on oltava

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}.$$

Määritetään funktion f derivaatta kohdassa x.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad\qquad f(x+y)=f(x)+f(y) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \\
&= f'(0)
\end{aligned}$$

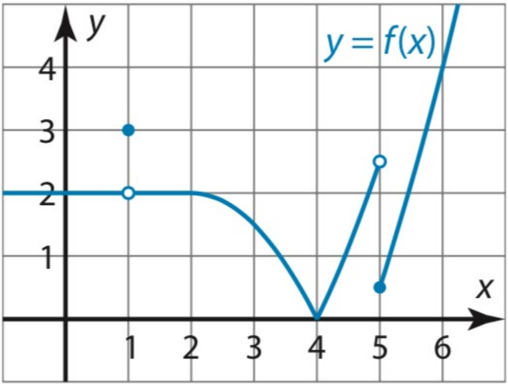
Koska funktio f on derivoituva muuttujan arvolla 0, niin funktio f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x)=f'(0)$. □

c) Esimerkiksi funktio $f(x) = 3x$

- $f(x+y) = 3 \cdot (x+y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$
- Funktio f on derivoituva kaikkialla, joten se on derivoituva erityisesti kohdassa 0.

Huomaa, että esimerkiksi kelpaavat kaikki muotoa $f(x) = kx$ olevat funktiot, koska $k(x+y) = kx + ky$ kaikilla k, x ja y.

3.11



a) Funktio ei ole jatkuva kohdassa 1, koska funktion raja-arvo ja funktion arvo ovat eri suuret:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{ja} \quad f(1) = 3\,.$$

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 5, koska funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 5. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 5, koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret:

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = 2{,}5 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 5+} f(x) = 0{,}5$$

b) Funktio ei ole derivoituva kohdissa 1 ja 5, koska se ei ole jatkuva näissä kohdissa.

Funktio ei ole derivoituva kohdassa 4, koska kyseisessä kohdassa kuvaajassa on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

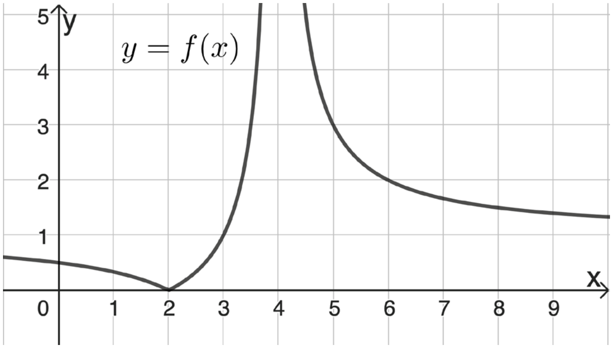
c) Funktio on jatkuva mutta ei derivoituva kohdassa 4.

d) Ei missään kohdassa. Jos funktio on derivoituva, se on aina myös jatkuva.

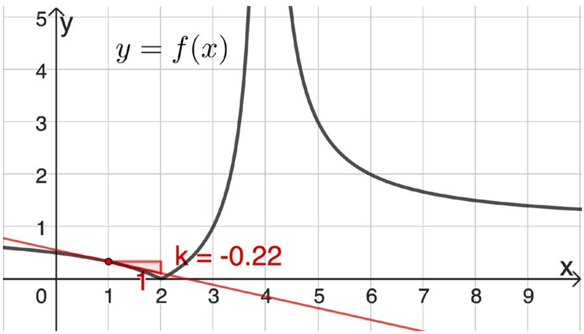
Vastaus
a) kohdissa 1 ja 5
b) kohdissa 1, 4 ja 5
c) kohdassa 4
d) ei missään kohdassa

3.12

Piirretään funktion $f(x)=\left|\dfrac{x-2}{x-4}\right|$ kuvaaja.



a) $f'(1)\approx -0{,}22$

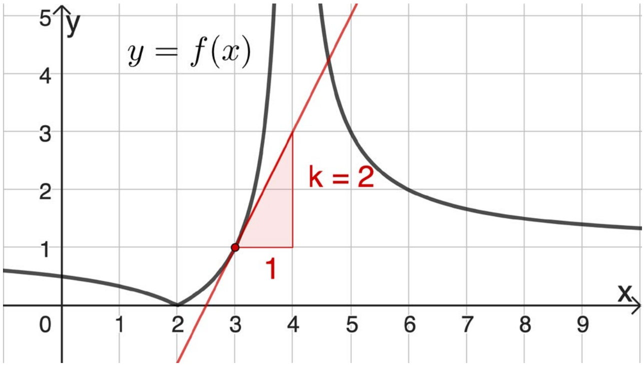


Lisätään kuvaajalle piste (1, f(1)). Piirretään pisteeseen tangentti ja mitataan sen kulmakerroin.

b) Kohdassa $x = 2$ kuvaajassa on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 2.

c) $f'(3) \approx 2$



d) Funktiota f ei ole määritelty kohdassa $x = 4$, joten funktio f ei ole derivoituva kohdassa 4.

Vastaus

a) $f'(1) \approx -0{,}22$

b) ei ole derivoituva

c) $f'(3) \approx 2$

d) ei ole derivoituva

3.13

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad f(x) = \frac{1}{x} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{{}^{2)}\dfrac{1}{2+h} - {}^{2+h)}\dfrac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\left(\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)} \right) \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{2-2-h}{2(2+h)} \cdot \frac{1}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\overset{-1}{\cancel{-h}}}{2(2+h)} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} \\
&= \frac{-1}{2 \cdot (2+0)} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{{}^{2)}\frac{1}{x} - {}^{x)}\frac{1}{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\left(\frac{2}{2x} - \frac{x}{2x}\right) \cdot \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{2 - x}{2x} \cdot \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{-\cancel{(x - 2)}}{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{x - 2}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

Vastaus $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

3.14

a) Laksetaan funktion $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x=0$.

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \qquad \color{blue}{f(x)=\frac{x}{1+|x|}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{1+|h|}-\dfrac{0}{1+|0|}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{1+|h|}\cdot\frac{1}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{1+|h|}\\
&= \frac{1}{1+|0|}=1
\end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio f on derivoituva kohdassa $x=0$. $\square$

b) Kun $x < 0$, niin $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{x}{1-x}$ ja

$$g(x) = f'(x) = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Kun $x > 0$, niin $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{x}{1+x}$ ja

$$g(x) = f'(x) = \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Kun $x = 0$, niin $g(0) = f'(0) = 1$.

Funktion g lauseke vaihtuu kohdassa $x = 0$. Lasketaan erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot.

Lasketaan vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Kun $x < 0$, niin $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{\dfrac{1}{(1-x)^2} - 1}{x}$$

Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{-(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-(0-2)}{(0-1)^2} = 2$$

Lasketaan oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Kun $x > 0$, niin $g(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{\dfrac{1}{(1+x)^2} - 1}{x}$$

Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{-(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(0+2)}{(0+1)^2} = -2$$

Koska erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$. Siten funktio g ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

On osoitettu, että funktio g ei ole derivoituva origossa. $\square$

3.15

Funktiolla f on seuraavat ominaisuudet.

- $f(x+y)=f(x)f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y
- $f(0)=1$
- f on derivoituva muuttujan arvolla 0

Pitää osoittaa, että $f'(x)$ on olemassa kaikilla x, ja että $f'(x)=f(x)f'(0)$.

Koska funktio f on derivoituva kohdassa 0, niin on olemassa

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

Määritetään funktion f derivaatta kohdassa x.

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && f(x+y)=f(x)f(y)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h}\right) && f(0)=1\\
&=\lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&=f(x)\cdot f'(0)
\end{aligned}$$

Koska funktio f on derivoituva muuttujan arvolla 0, niin funktio f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x)=f(x)f'(0)$. $\square$

Esimerkiksi funktio $f(x)=\mathrm{e}^x$ toteuttaa ehdot.

- $f(x+y)=\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=f(x)f(y)$
- f on derivoituva kaikkialla
- $f'(x)=\mathrm{e}^x$ ja $f'(0)=\mathrm{e}^0=1$, joten $f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$

Myös esimerkiksi funktio $f(x)=1$ toteuttaa ehdot.

- $f(x+y)=1=1\cdot 1=f(x)f(y)$
- f on derivoituva kaikkialla
- $f'(x)=0$ ja $f'(0)=0$, joten $f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$

3.16

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \qquad f(x)=x|x|\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|h|-0\cdot|0|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot|h|}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}|h|\\
&= |0| = 0
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad f(x)=x|x|\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|-0\cdot|0|}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot|x|}{\cancel{x}}\\
&= \lim_{x\to 0}|x|\\
&= |0| = 0
\end{aligned}
$$

Vastaus $f'(0)=0$

3.17

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f(x)=\sqrt{x}$$

$$\sqrt{a+h}+\sqrt{a})$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+0}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Koska $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ kaikilla $a>0$, niin $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x>0$.

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x - a}}{\cancel{(x - a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Koska $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ kaikilla $a > 0$, niin $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$.

Vastaus

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$

3.18

Koska funktio f on derivoituva eräällä nollan sisältävällä välillä, myös funktio $g(x)=x^2 f(x)$ on derivoituva eräällä nollan sisältävällä välillä.

Tällöin $g'(x)=\mathrm{D}(x^2 f(x))=2x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$ tällä välillä.

Koska derivaattafunktio f' on jatkuva kohdassa 0, niin sekä

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ että $f'(0)$ ovat olemassa ja $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$.

Määritetään funktion g' derivaatta kohdassa 0 erotusosamäärän raja-arvona.

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
g''(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g'(0+h)-g'(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2h\cdot f(h)+h^2\cdot f'(h))-(2\cdot 0\cdot f(0)-0^2\cdot f'(0))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h\cdot f(h)+h^2\cdot f'(h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2\cdot f(h)+h\cdot f'(h)}{\cancel{h}}\\
&= 2\cdot f(0)+0\cdot f'(0)\\
&= 2f(0)
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$$
\begin{aligned}
g''(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)) - (2 \cdot 0 \cdot f(0) - 0^2 \cdot f'(0))}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot (2 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)}{\cancel{x}} \\
&= 2 \cdot f(0) + 0 \cdot f'(0) \\
&= 2f(0)
\end{aligned}
$$

Siis $g''(0) = 0$.

Vastaus

$g''(0) = 0$

3.19

Oletetaan, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja että $f(a) = f(b)$.

Pitää osoittaa, että välillä $]a, b[$ on sellainen luku c, että $f'(c) = 0$.

Jos funktio f on vakio koko välillä $[a, b]$, niin sen derivaatta on nolla koko välillä $]a, b[$. Silloin mikä tahansa piste kelpaa pisteeksi c.

Oletetaan, että funktio f ei ole vakiofunktio.

1) Oletetaan ensin, että funktio f saa välillä $]a, b[$ suurempia arvoja kuin päätepisteissä.

Koska jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä $[a, b]$ aina suurin ja pienin arvo, niin välillä $]a, b[$ on olemassa kohta c, jossa funktio f saa suurimman arvonsa. Tällöin $f(x) \leq f(c)$ eli $f(x) - f(c) \leq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Oletuksen mukaan funktio f on derivoituva kohdassa c. Tutkitaan erotusosamäärän $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ toispuolisia raja-arvoja.

Kun $x < c$, niin $x - c < 0$.

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ koska } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ ja } x - c < 0.$$

Kun $x > c$, niin $x - c > 0$.

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \text{ koska } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ ja } x - c > 0.$$

Koska funktio f on derivoituva kohdassa c, erotusosamäärän raja-arvon tulee olla määritelty kohdassa c. Siten toispuolisten raja-arvojen tulee olla yhtä suuret. Tällöin on välttämättä oltava
$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=0$, mikä tarkoittaa, että $f'(c)=0$.

On osoitettu, että jos funktio f saa välillä $]a, b[$ suurempia arvoja kuin päätepisteissä, niin on olemassa kohta c, jossa $f'(c)=0$.

2) Oletetaan seuraavaksi, että funktio f saa välillä $]a, b[$ pienempiä arvoja kuin päätepisteissä.

Koska jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä $[a, b]$ aina suurin ja pienin arvo, niin välillä $]a, b[$ on olemassa kohta c, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa. Tällöin $f(x)\geq f(c)$ eli $f(x)-f(c)\geq 0$ kaikilla $x\in[a,b]$.

Oletuksen mukaan funktio f on derivoituva kohdassa c. Tutkitaan erotusosamäärän $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ toispuolisia raja-arvoja.

Kun $x<c$, niin $x-c<0$.

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0,\ \text{koska}\ \ f(x)-f(c)\geq 0\ \ \text{ja}\ \ x-c<0.$$

Kun $x>c$, niin $x-c>0$.

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0,\ \text{koska}\ \ f(x)-f(c)\geq 0\ \ \text{ja}\ \ x-c>0.$$

Koska funktio f on derivoituva kohdassa c, erotusosamäärän raja-arvon tulee olla määritelty kohdassa c. Siten toispuolisten raja-arvojen tulee olla yhtä suuret. Tällöin on välttämättä oltava
$\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$, mikä tarkoittaa, että $f'(c) = 0$.

On osoitettu, että jos funktio f saa välillä $]a, b[$ pienempiä arvoja kuin päätepisteissä, niin on olemassa kohta c, jossa $f'(c) = 0$.

Edellisten kohtien perusteella Rollen lause on todistettu. □

3.20

Funktio $f(x) = 2^x - x^2$ on jatkuva kaikkialla, joten se on erityisesti jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$.

Funktio $f(x) = 2^x - x^2$ on derivoituva kaikkialla, joten se on erityisesti derivoituva avoimella välillä $]0, 1[$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(0) = 2^0 - 0^2 = 1$$

$$f(1) = 2^1 - 1^2 = 1$$

Funktion arvot välin $[0, 1]$ päätepisteissä ovat yhtä suuret.

Koska tehtävässä 3.19 esitetyn Rollen lauseen ehdot ovat voimassa, niin lauseen nojalla välillä $]0, 1[$ on (ainakin yksi) sellainen luku c, että $f'(c) = 0$.

On osoitettu, että välillä $]0, 1[$ on kohta, jossa funktion f derivaatta on nolla. $\square$

3.21

a) Funktio $f(x) = x^3 - x + 2$ on polunomifunktio, ja siksi se on jatkuva välillä $[-1, 2]$ ja derivoituva välillä $]-1, 2[$.

Väliarvolauseen mukaan välillä $]-1, 2[$ on sellainen luku c, että

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \\ &= \frac{f(2) - f(-1)}{3}. \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä.

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = 2$$
$$f(2) = 2^3 - 2 + 2 = 8$$

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Funktion f derivaatta kohdassa c on $f'(c) = 3c^2 - 1$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan c.

$$\frac{f(2) - f(-1)}{3} = 3c^2 - 1$$

$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{3}$ ja

$f'(c) = c^2 - 1$

$$\frac{8 - 2}{3} = 3c^2 - 1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$c = -1$ tai $c = 1$

Ratkaisuista vain $c = 1$ kuuluu välille $]-1, 2[$.

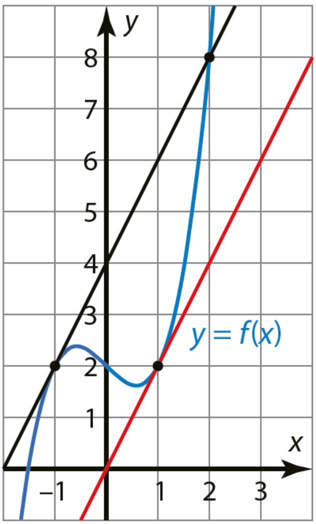
Siis väliarvolauseen yhtälö toteutuu, kun $c = 1$.

b) Yhtälön $f'(1) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$

- oikea puoli on pisteitä $(-1, f(-1))$ ja $(2, f(2))$ eli pisteitä $(-1, 2)$ ja $(2, 8)$ yhdistävän suoran kulmakerroin
- vasen puoli on kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Yhtälö tarkoittaa sitä, että välin päätepisteitä $(-1, 2)$ ja $(2, 8)$ yhdistävä suora ja kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti ovat yhdensuuntaiset.

Piirretään funktion f kuvaaja, pisteiden $(-1, 2)$ ja $(2, 8)$ kulkeva suora sekä funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.



3.22

Oletetaan, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

Pitää osoittaa, että välillä $]a, b[$ on sellainen luku c, että
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funktion f kuvaajan pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan sekanttisuoran yhtälö on

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad\qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tutkitaan funktiota g, joka ilmaisee kohdassa x funktion f kuvaajalla olevan pisteen ja sekanttisuoran pisteen y-koordinaattien erotuksen.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin myös funktio g on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

Lasketaan funktion g arvot välin päätepisteissä.

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a)$$
$$= 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 0$$
$$= 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{(b-a)}$$
$$= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a))$$
$$= f(b) - f(a) - f(b) + f(a)$$
$$= 0$$

Koska tehtävässä 3.19 todistetun Rollen lauseen ehdot ovat voimassa funktiolle g, Rollen lauseen nojalla välillä $]a, b[$ on sellainen luku c, että $g'(c) = 0$.

Funktion $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ derivaattafunktio on

$$g'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$$
$$= f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$

Koska $g'(c) = 0$, niin

$$f'(c) - \frac{f(a)-f(b)}{b-a} = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}.$$

On osoitettu, että välillä $]a, b[$ on sellainen luku c, että

$$f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}. \quad \square$$

3.23

Sovelletaan tehtävässä 3.21 esitettyä differentiaalilaskennan väliarvolausetta.

Koska funktio f on derivoituva, se on myös jatkuva. Näin ollen differentiaalilaskennan väliarvolauseen oletukset toteutuvat.

Olkoon luvut a ja b reaaliluvut niin, että $a < b$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen perusteella välillä $]a, b[$ on sellainen luku c, että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Koska $f'(x) = 0$ kaikilla x, niin myös $f'(c) = 0$.

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0 && \big| \cdot (b - a) \neq 0 \\
f(b) - f(a) &= 0 && \big| + f(a) \\
f(b) &= f(a)
\end{aligned}$$

Koska funktion f arvot mielivaltaisissa kohdissa a ja b ovat yhtä suuret, funktio f on vakiofunktio.

Väite on näin todistettu. □