8.1

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{1-2x}^{(x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\frac{1}{x}-2}$$

$$= \frac{4}{0-2}$$

$$= \frac{4}{-2}$$

$$= -2$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7}{6x}^{(x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\frac{7}{x}}{6}$$

$$= \frac{-\infty-0}{6}$$

$$= -\infty$$

Vastaus

a) -2

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$

8.2

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x}{4x^2-5}^{(x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{8-\dfrac{3}{x}}{4-\dfrac{5}{x^2}} \\ &= \frac{8-0}{4-0} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+2x}{x^2}^{(x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\dfrac{2}{x}}{1} \\ &= \frac{5+0}{1} \\ &= \frac{5}{1} \\ &= 5\end{aligned}$$

Vastaus
a) 2
b) 5

8.3

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(5x^3-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\left(\frac{5x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\left(5-\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=\infty\cdot(5-0)$$
$$=\infty$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}\qquad |x|=x,\text{ kun } x>0$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(1+0)}}$$
$$=1$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞
b) 1

8.4

a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(9x-x^5\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot\left(\frac{9x}{x^5}-\frac{x^5}{x^5}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(x^5\cdot\left(\frac{9}{x^4}-1\right)\right) \\
&= -\infty\cdot(0-1) \\
&= -\infty\cdot(-1) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

b)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x+1}{\sqrt{9x^2+7}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(6 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \cdot \left(9 + \frac{7}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(6 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{\left(9 + \frac{7}{x^2}\right)}} \qquad |x| = -x, \text{ kun } x < 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(6 + \frac{1}{x}\right)}{-x \cdot \sqrt{\left(9 + \frac{7}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{\left(9 + \frac{7}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{6+0}{-\sqrt{9+0}}$$

$$= \frac{6}{-3}$$

$$= -2$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞
b) −2

8.5

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x$$

| Koska $0<\frac{5}{6}<1$, lausekkeen $\left(\frac{5}{6}\right)^x$ arvo lähestyy lukua 0, kun x kasvaa rajatta

$$=0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-8}{2^x}^{(2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^x}{2^x}-\frac{8}{2^x}}{\frac{2^x}{2^x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x-\frac{8}{2^x}$$

$$=\infty-0$$

$$=\infty$$

Vastaus

a) 0

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞

8.6

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{7^x}=\frac{1}{\infty}$$
$$=0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^{2x}$$

| Koska $\frac{7}{3}>1$, lausekkeen $\left(\frac{7}{3}\right)^{2x}$ arvo lähestyy lukua 0, kun x pienenee rajatta

$$=0$$

Vastaus
a) 0
b) 0

8.7

a)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}$$
$$= \infty$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8\sqrt[3]{x} - 1}{2\sqrt[3]{x}}^{(\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{8 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{2}$$
$$= \frac{8-0}{2}$$
$$= \frac{8}{2}$$
$$= 4$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞
b) 4

8.8

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(7-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\left(\frac{7}{\sqrt{x}}-1\right)\right)$$
$$=\infty\cdot(0-1)$$
$$=-\infty$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}^{(\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}}{2}$$
$$=\frac{1-0}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$
b) $\frac{1}{2}$

8.9

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\mathrm{e}^x-999)&=\infty-999\\&=\infty\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(999\mathrm{e}^x+x\right)&=999\cdot 0+(-\infty)\\&=0-\infty\\&=-\infty\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}-999\right)&=0-999\\&=-999\end{aligned}$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞
b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$
c) -999

8.10

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-9x}{2x^2+9}^{(x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6-\dfrac{9}{x}}{2+\dfrac{9}{x^2}} \\
&= \frac{6-0}{2-0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-9x}{2x^2+9}^{(x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{6-\dfrac{9}{x}}{2+\dfrac{9}{x^2}} \\
&= \frac{6-0}{2-0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-7}{5x^2+2}^{(x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-\frac{7}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}}$$
$$= \frac{\infty-0}{5+0}$$
$$= \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-7}{5x^2+2}^{(x^2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{7}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}}$$
$$= \frac{-\infty-0}{5+0}$$
$$= -\infty$$

Vastaus

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, funktion arvot kasvavat rajatta, kun muuttuja kasvaa rajatta;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funktion arvot pienenevät rajatta, kun muuttuja pienenee rajatta

8.11

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x}{9x^2+3x}^{(x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{2}{x}}{9+\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{4-0}{9+0}$$

$$= \frac{4}{9}$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x^4}{4x^3-x^2}^{(x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+x}{4-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2-\infty}{4-0}$$

$$= -\infty$$

Vastaus

a) $\frac{4}{9}$

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$

8.12

a)

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 5x^4) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 \left(\frac{2}{x} - 5 \right) \right)$$
$$= \infty \cdot (0 - 5)$$
$$= -\infty$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}^{(\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{3}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{x}}}$$
$$= \frac{5 - 0}{1 + 0}$$
$$= 5$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$
b) 5

8.13

a)

$$\lim_{x\to-\infty}(-3^x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3^{-x}}\right)$$
$$= 0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 5^{2x}+5^{-x}}{25^x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 5^{2x}+5^{-x}}{(5^2)^x+7}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot 5^{2x}+5^{-x}}{5^{2x}+7}\ (5^{2x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5^{-x}}{5^{2x}}}{1+\frac{7}{5^{2x}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{5^x\cdot 5^{2x}}}{1+\frac{7}{5^{2x}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{5^{x+2x}}}{1+\frac{7}{5^{2x}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{5^{3x}}}{1+\frac{7}{5^{2x}}}$$
$$= \frac{4+0}{1+0} = 4$$

Vastaus
a) 0 **b)** 4

8.14

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}-1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(x^{-\frac{1}{2}}-1\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\right) \\
&= \infty\cdot\left(0-1\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{8\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{x^2-3x}+7}
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{8\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{2\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}+7} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{8\sqrt{x^2}\,\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{2\sqrt{x^2}\,\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+7} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{8|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{2|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+7} \qquad (|x| \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{8\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{2\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+\dfrac{7}{|x|}} \\
&= \frac{8\sqrt{1+0}}{2\sqrt{1-0}+0} \\
&= \frac{8}{2} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vastaus
a) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$
b) 4

8.15

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2^x - 5\cdot 4^x}{2^{2x}} \\
&= \frac{2^x - 5\cdot (2^2)^x}{2^{2x}} \\
&= \frac{2^x - 5\cdot 2^{2x}}{2^{2x}} \;{}^{(2^{2x}} \\
&= \frac{\frac{2^x}{2^{2x}} - 5\cdot 1}{1} \\
&= \frac{2^x}{2^{2x}} - 5 \\
&= \left(\frac{2}{2^2}\right)^x - 5 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5
\end{aligned}
$$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5\right) = 0 - 5 = -5$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5\right) = \infty - 5 = \infty$

Vastaus
a) -5 **b)** ∞

8.16

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x}-9\right)-\left(\sqrt{x}+3\right)\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-9-\sqrt{x}-3\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-9-3\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-12\right)\\ &= -9-3\\ &= -12\end{aligned}$$

Vastaus

–12

8.17

Funktio f on määritelty, kun $x^2-1\geq 0$.
Sievennetään aluksi funktion lauseke.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-1}\right)^{(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{x\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-1}} \\
&= x\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= x\cdot\frac{x^2+3-(x^2-1)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
&= x\cdot\frac{x^2+3-x^2+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} \\
&= \frac{x}{|x|}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}
\end{aligned}
$$

a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \Big|\, \text{kun } x \to -\infty,\ x^2 - 1 > 0$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) \qquad \Big|\, \text{kun } x < 0,\ \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-1 \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{-4}{1+1}$$

$$= \frac{-4}{2}$$

$$= -2$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \Big|\ \text{kun } x \to \infty,\ x^2 - 1 > 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) \qquad \Big|\ \text{kun } x > 0,\ \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 \cdot \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{4}{1+1}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

Vastaus
a) -2
b) 2

8.18

a) Funktion $\cos x$ arvojoukko on $[-1,\ 1]$.

Toisaalta funktio $\cos x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,\ 1]$ jokaisella 2π -pituisella reaalilukuvälillä.

Tapa 1

Koska kosinifunktion kerroin $\dfrac{1}{x}$ pienenee x:n kasvaessa, niin funktio $\dfrac{\cos x}{x}$ saa jokaisella 2π-pituisella välillä aina itseisarvoltaan pienempiä arvoja, kuin edellisellä 2π-pituisella välillä.

Siis kun x kasvaa rajatta, niin funktion $\dfrac{\cos x}{x}$ arvot lähestyvät nollaa.

Tapa 2

Raja-arvo voidaan laskea myös suoraan.

Tutkitaan funktion f itseisarvoa.

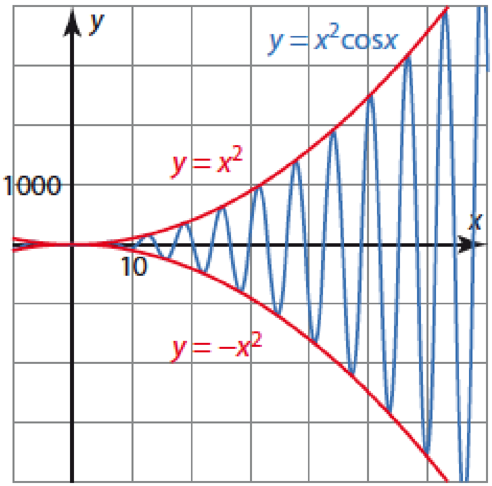
Koska $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leq \lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right| = 0$, niin

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$$

b) Funktion $\cos x$ arvojoukko on $[-1,\ 1]$. Toisaalta funktio $\cos x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,\ 1]$ jokaisella 2π -pituisella reaalilukuvälillä.

Koska kosinifunktion kerroin x^2 kasvaa rajatta, niin funktio $x^2 \cos x$ saa jokaisella 2π-pituisella välillä aina suurempia ja pienempiä arvoja, kuin edellisellä 2π-pituisella välillä.
Kun x kasvaa rajatta, niin funktio $x^2 \cos x$ saa mielivaltaisen suuria ja mielivaltaisen pieniä arvoja. Siis funktiolla f ei ole raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa äärettömyydessä.

Koska $\cos x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,\ 1]$ jokaisella 2π -pituisella reaalilukuvälillä, niin $-x^2 \leq x^2 \cos x \leq x^2$. Siis funktion f arvot heilahtelevat käyrien $y = -x^2$ ja $y = x^2$ välissä.



Vastaus
a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
b) ei raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa,
arvot heilahtelevat käyrien $y = x^2$ ja $y = -x^2$ välissä

8.19

a) $f(x)=\dfrac{9\sin 6x}{x+2}=\dfrac{9}{x+2}\cdot\sin 6x$

Tutkitaan funktion f itseisarvoa.

Koska $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{9}{x+2}\cdot\sin 6x\right|\le\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{9}{x+2}\cdot 1\right|=0$, niin

myös $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

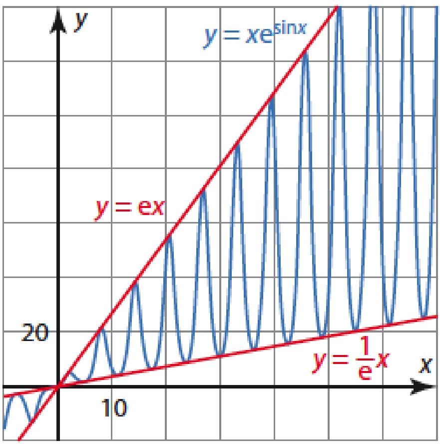
b) $f(x) = x\mathrm{e}^{\sin x}$

Sinifunktion arvojoukko on $[-1, 1]$.
Funktiolle f pätee $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{\sin x} \geq \lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{-1} = \infty$, joten funktiolla f ei ole raja-arvoa äärettömyydessä.

$\sin x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$ jokaisella 2π-pituisella välillä.

Tällöin
$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x} \leq x\,\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}\,x$ ja $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x} \geq x\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$, joten

funktion f arvot heilahtelevat suorien $y = \mathrm{e}\,x$ ja $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ välissä.
Näin funktiolla f ei ole edes epäoleellista raja-arvoa äärettömyydessä.



Vastaus
a) 0
b) ei raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa,
arvot heilahtelevat suorien $y = \mathrm{e}\,x$ ja $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ välissä.

8.20

Tiedetään, että $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathbf{e}$.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1}$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1}$$
$$=\mathrm{e}^{-1}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}$$
$$=\mathrm{e}^{2}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \Big|\,\text{kun } x\to\infty,\text{ niin } 2x\to\infty$$

$$=\left(\lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \Big|\,\text{Merkitään } 2x=t.$$

$$=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\mathrm{e}}$$

Vastaus

a) $\frac{1}{\mathrm{e}}$

b) e^2

c) $\sqrt{\mathrm{e}}$

8.21

Lasketaan raja-arvo ja osoitetaan, että $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{(\sqrt{x^2+1}+x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On vielä määritettävä jokin sellainen luku h, että

$$0 < \sqrt{x^2+1} - x < 10^{-3}\text{ , kun } x > h.$$

Kun $x > 0$, niin $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = x$, joten kaksoisepäyhtälön vasen puoli on aina tosi, kun $x > 0$.

Ratkaistaan kaksoisepäyhtälön oikea puoli $\sqrt{x^2+1} - x < 10^{-3}$ CAS-laskimella, jolloin saadaan

$$x > \frac{999\,999}{2000} = 499{,}9995.$$

Luvun h on siis täytettävä ehto $h \geq \frac{999\,999}{2000} = 499{,}9995$.

Valitaan esimerkiksi $h = 500$.

Vastaus

Esimerkiksi $h = 500$

8.22

Merkitään $y_1 = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ ja $y_2 = x$.

Lasketaan y-koordinaattien erotus

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - x \qquad \left| \, x = \ln \mathrm{e}^x. \right. \\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \ln \mathrm{e}^x \\ &= \ln \frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \ln \frac{\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right)}{\mathrm{e}^x} \\ &= \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right) \end{aligned}$$

Lasketaan y-koordinaattien erotuksen raja-arvo, kun x kasvaa rajatta.

$$\lim_{x\to\infty}(y_1 - y_2) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Koska y-koordinaattien erotus lähestyy nollaa, kun x kasvaa rajatta, niin käyrä $y = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ lähestyy rajatta suoraa $y = x$. □

8.23

a) Esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x\right)=\lim_{x\to\infty}0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-x\right)=\lim_{x\to\infty}x=\infty \quad \text{ja}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-x\right)=-\infty$$

b) Esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x=\infty \qquad \text{ja}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$