11.1

a) Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 2\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 2\ \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} 2\ \mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} 2\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} 2x \\ &= \lim_{r\to-\infty} \left(2\cdot 0 - 2r\right) \\ &= 0-\left(-\infty\right) \\ &= \infty\end{aligned}$$

(Vastaavasti myös $\int_{-\infty}^{0} 2\ \mathrm{d}x = \infty$, mutta tämän voi jättää tutkimatta, koska jo vasen puoli hajaantuu.)

Koska epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{0} 2\ \mathrm{d}x$ hajaantuu, myös epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} 2\ \mathrm{d}x$ hajaantuu.

b) Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} |x| \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} |x| \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{0} |x| \ \mathrm{d}x \qquad |x| = -x, \text{kun } x \le 0$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x \ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} -x \ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \Big/_{r}^{0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} r^2\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

(Vastaavasti myös $\int_{0}^{\infty} |x| \ \mathrm{d}x = \infty$.)

Koska epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{0} |x| \ \mathrm{d}x$ hajaantuu, myös epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \ \mathrm{d}x$ hajaantuu.

Vastaus
a) integraali hajaantuu
b) integraali hajaantuu

11.2

a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x \\
&= \lim_{t\to-\infty} \Big/_{t}^{0} - \mathbf{e}^{-x} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(-\mathbf{e}^{0} - \left(-\mathbf{e}^{-t}\right)\right) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(-\mathbf{e}^{0} + \mathbf{e}^{-t}\right) \\
&= -1 + \infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

b)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} - \mathbf{e}^{-x} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\mathbf{e}^{-t} - \left(-\mathbf{e}^{0}\right)\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\mathbf{e}^{-t} + \mathbf{e}^{0}\right) \\
&= 0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x$

Koska epäoleellinen integraali $\int\limits_{-\infty}^{0} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x$ hajaantuu a) -kohdan perusteella, myös epäoleellinen integraali $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\ \mathbf{d}x$ hajaantuu.

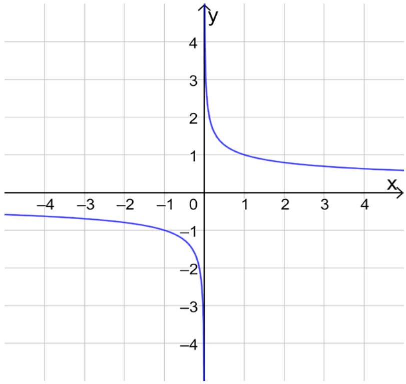
Vastaus
a) integraali hajaantuu
b) 1
c) integraali hajaantuu

11.3

a) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Funktio saa negatiivisia arvoja kun $x<0$.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.



$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right| \mathbf{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x$$

$$-\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x=-\lim_{r\to 0-}\int_{-1}^{r}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x=\frac{3}{2}$$

ja

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x=\lim_{t\to 0+}\int_{t}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \mathbf{d}x=\frac{3}{2}$$

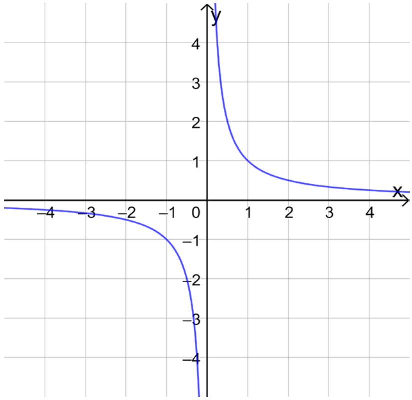
Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right| \mathbf{d}x=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

b) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x}$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 0$.

Funktio saa negatiivisia arvoja kun $x<0$.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.



$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x}\right| \,\mathbf{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x$$

$$-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x=-\lim_{r\to 0}\int_{-1}^{r}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x=\infty$$

ja

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x=\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x=\infty$$

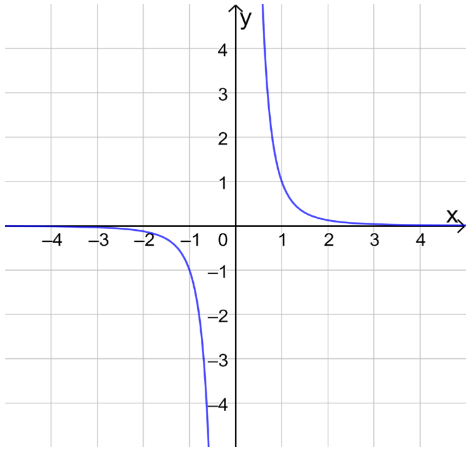
Siis

$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x}\right| \,\mathbf{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x} \,\mathbf{d}x=\infty+\infty=\infty\,.$$

c) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 0$.

Funktio saa negatiivisia arvoja kun $x<0$.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.



$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^3}\right|\,\mathbf{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x$$

$$-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x=-\lim_{r\to 0}\int_{-1}^{r}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x=\infty$$

ja

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x=\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x=\infty$$

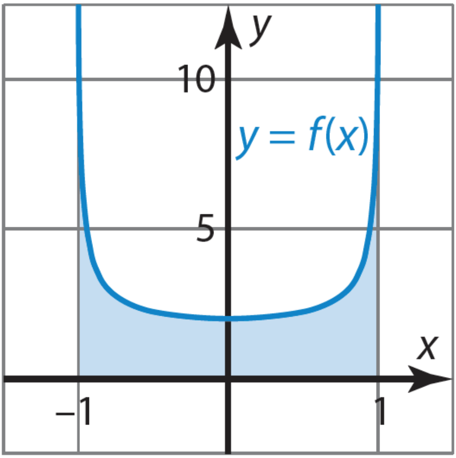
Siis

$$A=\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^3}\right|\,\mathbf{d}x=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}\,\mathbf{d}x=\infty+\infty=\infty\,.$$

Vastaus
a) 3
b) äärettömän suuri
c) äärettömän suuri

11.4

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ on määritelty, kun $x+1>0$ ja $1-x>0$ eli kun $x>-1$ ja $x<1$. Tarkasteluvälinä on siis avoin väli $-1<x<1$.



Funktio saa vain positiivisia arvoja, joten kysytyn alueen pinta-ala on

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Kyseessä on epäoleellinen integraali, koska funktio f ei ole määritelty tarkasteluvälin päätepisteissä. Jaetaan integraali osiin kohdassa $x=0$.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -1} \int_{r}^{0} (x+1)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -1} \int_{r}^{0} \underbrace{1}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} - \underbrace{(-1)}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -1} \overset{0}{\underset{r}{/}} \underbrace{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))} - \underbrace{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r \to -1} \left(2 \cdot (0+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot (1-0)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(2 \cdot (r+1)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot (1-r)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 0 - (0 - 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 1} \int_0^t (x+1)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 1} \Big/_0^t 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 1}\left(2\cdot(1+1)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot(1-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(2\cdot(t+1)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\cdot 2^{\frac{1}{2}} - 0$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\
&= 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus

$4\sqrt{2}$

11.5

a) Funktio $\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Jaetaan tutkittava epäoleellinen integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} 2\int_{r}^{0} \underbrace{2x}_{s'(x)} \cdot \underbrace{\left(x^2+1\right)^{-2}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} 2 \Big/_{r}^{0} \underbrace{-\left(x^2+1\right)^{-1}}_{U(s(x))} \\
&= \lim_{r\to-\infty} 2 \Big/_{r}^{0} -\frac{1}{x^2+1} \\
&= \lim_{r\to-\infty} 2\left(-\frac{1}{0^2+1} - \left(-\frac{1}{r^2+1}\right)\right) \\
&= 2\left(-1-0\right) \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} 2 \Big/_{0}^{t} -\frac{1}{x^2+1} \\
&= \lim_{t\to\infty} 2\left(-\frac{1}{t^2+1} - \left(-\frac{1}{0^2+1}\right)\right) \\
&= 2(0+1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = -2+2 = 0.
$$

b) Funktio $\dfrac{3x}{x^2+2}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} \frac{3}{2} \int_{r}^{0} \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} \frac{3}{2} \mathop{/}_{r}^{0} \ln\left|x^2+2\right| \\
&= \lim_{r\to-\infty} \frac{3}{2}\left(\ln\left|0^2+2\right| - \left(\ln\left|r^2+2\right|\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\ln|2| - \infty\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot(-\infty) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Koska epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, myös epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Vastaus
a) 0
b) integraali hajaantuu

11.6

Kaapo ei jakanut integraalia kahteen osaan ja käytti sekä ylä- että alarajalla samaa muuttujaa t.

Kaapon korjattu ratkaisu:

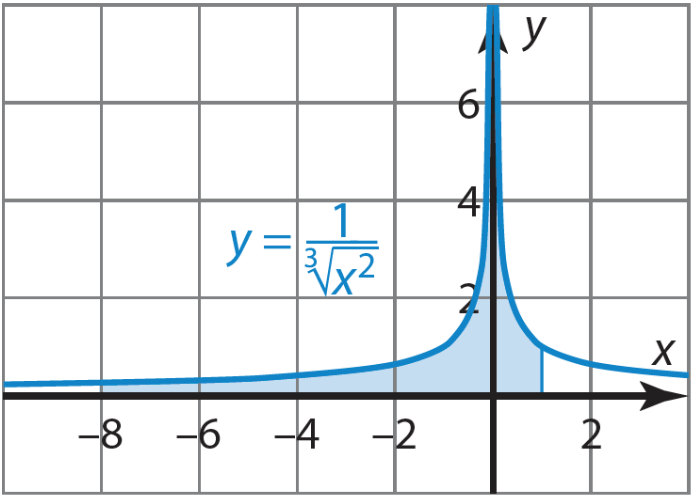
$$\int_{-\infty}^{\infty} 4x^3\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 4x^3\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 4x^3\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} 4x^3\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} 4x^3\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} x^4 \\ &= \lim_{t\to\infty} (t^4 - 0^4) \\ &= \lim_{t\to\infty} t^4 \\ &= \infty^4 \\ &= \infty\end{aligned}$$

Koska epäoleellinen integraali $\int_{0}^{\infty} 4x^3\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, niin myös

integraali $\int_{-\infty}^{\infty} 3x^2\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

11.7



Funktio $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala

$$A = \int_{-8}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x\,.$$

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin kohdassa 0, kyseessä on epäoleellinen integraali.

Jaetaan integraali kahteen osaan.

$$A = \int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathbf{d}x = \int_{-8}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathbf{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathbf{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-8}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x &= \lim_{r\to 0-} \int_{-8}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x \\
&= \lim_{r\to 0-} \int_{-8}^{r} x^{-\frac{2}{3}}\ \mathbf{d}x \\
&= \lim_{r\to 0-} \Big/_{-8}^{r} 3x^{\frac{1}{3}} \\
&= \lim_{r\to 0-} 3 \Big/_{-8}^{r} \sqrt[3]{x} \\
&= \lim_{r\to 0-} 3\left(\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{-8}\right) \\
&= 3\big(0-(-2)\big) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

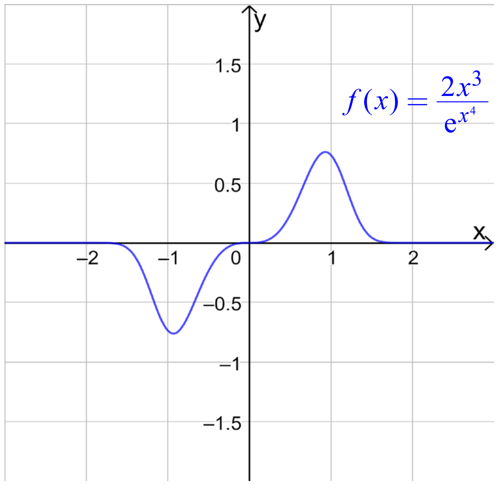
$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x &= \lim_{t\to 0+} \int_{t}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+} 3\Big/_{t}^{1} \sqrt[3]{x} \\
&= \lim_{t\to 0+} 3\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{t}\right) \\
&= 3(1-0) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$
A = \int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ \mathbf{d}x = 6 + 3 = 9\,.
$$

Vastaus
9

11.8



Funktio $f(x)=\dfrac{2x^3}{e^{x^4}}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Kysytty pinta-ala $A=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$.

Funktio f saa negatiivisia arvoja kun $x<0$ ja positiivisia arvoja kun $x>0$. Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2x^3}{e^{x^4}}\right|dx=\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\left|\frac{2x^3}{e^{x^4}}\right|}_{<0}dx+\int_{0}^{\infty}\underbrace{\left|\frac{2x^3}{e^{x^4}}\right|}_{>0}dx=\int_{-\infty}^{0}-\frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx$$

Lasketaan epäoleelliset integraalit erikseen CAS-laskimella.

$$\int_{-\infty}^{0} -\frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx = \lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0} -\frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx = \frac{1}{2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

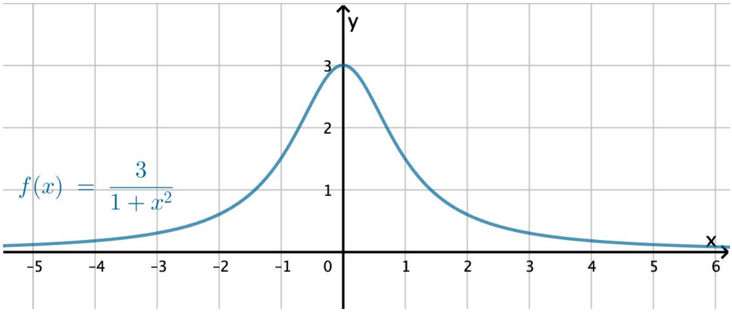
$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^3}{e^{x^4}}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Vastaus

1

11.9

Funktio $f(x)=\dfrac{3}{1+x^2}$ on määritelty kaikkilla x.



Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V=\pi\int_{-\infty}^{\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x\,.$$

Jaetaan epäoleellinen integraali kahteen osaan kohdassa $x=0$.

$$V=\pi\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_{0}^{\infty}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

Lasketaan integraalin osat erikseen CAS-laskimella.

$$\pi \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{3}{1+x^2} \right)^2 \mathrm{d}x = \lim_{r \to -\infty} \pi \int_{r}^{0} \left(\frac{3}{1+x^2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{9\pi^2}{4}$$

$$\pi \int_{0}^{\infty} \left(\frac{3}{1+x^2} \right)^2 \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \pi \int_{0}^{t} \left(\frac{3}{1+x^2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{9\pi^2}{4}$$

Koska molemmat integraalit suppenevat, niin

$$V = \frac{9\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{4} = \frac{9\pi^2}{2}.$$

Vastaus

$\frac{9\pi^2}{2}$

11.10

Funktio $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla. Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\,.$$

Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\begin{aligned}
A&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x && \left|\begin{array}{l}|\,x\,|=-x,\ \text{kun}\ x\le 0\\ |\,x\,|=x,\ \text{kun}\ x\ge 0\end{array}\right.\\
&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(-x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Lasketaan integraalit erikseen.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} e^{x}\ dx = \lim_{r \to -\infty} \Big/_{r}^{0} e^{x} = \lim_{r \to -\infty} (e^{0} - e^{r}) = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\ dx = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} e^{-x}\ dx = \lim_{t \to \infty} \Big/_{0}^{t} - e^{-x} = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} - (-e^{0})) = -e^{-\infty} = 0 - (-1$$

Koska molemmat integraalit suppenevat, niin pinta-ala on

$A = 1 + 1 = 2$.

Vastaus
2

Lasketaan epäoleelliset integraalit erikseen CAS-laskimella.

$$\int_{-\infty}^{0} -\frac{2x^3}{\mathrm{e}^{x^4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0} -\frac{2x^3}{\mathrm{e}^{x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x^3}{\mathrm{e}^{x^4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{2x^3}{\mathrm{e}^{x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^3}{\mathrm{e}^{x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Vastaus

1

11.11

a) Funktio $\dfrac{x}{4x^2+1}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.
Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\cdot \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{8x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\cdot \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} \ln\left|4x^2+1\right| \\
&= \frac{1}{8}\cdot \lim_{r\to-\infty} \left(\ln|1| - \ln\left|4r^2+1\right|\right) \\
&= -\frac{1}{8}\cdot \lim_{r\to-\infty} \ln\left|4r^2+1\right| \\
&= -\frac{1}{8}\cdot \infty \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Koska epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, myös

epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathbf{d}x$ hajaantuu.

b) Funktio $\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} 2x\left(x^2+1\right)^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} -\left(x^2+1\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} \frac{1}{x^2+1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \left(\frac{1}{0^2+1} - \frac{1}{r^2+1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(1-0) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{0^2+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{1} \right)$$

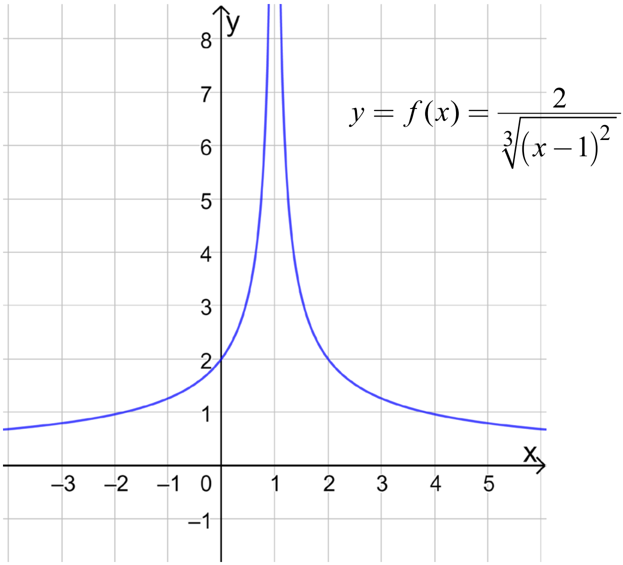
$$= \frac{1}{2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Vastaus
a) integraali hajaantuu
b) 0

11.12



Funktio $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ on määritelty, kun $x \neq 1$. Käyrä ja x-akseli rajaavat kysytyn pinta-alan välillä $[0,2]$. Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala $A = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Koska f ei ole määritelty integroimisvälin kohdassa 1, kyseessä on epäoleellinen integraali. Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa 1.

$$A = \int\limits_0^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1-}\int_0^r \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 6$$

$$\int_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1+}\int_t^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 6$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

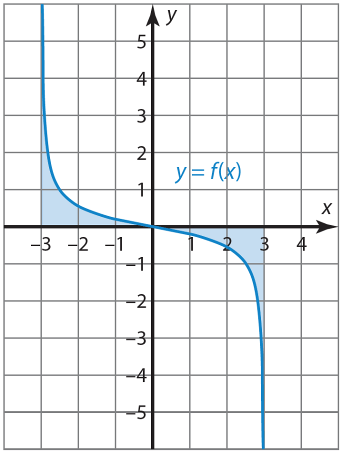
$$A = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 6 + 6 = 12$$

Vastaus
12

11.13

Funktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$



on määritelty, kun

$x+3>0$ eli kun $x>-3$
ja
$3-x>0$ eli kun $x<3$.

Tarkasteluvälinä on siis
avoin väli $-3<x<3$.

Kysytyn alueen pinta-ala on

$$A = \int_{-3}^{3} \left| \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \right| \mathrm{d}x .$$

Kyseessä on epäoleellinen integraali, koska funktio f ei ole määritelty tarkasteluvälin päätepisteissä.

Funktio saa positiivisia arvoja, kun $x<3$ ja negatiivisia arvoja, kun $x>3$.
Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{3} \left| \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \right) \mathrm{d}x . \\
&= \int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to -3} \int_{r}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to -3} \int_{r}^{0} (x+3)^{-\frac{1}{2}} - (3-x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to -3} \int_{r}^{0} \underbrace{1}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(x+3)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} + \underbrace{(-1)}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(3-x)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to -3} \Big/_{r}^{0} \underbrace{2(x+3)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))} + \underbrace{2(3-x)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))} \,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to -3} \left(\left(2\cdot(0+3)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(3-0)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(2\cdot(r+3)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(3-r)^{\frac{1}{2}} \right) \right)$$

$$= \left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}} + 2\cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) - \left(2\cdot(-3+3)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(3-(-3))^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 4\cdot 3^{\frac{1}{2}} - \left(2\cdot 0 + 2\cdot 6^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 3} \int_0^t (x+3)^{-\frac{1}{2}} + (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 3} \Big/_0^t 2(x+3)^{\frac{1}{2}} + 2(3-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 3} \left(2\cdot(t+3)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(3-t)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(2\cdot(0+3)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(3-0)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\cdot 6^{\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin pinta-ala on

$$A = \int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x - \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - (2\sqrt{6} - 4\sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$$

Vastaus

$8\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$

11.14

a) Funktio $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \\ &= \lim_{r\to-\infty} \mathop{/}_{r}^{0} \ln\left|e^x+1\right| \\ &= \lim_{r\to-\infty} \left(\ln\left|e^0+1\right| - \ln\left|e^r+1\right|\right) \\ &= \ln 2 - (-\infty) \\ &= \infty\end{aligned}$$

Koska epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ hajaantuu, myös

epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ hajaantuu.

b) Funktio $\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Jaetaan tutkittava integraali kahteen osaan kohdassa 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} dx \\
&= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} e^x\left(e^x+1\right)^{-2} dx \\
&= \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} -\left(e^x+1\right)^{-1} \\
&= -\lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} \frac{1}{e^x+1} \\
&= -\lim_{r\to-\infty}\left(\frac{1}{e^0+1}-\frac{1}{e^r+1}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} \frac{1}{e^x+1}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{e^0+1} \right)$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Vastaus
a) integraali hajaantuu
b) 1

11.15

a)

$$\int_0^\infty x^3 \cdot 5^{-x^4} \, \mathbf{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^3 \cdot 5^{-x^4} \, \mathbf{d}x$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{t\to\infty} \int_0^t \underbrace{-4x^3}_{s'(x)} \cdot \underbrace{5^{-x^4}}_{u(s(x))} \, \mathbf{d}x \qquad \left| \begin{array}{ll} s'(x) = -4x^3 & s(x) = -x^4 \\ u(x) = 5^x & U(x) = \dfrac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t \underbrace{\frac{5^{-x^4}}{\ln 5}}_{U(s(x))}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(\frac{5^{-t^4}}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(0 - \frac{1}{\ln 5} \right)$$

$$= \frac{1}{4 \ln 5}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x$$

$$= \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{r \to -\infty} \Big/_{r}^{0} \frac{5^{-x^4}}{\ln 5}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{r \to -\infty} \left(\frac{5^0}{\ln 5} - \frac{5^{-r^4}}{\ln 5} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\ln 5} - 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{4 \ln 5}$$

c) Koska epäoleelliset integraalit $\int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x$ ja $\int_{0}^{\infty} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x$ suppenevat, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} x^3 \cdot 5^{-x^4} \ \mathbf{d}x = \frac{1}{4 \ln 5} - \frac{1}{4 \ln 5} = 0$$

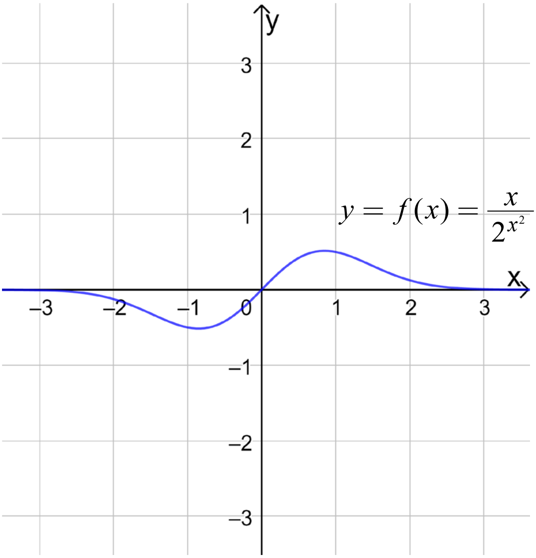
Vastaus

a) $\frac{1}{4 \ln 5}$

b) $-\frac{1}{4 \ln 5}$

c) 0

11.16



Funktio $f(x) = \frac{x}{2^{x^2}}$ on määritelty kaikkialla.

Funktio f saa negatiivisia arvoja kun $x < 0$ ja positiivisia arvoja kun $x > 0$, joten kuvaajan ja x-akselin rajaama pinta-ala on

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{0} -f(x) \,\mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x) \,\mathbf{d}x .$$

$$\int_{-\infty}^{0} -f(x)\ \mathbf{d}x = \int_{-\infty}^{0} -\frac{x}{2^{x^2}}\ \mathbf{d}x$$
$$= \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} -\frac{x}{2^{x^2}}\ \mathbf{d}x$$
$$= \frac{1}{2\ln 2}$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{2^{x^2}}\ \mathbf{d}x$$
$$= \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \frac{x}{2^{x^2}}\ \mathbf{d}x$$
$$= \frac{1}{2\ln 2}$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$A = -\int_{-\infty}^{0} f(x)\ \mathbf{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x$$
$$= \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}$$

Vastaus

$$\frac{1}{\ln 2}$$

11.17

$$f(x)=\begin{cases} x^4, \text{ jos } x=0 \text{ tai } x^4\le \dfrac{1}{x^4} \\ \dfrac{1}{x^4}, \text{ jos } \dfrac{1}{x^4}\le x^4. \end{cases}$$

Tarkastellaan epäyhtälöä $x^4\le \dfrac{1}{x^4}$.

$$x^4\le \frac{1}{x^4} \qquad |\cdot x^4 \quad (x\ne 0)$$

$$x^8\le 1$$

$$-1\le x\le 1, \text{ missä } x\ne 0$$

$$-1\le x<0 \text{ tai } 0<x\le 1$$

Tarkastellaan epäyhtälöä $\dfrac{1}{x^4}\le x^4$.

$$\frac{1}{x^4}\le x^4 \qquad |\cdot x^4 \quad (\ne 0)$$

$$1\le x^8$$

$$x^8\ge 1$$

$$x\le -1 \text{ tai } x\ge 1$$

Funktion määrittelyehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^4}, \text{ jos } x\le -1 \\ x^4, \text{ jos } -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^4}, \text{ jos } x\ge 1. \end{cases}$$

Lasketaan epäoleellinen integraali.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x+\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Lasketaan integraalin osat erikseen.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{-1} x^{-4}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} \ \Big/_{r}^{-1} -\frac{1}{3}x^{-3} \\
&= \lim_{r\to-\infty} \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^{-3} - \left(-\frac{1}{3}\cdot r^{-3}\right)\right) \\
&= \lim_{r\to-\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3r^3}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot(-\infty)} \\
&= \frac{1}{3} + 0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x &= \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 \\
&= \frac{1}{5}\cdot(-1)^5 - \frac{1}{5}\cdot 1^5 \\
&= -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-4}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \underset{1}{\overset{t}{/}} -\frac{1}{3}x^{-3}$$

$$= \lim_{r\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot t^{-3} - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^{-3}\right)\right)$$

$$= \lim_{r\to-\infty}\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3\cdot\infty} + \frac{1}{3}$$

$$= 0 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Koska kaikki kolme integraalia suppenevat, niin

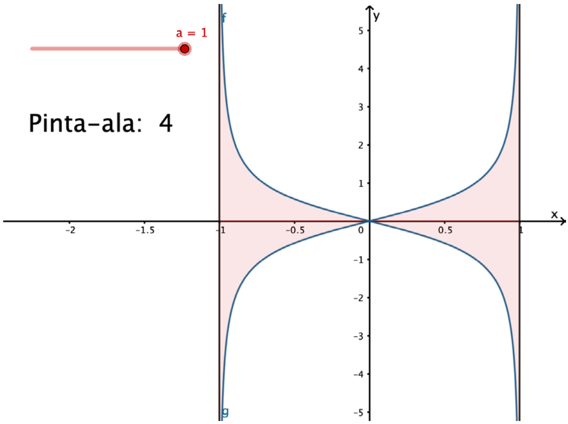
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{16}{15}$$

Vastaus

$$\frac{16}{15}$$

11.18

a)



Appletin avulla saadaan pinta-alaksi 4.

b) Ratkaistaan y käyrän yhtälöstä.

$$y^2(1-x^2)=x^2 \qquad \Big|:(1-x^2)\ \ (\neq 0)$$

$$y^2=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=\frac{|\,x\,|}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{tai} \quad y=-\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=-\frac{|\,x\,|}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ratkaistaan määrittelyehto.

$$1-x^2>0$$
$$-1<x<1$$

Aluetta rajaavat

- yläpuolelta funktio $f(x)=\dfrac{|\,x\,|}{\sqrt{1-x^2}}$, missä $-1<x<1$
- alapuolelta funktio $-f(x)=-\dfrac{|\,x\,|}{\sqrt{1-x^2}}$, missä $-1<x<1$

- vasemmalta suora $x=-a$, missä $0\leq a<1$

- oikealta suora $x=a$, missä $0\leq a<1$

Määritetään pinta-ala laskemalla epäoleellinen integraali.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} f(x) - (-f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 2f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to 1} \int_{-a}^{a} 2 \cdot \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x && \Big|\ \text{Integroitava funktio on parillinen.} \\
&= \lim_{a\to 1} \left(2 \cdot \int_{0}^{a} 2 \cdot \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \right) && \Big|\ |x| = x, \text{ kun } x \geq 0 \\
&= 4 \cdot \lim_{a\to 1} \int_{0}^{a} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
&= 4 \cdot \lim_{a\to 1} (-\sqrt{1-a^2} + 1) \\
&= 4 \cdot (-\sqrt{0} + 1) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) 4

b) 4

11.19

a) Tapa 1: Käytetään sinifunktion parittomuutta.

$$\lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{s}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \left|\begin{array}{l}\sin x \text{ on pariton funktio eli}\\ \sin(-x)=-\sin x.\end{array}\right.$$

$$=\lim_{s\to\infty} 0$$

$$=0$$

Tapa 2: Käytetään kosinifunktion parillisuutta.

$$\lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{s}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{s\to\infty}\Big/_{-s}^{s}(-\cos x)$$

$$=\lim_{s\to\infty}(-\cos s-(-\cos(-s))$$

$$=\lim_{s\to\infty}(-\cos s+\cos(-s)) \qquad \left|\begin{array}{l}\cos x \text{ on parillinen funktio eli}\\ \cos(-x)=\cos x.\end{array}\right.$$

$$=\lim_{s\to\infty}(-\cos s+\cos s)$$

$$=\lim_{s\to\infty} 0$$

$$=0$$

b) Jaetaan integraali $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$ kahteen osaan kohdassa $x=0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan integraalin osat erikseen.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sin x \mathrm{d}x &= \lim_{s\to\infty} \int_0^{s} \sin x \mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to\infty} \Big/_0^{s} (-\cos x) \\
&= \lim_{s\to\infty} (-\cos s - (-\cos 0)) \\
&= \lim_{s\to\infty} (-\cos s + 1) \\
&= \lim_{s\to\infty} (1 - \cos s)
\end{aligned}
$$

$\cos s$ saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$ jokaisella 2π -pituisella välillä $s \in [s_i, s_i + 2\pi]$. Näin s:n arvon kasvaessa rajatta, lauseke $1 - \cos s$ saa kaikki arvot väliltä $[0, 2]$ jokaisella 2π -pituisella välillä $s \in [s_i, s_i + 2\pi]$. Raja-arvoa $\lim_{s\to\infty} (1 - \cos s)$ ei siis ole olemassa.

Koska epäoleellinen integraali $\int_0^{\infty} \sin x \mathrm{d}x$ hajaantuu, myös epäoleellinen integraali hajaantuu.

Vastaus
a) 0
b) hajaantuu

11.20

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t$$

Esitetään lauseke $|\,t-x\,|$ ilman itseisarvomerkkejä.

$$|\,t-x\,|=\begin{cases} t-x, \text{ kun } t-x\geq 0 \\ -(t-x), \text{ kun } t-x<0 \end{cases}=\begin{cases} t-x, \text{ kun } t\geq x \\ x-t, \text{ kun } t<x \end{cases}$$

Jaetaan funktion f lausekkeessa oleva epäoleellinen integraali kahteen osaan kohdassa $t=x$.

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t \\ &=\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t+\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t \qquad \left|\begin{array}{l} |\,t-x\,|=t-x, \text{ kun } t\geq x \\ |\,t-x\,|=x-t, \text{ kun } t<x \end{array}\right. \\ &=\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(x-t)}\mathrm{d}t+\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-(t-x)}\mathrm{d}t \\ &=\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t+\int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t \\ &=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{x} \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t+\lim_{r\to\infty}\int_{x}^{r} \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Lasketaan epäoleelliset integraalit erikseen.

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{x} e^{t-x}\,\mathrm{d}t &= \lim_{r\to\infty} \Big/_{\!\!-r}^{\,x} e^{t-x} \qquad \Big| \int e^{t-x}\,\mathrm{d}t = e^{t-x} + C \\
&= \lim_{r\to\infty} (e^{x-x} - e^{-r-x}) \\
&= e^{0} - e^{-\infty-x} \\
&= 1 - e^{-\infty} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\int\limits_{x}^{r} e^{x-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{r\to\infty} \Big/_{\!\!x}^{\,r} e^{x-t} \qquad \Big| \int e^{x-t}\,\mathrm{d}t = -e^{t-x} + C \\
&= \lim_{r\to\infty} (-e^{x-r} - (-e^{x-x})) \\
&= \lim_{r\to\infty} (-e^{x-r} + e^{0}) \\
&= -e^{x-\infty} + 1 \\
&= -e^{-\infty} + 1 \\
&= 0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Koska molemmat integraalit suppenevat, niin

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{x} \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t + \lim_{r\to\infty} \int_{x}^{r} \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{d}t \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Funktio $f(x)=2$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten f on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Vastaus
$f(x)=2$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

11.21

Väite: Integraalin $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ervo ei riipu
luvun c valinnasta.

Todistus:

On osoitettava, että integraalien

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

ja

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

arvot ovat yhtä suuret riippumatta vakioiden c ja d valinnasta.

Tarkastellaan integraalien erotusta. Olkoon $c < d$.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \left(\int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \left(\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{d}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Koska integraalien erotus on nolla kaikilla $c < d$, integraalin arvo ei riipu vakion c valinnasta. $\square$

Huomaa, että oletus $c < d$ ei ole välttämätön, riittäisi olettaa pelkästään $c \neq d$, mutta oletus $c < d$ saattaa helpottaa ajattelua.