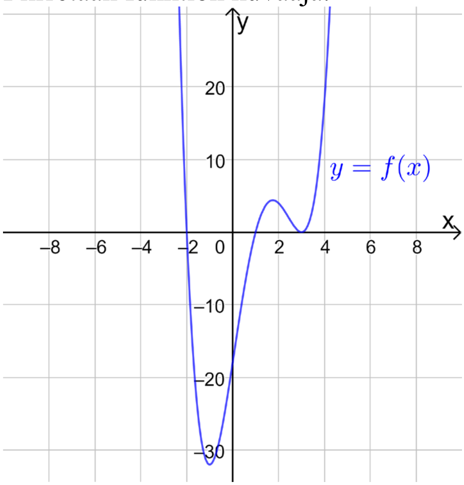
9.1

$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$

Piirretään funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella funktiolla on pienin arvo kohdassa -1, ja suurinta arvoa ei ole.

Perustellaan havainnot laskemalla.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.
Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x + 21$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 15x^2 + 2x + 21 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = -1 \text{ tai } x = \frac{7}{4} \text{ tai } x = 3$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Määritetään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x + 21 && \\
&f'(-2) = -75 < 0 && - \\
&f'(0) = 21 > 0 && + \\
&f'(2) = -3 < 0 && - \\
&f'(4) = 45 > 0 && +
\end{aligned}
$$

		-1		$\frac{7}{4}$		3	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗
		min		max		min	

Kulkukaavion perusteella funktion f pienin arvo saavutetaan kohdassa -1 tai kohdassa 3.

Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$f(-1) = -32$ pienin

$f(3) = 0$

Funktion f pienin arvo on -32.

Määritetään laskimella funktion raja-arvo äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^4 - 5x^2 + 21x - 18\right) = \infty$$

Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, niin funktio saa mielivaltaisen suuria arvoja, ja sillä ei ole suurinta arvoa.

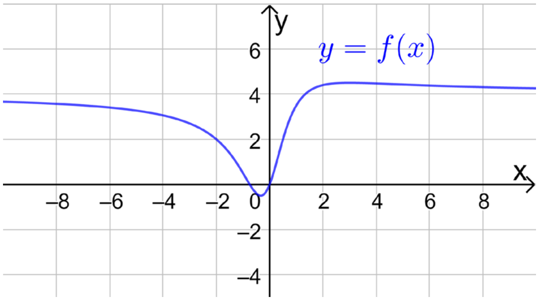
Vastaus

pienin arvo -32, suurinta arvoa ei ole

9.2

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x}{x^2 + 1}$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella funktiolla näyttäisi olevan pienin ja suurin arvo.

Perustellaan havainnot laskemalla.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x + 3}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-3x^2 + 8x + 3}{\left(x^2 + 1\right)^2} = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ tai } x = 3$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva, ja sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.

$$f'(x) = \frac{-3x^2+8x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(-1) = -2 < 0$ $\quad -$

$f'(0) = 3 > 0$ $\quad +$

$f'(4) \approx -0{,}045 < 0$ $\quad -$

		$-\frac{1}{3}$		3	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘
		min		max	

Kulkukaavion perusteella funktion f pienin arvo saavutetaan kohdassa $-\frac{1}{3}$ ellei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < f(-\frac{1}{3})$.

$$f(-\tfrac{1}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x}{x^2+1} = 4 > -\frac{1}{2}$$

Funktion f pienin arvo on $-\frac{1}{2}$.

Kulkukaavion perusteella funktion f suurin arvo saavutetaan kohdassa 3 ellei $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) > f(3)$.

$$f(3) = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+3x}{x^2+1} = 4 < \frac{9}{2}$$

Funktion f suurin arvo on $\frac{9}{2}$.

Vastaus suurin arvo $\frac{9}{2} (= 4\frac{1}{2})$, pienin arvo $-\frac{1}{2}$

9.3

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

Funktio f on määritelty, kun $x-2\neq 0$ eli kun $x\neq 2$.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x-2}=\frac{-2+1}{-2-2}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$

Funktion raja-arvo kohdassa -2 on $\frac{1}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\frac{2+1}{2-2}=\frac{3}{0}$

Koska osoittajan raja-arvo on $3\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

Päätellään funktion $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ toispuoliset raja-arvot kohdassa 2.

Kohdan 2 vasemmalla puolella funktion f lausekkeen osoittajan arvo on positiivinen ja nimittäjän arvo negatiivinen.

Siis $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\frac{\overbrace{x+1}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{<0}}=-\infty$.

Kohdan 2 oikealla puolella funktion f lausekkeen osoittajan arvo on positiivinen ja myös nimittäjän arvo positiivinen.

Siis $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \dfrac{\overbrace{x+1}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = \infty$.

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 2 ovat eri merkkiset, funktiolla f ei ole kohdassa 2 myöskään epäoleellista raja-arvoa.

Vastaus

a) raja-arvo $\lim_{x \to -2} f(x) = \dfrac{1}{4}$

b) ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa

9.4

$$f(x)=\frac{1-x}{(x+3)^2}$$

Funktio f on määritelty, kun $(x+3)^2 \neq 0$ eli kun $x \neq -3$.

a) Lasketaan raja-arvo raja-arvo kohdassa 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x+3)^2}=\frac{1-1}{(1+3)^2}=\frac{0}{16}=0$$

Funktion raja-arvo kohdassa 1 on 0.

b) Lasketaan raja-arvo raja-arvo kohdassa -3.

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{1-x}{(x+3)^2} = \frac{1-(-3)}{(-3+3)^2} = \frac{4}{0}$$

Koska osoittaja ≠ 0 ja nimittäjä = 0, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa -3.

Lasketaan toispuoleiset raja-arvot kohdassa -3.

$$\lim_{x\to-3-} f(x) = \lim_{x\to-3-} \frac{\overbrace{1-x}^{>0}}{\underbrace{(x+3)^2}_{>0}} = \infty \qquad \text{ja}$$

$$\lim_{x\to-3+} f(x) = \lim_{x\to-3+} \frac{\overbrace{1-x}^{>0}}{\underbrace{(x+3)^2}_{>0}} = \infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa -3 ovat samanmerkkiset, niin funktiolla f on kohdassa -3 epäoleellinen raja-arvo ∞.

Vastaus

a) $\lim_{x\to1} f(x) = 0$

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$

9.5

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Funktio f on määritelty, kun $x+1 \neq 0$ eli kun $x \neq -1$.
Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0$$
$$x = -2 \text{ tai } x = 0$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi muuttua vain nollakohdissa $x = -2$ ja $x = 0$ sekä kohdassa $x = -1$. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$f'(-3) = 0{,}75 > 0$ $\quad +$

$f'(-1{,}5) = -3 < 0$ $\quad -$

$f'(-0{,}5) = -3 < 0$ $\quad -$

$f'(1) = 0{,}75 > 0$ $\quad +$

	-5		-2		-1		0		3
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
	min		max		ei määr.		min		max

Lasketaan funktion $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ääriarvot.

Minimiarvot:

$f(-5)=-\dfrac{25}{4}$

$f(0)=0$

Maksimiarvot:

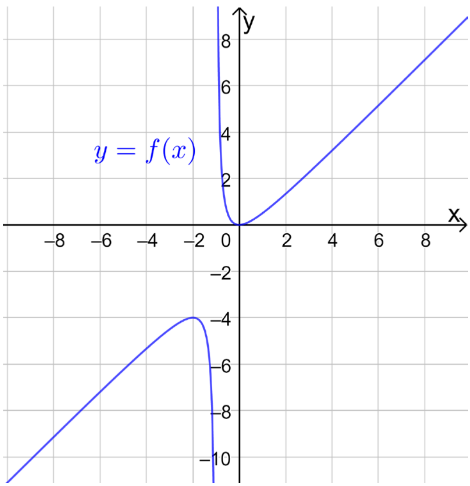
$f(-2)=-4$

$f(3)=\dfrac{9}{4}$

Tutkitaan funktion $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ käyttäytymistä kohdan -1 lähellä.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{0} \text{ (ei määritelty)}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $1\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa -1.



Kuvaajan perusteella epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot ovat

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty.$$

Funktio $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva.

Kun $x < -1$, funktio saa arvot väliltä $]-\infty, -4]$.
Kun $x > -1$, funktio saa arvot väliltä $[0, \infty[$.

Vastaus
kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -4]$ ja $[0, \infty[$

9.6

$$f(x)=\frac{8x}{x^2+4}$$

Koska $x^2+4>0$ aina, funktio f on määritelty kaikilla x.

Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x)=\frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}\,.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x)&=0 \\ \frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}&=0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x=-2 \ \text{ tai } \ x&=2 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa –2 ja 2. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x)=\frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2}$$

$f'(-3)=-0{,}23<0$ $\quad -$

$f'(0)=2>0$ $\quad +$

$f'(3)=-0{,}23<0$ $\quad -$

		-2		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Funktion f minimarvo on $f(-2)=\dfrac{8\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-2$ ja

maksimiarvo $f(2)=\dfrac{8\cdot 2}{2^2+4}=2\,.$

Lasketaan funktion f raja-arvot äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0$$

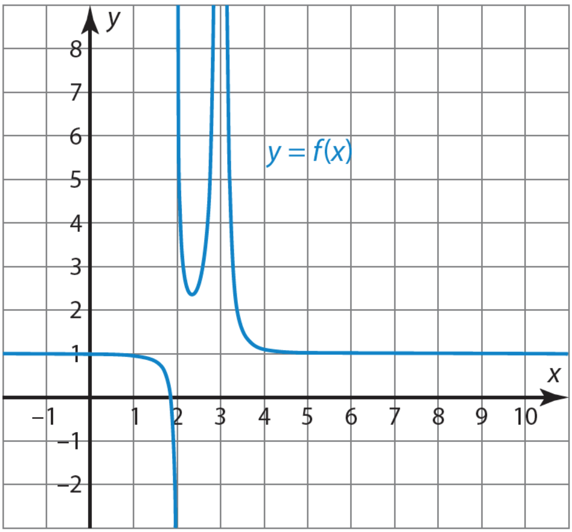
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0$$

Koska $f(-2) < \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < f(2)$ ja $f(-2) < \lim\limits_{x\to\infty} f(x) < f(2)$, niin kulkukaavion perusteella funktion f pienin arvo on $f(-2) = -2$ ja suurin arvo $f(2) = 2$. Koska funktio f on jatkuva, se saa myös kaikki arvot pienimmän ja suurimman arvonsa väliltä.

Funktio f arvojoukko on suljettu väli [–2, 2].

Vastaus
[–2, 2]

9.7



a) Kohdassa $x = 1$ funktio on jatkuva. Siis funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = 1$. Oikea vastaus on **1**.

b) Kohdassa $x = 2$ funktio ei ole määritelty ja sillä on toispuoliset epäoleelliset raja-arvot. Koska epäoleelliset raja-arvot ovat eri merkkiset, funktiolla f ei ole kohdassa $x = 2$ raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa. Oikea vastaus on **3**.

c) Kohdassa $x = 3$ funktio ei ole määritelty ja sillä on toispuoliset epäoleelliset raja-arvot. Koska epäoleelliset raja-arvot ovat saman merkkiset, funktiolla f ei ole kohdassa $x = 3$ raja-arvoa, mutta sillä on epäoleellinen raja-arvo. Oikea vastaus on **2**.

Vastaus

a) 1 b) 3 c) 2

9.8

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$$

Koska $x^2 + 1 > 0$ aina, funktio f on määritelty kaikilla x.

Derivoidaan funktio f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{D(3x^2 + 4x) \cdot (x^2 + 1) - (3x^2 + 4x) \cdot D(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(6x + 4) \cdot (x^2 + 1) - (3x^2 + 4x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{6x^3 + 6x + 4x^2 + 4 - 6x^3 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} = 0 \qquad \Big| \cdot (x^2 + 1)^2 \ (\neq 0)$$

$$-4x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{-8} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8}$$

$$= \frac{-6 \pm 10}{-8}$$

$$x = \frac{-6 - 10}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 + 10}{-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva ja voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa $-\frac{1}{2}$ ja 2. Määritetään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-1) = -3 < 0 \qquad -$$

$$f'(0) = 4 > 0 \qquad +$$

$$f'(3) = -1{,}4 < 0 \qquad -$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & & -\frac{1}{2} & 2 \\ \hline f'(x) & - & + & - \\ \hline f(x) & \searrow & \nearrow & \searrow \\ \hline & & \text{min} & \text{max} \end{array}$$

Kulkukaavion perusteella funktion f

minimiarvo on $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{3(-\frac{1}{2})^2 + 4\cdot(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})^2 + 1} = -1$ ja

maksimiarvo $f(2) = \dfrac{3\cdot 2^2 + 4\cdot 2}{2^2+1} = 4$.

Määritetään funktion f raja-arvo äärettömuudessä ja miinus-äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+4x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(3+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

Koska $-1 < \lim_{x\to-\infty} f(x) < 4$ ja $-1 < \lim_{x\to\infty} f(x) < 4$, niin kulkukaavion perusteella funktion f pienin arvo on -1 ja suurin arvo 4.

Vastaus

suurin arvo 4, pienin arvo -1

9.9

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$

Koska $x^2 + 1 > 0$ aina, funktio f on määritelty kaikilla $-2 \le x \le 4$.

Derivoidaan funktio f.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{D(3x^2 + 4x)\cdot(x^2+1) - (3x^2+4x)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(6x+4)\cdot(x^2+1) - (3x^2+4x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{6x^3 + 6x + 4x^2 + 4 - 6x^3 - 8x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} &= 0 \qquad \Big| \cdot (x^2+1)^2 \ (\neq 0) \\
-4x^2 + 6x + 4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-4)\cdot 4}}{2\cdot(-4)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{-8} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8} \\
&= \frac{-6 \pm 10}{-8}
\end{aligned}
$$

$x = \dfrac{-6-10}{-8} = \dfrac{-16}{-8} = 2$ tai $x = \dfrac{-6+10}{-8} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

Derivaattafunktion nollakohdat kuuluvat määrittelyvälille $-2 \le x \le 4$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva ja voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa $-\frac{1}{2}$ ja 2. Määritetään derivaattafunktion merkit testaamalla ja muiodostetaan välille $-2 \leq x \leq 4$ rajattu kulkukaavio.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

$f'(-1) = -3 < 0$ $\quad -$

$f'(0) = 4 > 0$ $\quad +$

$f'(3) = -1{,}4 < 0$ $\quad -$

	-2		$-\frac{1}{2}$		2		4
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min

Kulkukaavion perusteella funktion f
minimiarvot ovat

$$\boldsymbol{f(-2) = \frac{3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)}{(-2)^2+1} = 0{,}8} \text{ ja } f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{3(-\frac{1}{2})^2 + 4\cdot(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})^2+1} = -1$$

sekä maksimiarvot

$$f(2) = \frac{3\cdot 2^2 + 4\cdot 2}{2^2+1} = 4 \text{ ja } f(4) = \frac{3\cdot 4^2 + 4\cdot 4}{4^2+1} \approx 3{,}8\,.$$

Koska $-1 < f(-2) < 4$ ja $-1 < f(4) < 4$, niin kulkukaavion perusteella funktion f pienin arvo on -1 ja suurin arvo 4. Koska funktio f on jatkuva, se saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välistä. Funktio saa siis kaikki arvot suljetulta väliltä $[-1, 4]$.

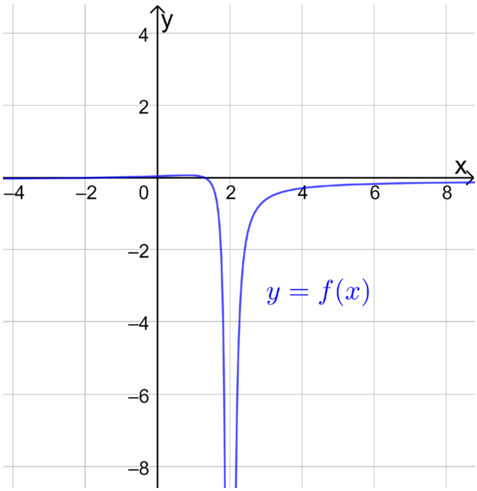
Vastaus
kaikki arvot väliltä $[-1, 4]$

9.10

$$f(x) = \frac{5-3x^2}{(6x-3a)^2}$$

Funktio f on määritelty, kun $(6x-3a)^2 \neq 0$ eli kun $x \neq \frac{a}{2}$.

a)



Appletin avulla havaitaan, että $a = 4$ ja epäoleellinen raja-arvo $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

b) Tarkastellaan raja-arvoa kohdassa 2.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{5-3x^2}{(6x-3a)^2}$$

$$= \frac{5-3\cdot 2^2}{(6\cdot 2-3a)^2}$$

$$= \frac{-7}{9\cdot(a-4)^2}$$

Funktiolla on epäoleellinen raja-arvo, kun $9\cdot(a-4)^2 = 0$ eli kun $a=4$. Funktio f on tällöin

$$f(x) = \frac{5-3x^2}{(6x-3a)^2} = \frac{5-3x^2}{(6x-3\cdot 4)^2} = \frac{5-3x^2}{(6x-12)^2}.$$

Määritetään funktion f toispuoliset raja-arvot kohdassa 2.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{\overbrace{5-3x^2}^{<0}}{\underbrace{(6x-12)^2}_{>0}} = -\infty$$

ja

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{\overbrace{5-3x^2}^{<0}}{\underbrace{(6x-12)^2}_{>0}} = -\infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 2 ovat saman merkkiset, niin funktiolla f on kohdassa 2 epäoleellinen raja-arvo $-\infty$ eli $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

Vastaus

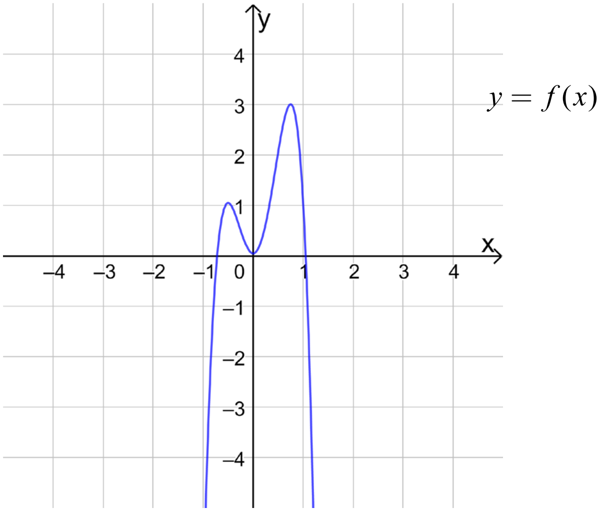
a) $a=4$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

b) $a=4$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

9.11

$$f(x) = -12x^4 + 4x^3 + 9x^2 + \frac{3}{64}$$

a) Hahmotellaan funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella näyttäisi, että funktion suurin arvo on 3 ja että funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Perustellaan havainnot laskemalla.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = -48x^3 + 12x^2 + 18x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -48x^3 + 12x^2 + 18x &= 0 \\ x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x &= 0 \text{ tai } x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 0$ ja $x = \frac{3}{4}$. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$\begin{array}{ll} f'(x) = -48x^3 + 12x^2 + 18x & \\ f'(-1) = 42 > 0 & + \\ f'(-0{,}1) \approx -1{,}6 < 0 & - \\ f'(0{,}1) \approx 1{,}9 > 0 & + \\ f'(1) = -18 < 0 & - \end{array}$$

	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	↗	↘	↗	↘
	max	min	max	

Kulkukaavion perusteella funktion f suurin arvo saavutetaan kohdassa $-\frac{1}{2}$ tai kohdassa $\frac{3}{4}$.

Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{67}{64} \approx 1{,}047$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \qquad \text{suurin}$$

Funktion f suurin arvo on 3.

Määritetään funktion f raja-arvo äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-12x^4 + 4x^3 + 9x^2 + \frac{3}{64}\right) = -\infty$$

Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, niin funktio f saa mielivaltaisen pieniä arvoja, ja sillä ei ole pienintä arvoa.

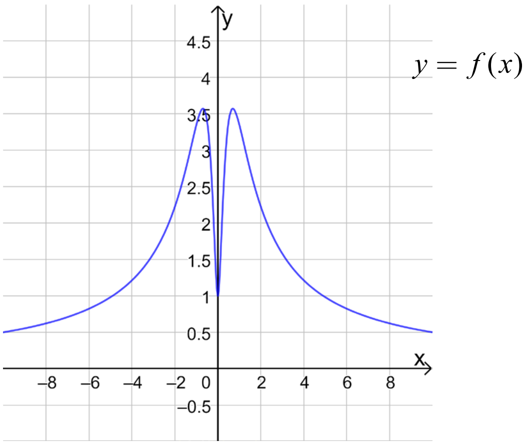
b) Funktio f on jatkuva, joten se saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä. Siis funktion f arvojoukko on $]-\infty, 3]$.

Vastaus
a) suurin arvo 3, pienintä arvoa ei ole
b) arvojoukko $]-\infty, 3]$

9.12

$$f(x) = \frac{\sqrt{100x^2+1}}{2x^2+1}$$

a) Piirretään funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella näyttäisi, että funktiolla on suurin arvo ja että funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Perustellaan havainnot laskemalla.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x) = -\frac{8x \cdot \left(25x^2 - 12\right)}{\left(2x^2+1\right)^2 \cdot \sqrt{100x^2+1}}.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-\frac{8x\cdot\left(25x^2-12\right)}{\left(2x^2+1\right)^2\cdot\sqrt{100x^2+1}} &= 0 \\
x = 0 \ \text{ tai } \ x &= \pm\frac{2\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}
$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x=0$ tai $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$
f'(x) = -\frac{8x\cdot\left(25x^2-12\right)}{\left(2x^2+1\right)^2\cdot\sqrt{100x^2+1}}
$$

$f'(-2)\approx 1{,}2>0$ $\quad +$

$f'(-0{,}1)\approx -6{,}4<0$ $\quad -$

$f'(0{,}1)\approx 6{,}4>0$ $\quad +$

$f'(2) = -1{,}2<0$ $\quad -$

		$-\frac{2\sqrt{3}}{5}$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{5}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘
		min		max		min	

Kulkukaavion perusteella funktion f suurin arvo saavutetaan kohdassa $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ tai kohdassa $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$

Funktion f suurin arvo on $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$.
Lasketaan funktion arvo kohdassa 0.

$$f(0) = 1$$

Määritetään funktion f raja-arvo äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{100x^2+1}}{2x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{100x^2+1}}{2x^2+1} = 0$$

Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 < 1$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 < 1$, niin funktiolla f ei ole pienintä arvoa.

b) Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot suurimman arvonsa ja raja-arvon 0 väliltä. Funktion f arvojoukko on puoliavoin väli $]0, \frac{25}{7}]$.

Vastaus

a) suurin arvo $\frac{25}{7}$ $(= 3\frac{4}{7})$, pienintä arvoa ei ole

b) arvojoukko $]0, \frac{25}{7}]$

9.13

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x\cdot(x-3)^2(x-2)}$$

Funktio f on määritelty, kun $x\cdot(x-3)^2(x-2)\neq 0$ eli kun $x\neq 0,\ x\neq 2$ ja $x\neq 3$.

a) Lasketaan rahja-arvo kohdassa –2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x\cdot(x-3)^2(x-2)}&=\frac{(-2)^2-4}{(-2)\cdot(-2-3)^2(-2-2)}\\&=\frac{4-4}{200}\\&=0\end{aligned}$$

b) Lasketaan rahja-arvo kohdassa 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x\cdot(x-3)^2(x-2)}&=\frac{0^2-4}{0\cdot(0-3)^2(0-2)}\\&=\frac{-4}{0}\end{aligned}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $-4\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Lasketaan toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 0.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\overbrace{x^2-4}^{<0}}{\underbrace{x}_{<0}\cdot\underbrace{(x-3)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x-2)}_{<0}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\overbrace{x^2-4}^{<0}}{\underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{(x-3)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x-2)}_{<0}}=\infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 0 ovat eri merkkiset, niin funktiolla f ei ole kohdassa 0 myöskään epäoleellista raja-arvoa.

c) Lasketaan rahja-arvo kohdassa 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x\cdot(x-3)^2(x-2)}=\frac{3^2-4}{3\cdot(3-3)^2(0-2)}$$
$$=\frac{5}{0}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $-4\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Lasketaan toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 0.

$$\lim_{x\to 3-}\frac{\overbrace{x^2-4}^{>0}}{\underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{(x-3)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x-2)}_{>0}}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{\overbrace{x^2-4}^{>0}}{\underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{(x-3)^2}_{>0}\cdot\underbrace{(x-2)}_{>0}}=\infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 3 ovat saman merkkiset, niin funktiolla f on kohdassa 3 epäoleellinen raja-arvo ∞.

Vastaus

a) raja-arvo $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$

b) ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa

c) epäoleellinen raja-arvo $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$

9.14

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}$$

Funktio on määritelty ja jatkuva, kun $x - 4 \neq 0$ eli kun $x \neq 4$.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2} &= 0 \\ x = 2 \ \text{tai}\ x &= 6 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdissa $x = 2$ tai $x = 6$ tai funktion epäjatkuvuuskohdassa $x = 4$. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$$

$f'(0) = -0{,}75 < 0$ $\quad -$

$f'(3) = 3 > 0$ $\quad +$

$f'(5) = 3 > 0$ $\quad +$

$f'(7) = -0{,}55 < 0$ $\quad +$

		2		4		6	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘
		min				max	

a) Tarkasteluväli on $]4,\infty[$.

Kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo on

$$f(6)=\frac{3\cdot 6-6^2}{6-4}=-9\,.$$

Lasketaan toispuoliset raja-arvot tarkasteluvälin päätepisteissä.

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}\frac{3x-x^2}{x-4}=\frac{-4}{0}\quad \text{ei raja-arvoa}$$

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}\frac{\overbrace{3x-x^2}^{<0}}{\underbrace{x-4}_{>0}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{3x-x^2}{x-4}=\lim_{x\to \infty}\frac{x(3-x)}{x(1-\frac{4}{x})}=\lim_{x\to \infty}\frac{3-x}{1-\frac{4}{x}}=\frac{3-\infty}{1-0}=-\infty$$

Kulkukaavion ja edellä laskettujen raja-arvojen epäoleellisten raja-arvojen perusteella funktio f saa mielivaltaisen pieniä arvoja tarkasteluvälillä.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot väliltä $]-\infty,-9]$.

b) Tarkasteluväli on $]-\infty,4[$.

Kulkukaavion perusteella funktion pienin arvo on

$$f(2)=\frac{3\cdot 2-2^2}{2-4}=-1.$$

Lasketaan toispuoliset raja-arvot tarkasteluvälin päätepisteissä.

$$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}\frac{3x-x^2}{x-4}=\frac{-4}{0} \quad \text{ei raja-arvoa}$$

$$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}\frac{\overbrace{3x-x^2}^{<0}}{\underbrace{x-4}_{<0}}=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x-x^2}{x-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3-x}{1-\frac{4}{x}}=\frac{3-(-\infty)}{1-0}=\infty$$

Kulkukaavion ja edellä laskettujen raja-arvojen epäoleellisten raja-arvojen perusteella funktio f saa mielivaltaisen suuria arvoja tarkasteluvälillä.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot väliltä $]-1,\infty]$.

c) Tarkasteluväli on $]-1, 9[$.
Funktio ei ole määritelty tarkasteluvälin kohdassa $x = 4$.

a- ja b-kohtien perusteella funktion f

maksimiarvo on $f(6) = -9$,
minimiarvo on $f(2) = -1$,

ja toispuoleiset epäoleelliset raja-arvot ovat

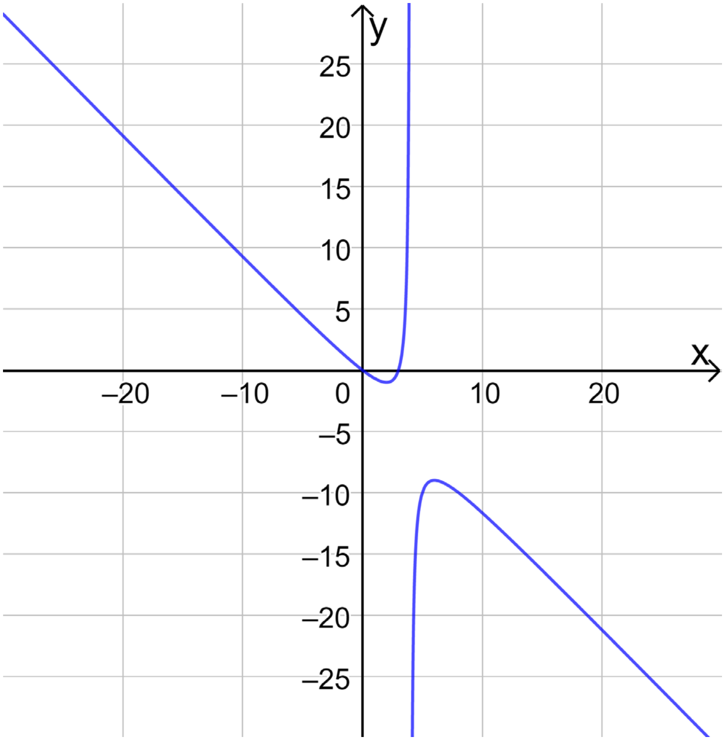
$\lim\limits_{x \to 4-} f(x) = \infty$
ja $\lim\limits_{x \to 4+} f(x) = -\infty$.

Kulkukaavion perusteella jatkuva funktio f saa
välillä $]-1, 4[$ kaikki arvot väliltä $]-1, \infty[$ ja
välillä $]4, 9[$ kaikki arvot väliltä $]-\infty, -9[$.

Välillä $]-1, 9[$ funktio f saa kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -9]$ ja $[-1, \infty[$.

Vastaus
a) kaikki arvot väliltä $]-\infty, -9]$
b) kaikki arvot väliltä $[-1, \infty[$
c) kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -9]$ ja $[-1, \infty[$

Graafinen havainnollistus:



9.15

$f(x)=\sqrt{x^2+3x}-x\,,\;\; x\geq 0$

Ratkaistaan funktion f määrittelyehto.

$x^2+3x\geq 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$x\leq -3\;$ tai $\;x\geq 0$

Derivoidaan funktio f kun $x>0$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-2\sqrt{x^2+3x}+3)}{\sqrt{x^2+3x}}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x)=0$$
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-2\sqrt{x^2+3x}+3)}{\sqrt{x^2+3x}}=0$$
ei ratkaisuja

Havaitaan, että derivaatalla ei ole nollakohtia. Koska derivaattafunktio on jatkuva, se ei vaihda merkkiään missää kohdassa. Koska esimerkiksi $f'(1)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 1-2\sqrt{1^2+3\cdot 1}+3)}{\sqrt{1^2+3\cdot 1}}=\dfrac{1}{4}>0$, niin derivaattafunktio on positiivinen kaikilla $x>0$. Funktio f on siis aidosti kasvava välillä $x\geq 0$.

Funktion f pienin arvo on $f(0)=\sqrt{0^2+3\cdot 0}-0=0$.

Määritetään funktion f raja-arvo äärettömyydessä.

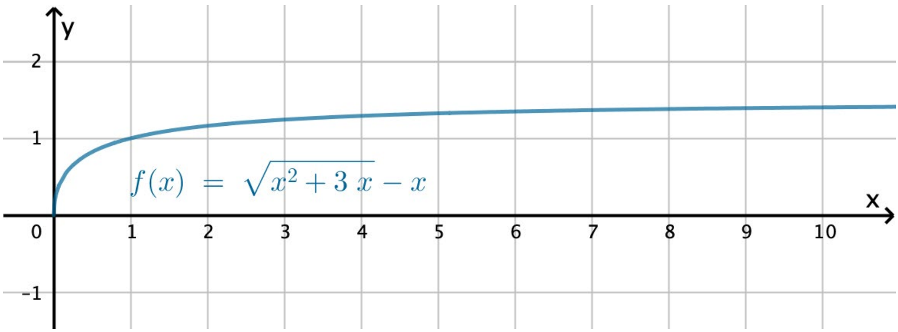
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \frac{3}{2}$$

Aidosti kasvava ja jatkuva funktio f saa kaikki arvot väliltä $[0, \frac{3}{2}[$.

Vastaus

kaikki arvot väliltä $[0, \frac{3}{2}[$

Graafinen tarkistus:



9.16

$$f(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{x}-2}$$

Funktio f on määritelty, kun $x \geq 0$ ja $\sqrt{x}-2 \neq 0$ eli
kun $x \geq 0$ ja $x \neq 4$.

Lasketaan funktion f raja-arvo kohdassa 4.

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x-5}{\sqrt{x}-2} = \frac{8-5}{\sqrt{4}-2} = \frac{3}{0}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $3 \neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Lasketaan epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot kohdassa 4.

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = \lim_{x \to 4-} \frac{\overbrace{2x-5}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{x}-2}_{<0}} = -\infty \quad \text{ja}$$

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 4+} \frac{\overbrace{2x-5}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{x}-2}_{>0}} = \infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa 4 ovat eri merkkiset, niin funktiolla f ei ole kohdassa 4 myöskään epäoleellista raja-arvoa.

Vastaus
Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 4$.
Funktiolla f on tässä kohdassa toispuoliset epäoleelliset raja-arvot $\lim_{x \to 4-} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x \to 4+} f(x) = -\infty$.

Funktiolla f ei ole raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa 4.

9.17

a)

$$\lim_{s\to 0+}\int_s^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0+}\int_s^1 2x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{s\to 0+} \Big/_s^1 \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{s\to 0+} \Big/_s^1 4\sqrt{x}$$

$$= \lim_{s\to 0+}\left(4\sqrt{1} - 4\sqrt{s}\right)$$

$$= 4 - 0$$

$$= 4$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0+}\int_s^1 \frac{2}{x^3}\ \mathrm{d}x &= \lim_{s\to 0+}\int_s^1 2x^{-3}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to 0+} \mathop{/}_s^1 \frac{2}{-2}x^{-2} \\
&= \lim_{s\to 0+} \mathop{/}_s^1 -\frac{1}{x^2} \\
&= \lim_{s\to 0+}\left(-\frac{1}{1^2}-(-\frac{1}{s^2})\right) \\
&= \lim_{s\to 0+}\left(-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{s^2}\right) \\
&= -1+\infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Vastaus

a) 4

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞

9.18

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

Koska $x^2+1>0$ aina, funktio f on määritelty kaikilla x.

Derivoidaan funktio f.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{D4x\cdot(x^2+1)-4x\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{4\cdot(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}&=0 && \big|\cdot(x^2+1)^2\ \ (\neq 0)\\-4x^2+4&=0\\-4x^2&=-4 && \big|:(-4)\\x^2&=1\\x=-1 \text{ tai } x&=1\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=1$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -1 ja 1.
Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(-2) = -0,48 < 0 \quad -$

$f'(0) = 4 > 0 \quad +$

$f'(2) = -0,48 < 0 \quad -$

		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Lasketaan funktio f raja-arvo äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä sekä funktion arvo minimikohdassa -1 ja maksimikohdassa 1.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{4}{x}}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{4}{x}}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)}{(-1)^2 + 1} = -2$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1}{1^2 + 1} = 2$$

Koska $-2 < 0 < 2$, niin kulkukaavion ja raja-arvojen perusteella funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa 1 ja pienimmän arvonsa kohdassa -1.

Koska f on jatkuva, se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välistä. Siis funktion f arvojoukko on suljettu väli $[-2, 2]$

Vastaus
$[-2, 2]$

9.19

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$$

Funktio f on määritelty, kun $x-1\neq 0$ eli kun $x\neq 1$.

Derivoidaan funktio f CAS-laskimella.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x=-1 \text{ tai } x=3$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=3$.
Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -1 ja 3 sekä kohdassa 1, jossa funktio ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$f'(-2)\approx 0{,}56>0$ $\quad +$

$f'(0)=-3<0$ $\quad -$

$f'(2)=-3<0$ $\quad -$

$f'(4)\approx 0{,}56>0$ $\quad +$

		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	↗	max	↘	ei määr	↘	min	↗

Lasketaan CAS-laskimella funktion f raja-arvo äärettömyydessä ja miinus-äärettömyydessä sekä funktion arvo minimikohdassa 3 ja maksimikohdassa -1. Lasketaan myös toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+3}{-1-1} = -2$$

$$f(3) = \frac{3^2+3}{3-1} = 6$$

Kulkukaavion perusteella jatkuva funktio f saa välillä $x < 1$ kaikki arvot väliltä $]-\infty, -2]$ ja välillä $x > 1$ kaikki arvot väliltä $[6, \infty[$.

Vastaus
kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -2]$ ja $[6, \infty[$

9.20

a) Todistetaan väite laskemalla funktion $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ raja-arvo äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty} {}^{(\sqrt{x^2+1}+x)}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} \quad \big|\ |x|=x,\ \text{kun } x>0$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$=\frac{1}{\infty\cdot(\sqrt{1+0}+1)}=\frac{1}{\infty\cdot 2}=0$$

Väite $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ on näin todistettu.

b) Tutkitaan epäyhtälöä $0 < f(x) < 10^{-3}$.

Muodostetaan funktion f kulkukaavio. Derivoidaan f CAS-laskimella.

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ratkaistaan derivaattafubktion nollakohdat CAS-laskimella.

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

ei ratkaisuja

Derivaattafunktio on jatkuva ja määritelty kaikilla x, joten se ei vaihda merkkiäään missään. Koska esimerkiksi

$f'(0) = \dfrac{0 - \sqrt{0^2+1}}{\sqrt{0^2+1}} = -1 < 0$, derivaattafunktio on negatiifinen kaikilla x ja siten funktio f on aidosti vähenevä. Koska a-kohdan mukaan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, funktio f ei koskaa saa arvoa nolla eikä negatiivisia arvoa. Funktio f saa siis vain positiivisia arvoja.

Tarkasteltavan epäyhtälön $0 < f(x) < 10^{-3}$ vasen puoli on siis tosi kaikilla x.

Ratkaistaan epäyhtälö $f(x) < 10^{-3}$ CAS-laskimella.

$$f(x) < 10^{-3}$$
$$\sqrt{x^2+1} - x < 10^{-3}$$
$$x > 499{,}9995$$

Voidaan siis valita esimerkiksi $h = 500$.

c) b-kohdan mukaan funktio f ei saa arvoja väliltä $]-\infty,0]$.

Vastaus
b) esimerkiksi $h = 500$
c) Funktio f ei saa arvoja väliltä $]-\infty,0]$.

9.21

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, missä $c \neq 0,\ d \neq 0$ ja $ad = bc$

Funktio f on määritelty, kun $cx + d \neq 0$ eli kun $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

Derivoidaan funktio f.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{D(ax+b)\cdot(cx+d)-(ax+b)\cdot D(cx+d)}{cx+d} \\
&= \frac{a\cdot(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2} \\
&= \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} \\
&= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} && \Big| ad = bc \\
&= \frac{bc-bc}{(cx+d)^2} \\
&= 0,\ \text{kun } x \neq -\frac{d}{c}
\end{aligned}
$$

Koska funktion f derivaattafunktion arvo on nolla koko määrittelyjoukossa, funktion f arvo on vakio. Siis funktio f on määrittelyjoukossaan vakiofunktio. $\square$

Merkitään funktion saamaa vakioarvoa kirjaimella p. Tällöin myös $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = p$. Lasketaan funktion f raja-arvo äärettömyydessä ja ratkaistaan p.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x(a + \frac{b}{x})}{x(c + \frac{d}{x})} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} \\
&= \frac{a + 0}{c + 0} \\
&= \frac{a}{c}
\end{aligned}$$

Siis $p = \frac{a}{c}$ ja funktio f saa vakioarvon $\frac{a}{c}$ koko määrittyelyjoukossaan.

Vastaus

Vakioarvo on $\frac{a}{c}$.