10.1

a)

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_2^t 4x^{-5}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{2}^{t} \frac{4}{-4}x^{-4} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{2}^{t} -\frac{1}{x^4} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t^4}-\left(-\frac{1}{2^4}\right)\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{2^4}\right) \\
&= 0+\frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-3} \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-3} \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to-\infty} \mathop{/}_{t}^{-3} 5\ln|x| \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left(5\ln|-3| - 5\ln|t|\right) \\ &= 5\ln 3 - \infty \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

Vastaus

a) $\frac{1}{16}$

b) integraali hajaantuu

10.2

a)

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big/_1^t - \mathrm{e}^{-x}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-1}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}}$$

b)

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \Big/_t^0 \mathrm{e}^{x}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{t}\right)$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^x \ dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^x \ dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} e^x \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(e^t - e^0\right) \\ &= \infty - 0 \\ &= \infty\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

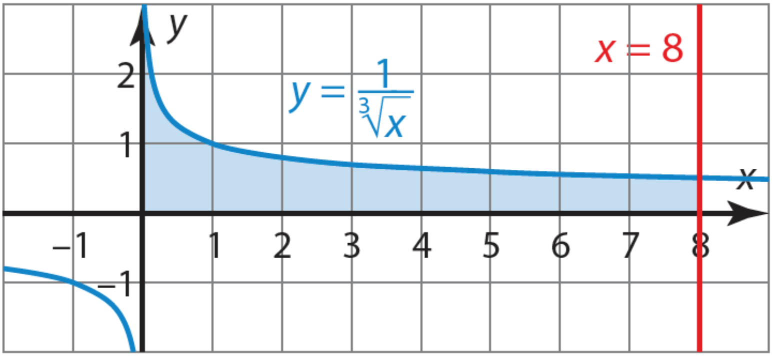
Vastaus

a) $\frac{1}{e}$

b) 1

c) hajaantuu

10.3



Funktio $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Kun $x > 0$, funktio f saa vain positiivisia arvoja,

joten kysytty pinta-ala $A = \int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin alkupisteessä 0, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$A = \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t \to 0+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t \to 0+} \int_t^8 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t \to 0+} \Big/_{t}^{8} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \Big/_{t}^{8} \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \left(\frac{3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3 \cdot t^{\frac{2}{3}}}{2} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{3 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3 \cdot t^{\frac{2}{3}}}{2} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0+} \left(\frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt[3]{t^2}}{2} \right)$$

$$= \frac{12}{2} - 0$$

$$= 6$$

Vastaus

6

10.4

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ on määritelty, kun $x>0$. Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala $A=\int_0^1 f(x)\,dx$.

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin alkupisteessä 0, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+}\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+}\Big/_{t}^{1}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{t\to 0+}\Big/_{t}^{1} 2\sqrt{x} \\
&= \lim_{t\to 0+}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{t}\right) \\
&= 2-0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x}$ on määritelty, kun $x\neq 0$. Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala $A=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin alkupisteessä 0, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+} \mathop{/}_{t}^{1} \ln|x| \\
&= \lim_{t\to 0+}\left(\ln|1|-\ln|t|\right) \\
&= 0-(-\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Kuvaajan ja koordinaatiostoakselien rajaama pinta-ala on äärettömän suuri.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Funktio f saa vain

positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala $A=\int_0^1 f(x)\,\mathbf{d}x$.

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin alkupisteessä 0, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+} \int_t^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0+} \Big/_{t}^{1} \frac{x^{-1}}{-1} \\
&= \lim_{t\to 0+} \Big/_{t}^{1} -\frac{1}{x} \\
&= \lim_{t\to 0+} \left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{t}\right) \\
&= -(-\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

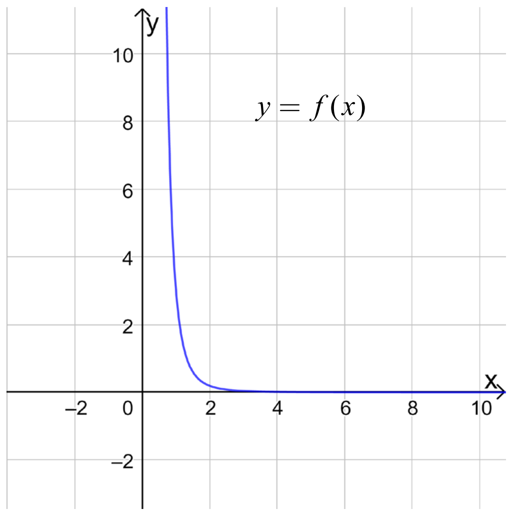
Kuvaajan ja koordinaatiostoakselien rajaama pinta-ala on äärettömän suuri.

Vastaus

a) 2 **b)** äärettömän suuri **c)** äärettömän suuri

10.5

a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.

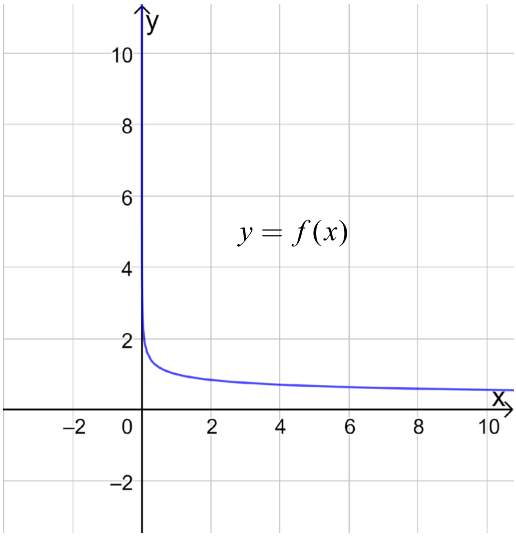


Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali

$$V = \pi \int_1^{\infty} r^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^{\infty} \left(f\left(x\right)\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^\infty \left(f\left(x\right)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_1^\infty \left(3x^{-4}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t \to \infty} \int_1^t 3^2 \cdot x^{-8} \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t \to \infty} \int_1^t 9 \cdot x^{-8} \ \mathrm{d}x \\
&= 9\pi \cdot \lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-8} \ \mathrm{d}x \\
&= -9\pi \cdot \lim_{t \to \infty} \Big/_1^t \frac{1}{7} x^{-7} \\
&= -9\pi \cdot \lim_{t \to \infty} \Big/_1^t \frac{1}{7x^7} \\
&= -9\pi \cdot \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{7t^7} - \frac{1}{7 \cdot 1^7} \right) \\
&= -9\pi \left(0 - \frac{1}{7} \right) \\
&= \frac{9\pi}{7}
\end{aligned}
$$

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali

$$V = \pi\int_1^\infty r^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^\infty \left(f\left(x\right)\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{1}^{\infty}\left(f\left(x\right)\right)^{2}\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_{1}^{\infty}\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{2}\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} x^{-\frac{2}{4}}\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \pi\cdot\lim_{t\to\infty}\mathop{/}_{1}^{t}\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \\
&= \pi\cdot\lim_{t\to\infty}\mathop{/}_{1}^{t}2\sqrt{x} \\
&= 2\pi\cdot\lim_{t\to\infty}\mathop{/}_{1}^{t}\sqrt{x} \\
&= 2\pi\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t}-\sqrt{1}\right) \\
&= 2\pi\left(\infty-1\right) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $\frac{9\boldsymbol{\pi}}{7}$

b) Kappaleen tilavuus on äärettömän suuri.

10.6

a)

$$\int_1^\infty \frac{3x^2}{x^3+5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{3x^2}{x^3+5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \mathop{/}_{1}^{t} \ln\left|x^3+5\right|$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln\left|t^3+5\right| - \ln\left|1^3+5\right|\right)$$

$$= \infty - \ln 6$$

$$= \infty$$

Integraali hajaantuu.

b)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^{t} 2(2x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \Big/_0^t -(2x+3)^{-1}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \Big/_0^t \frac{-1}{2x+3}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2t+3} - \frac{-1}{2\cdot 0+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

Vastaus

a) integraali hajaantuu

b) $\frac{1}{6}$

10.7

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$, oikea vastaus **3**

b) $\displaystyle\int_3^{4} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 3+} \int_t^{4} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$, oikea vastaus **6**

c) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 3-} \int_{-3}^{t} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$, oikea vastaus **4**

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to -\infty} \int_t^{1} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x$, oikea vastaus **1**

Vastaus
a) 3 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 1

10.8

a)

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} 2\sqrt{x} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(2\sqrt{t} - 2\sqrt{1}\right) \\
&= \infty - 2 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

b)

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\Big/_1^{t}\ln|x|\\ &= \lim_{t\to\infty}\big(\ln|t|-\ln|1|\big)\\ &= \infty-0\\ &= \infty\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

c)

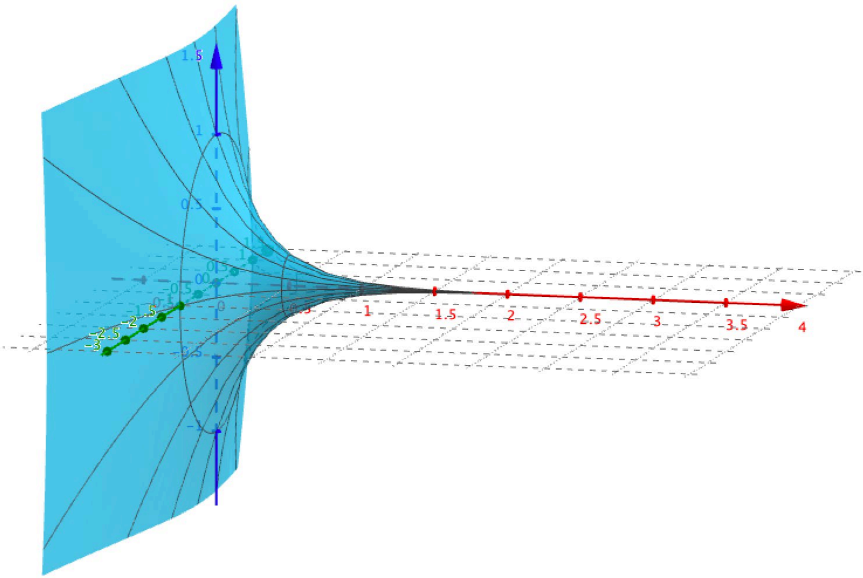
$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}x^{-2}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\Big/_1^{t}\frac{x^{-1}}{-1}\\ &= \lim_{t\to\infty}\Big/_1^{t}-\frac{1}{x}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{1}\right)\\ &= 0+1\\ &= 1\end{aligned}$$

Vastaus

a) integraali hajaantuu **b)** integraali hajaantuu **c)** 1

10.9

a)



Kappaleen tilavuus on appletin mukaan 0,5.

b)

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \pi \int_0^a f(x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^a (\mathrm{e}^{-\pi x})^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1 - \mathrm{e}^{-a\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{a \to \infty} V(a) = \lim_{a \to \infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-a\pi}}{2} = \frac{1}{2}
$$

Vastaus

$\frac{1}{2}$

10.10

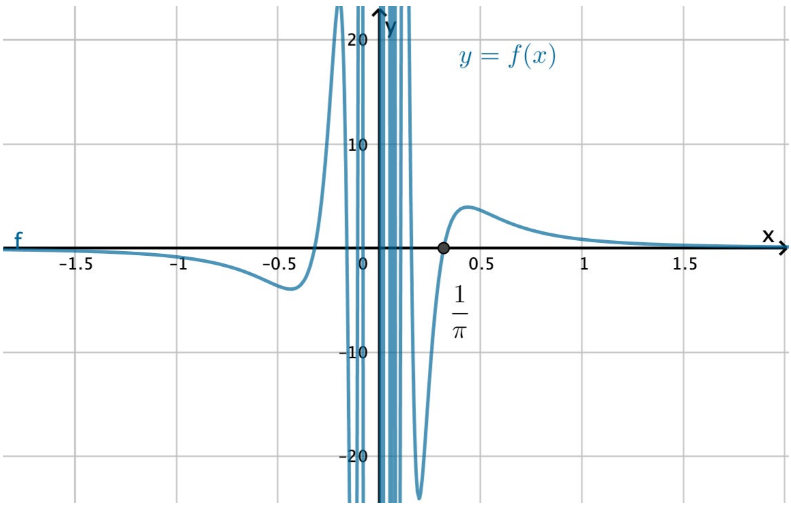
Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, missä $x\neq 0$, suurin nollakohta on a.

Ratkaistaan a.

$$
\begin{aligned}
f(x)&=0 \\
\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}&=0 && \Big|\cdot x^2 \quad (>0) \\
\sin\frac{1}{x}&=0 \\
\frac{1}{x}&=n\cdot\pi \\
x&=\frac{1}{n\cdot\pi}
\end{aligned}
$$

Funktion nollakohdat ovat $x=\frac{1}{n\cdot\pi}$, missä $n\in\mathbf{Z}$ ja $n\neq 0$.

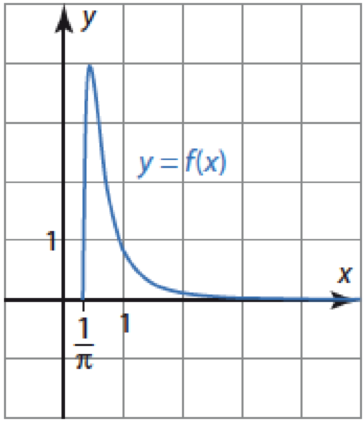
Suurin mahdollinen nollakohta saadaan kun $n=1$, joten $a=\frac{1}{\pi}$.



Kun $x \geq \frac{1}{\pi}$, funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten

kysytty pinta-ala

$$A = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$



$$A = \int_{\frac{1}{\pi}}^{t} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{\frac{1}{\pi}}^{t} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \lim_{t\to\infty} \Big/_{\frac{1}{\pi}}^{t} \cos\frac{1}{x} = \lim_{t\to\infty}\left(\cos\frac{1}{t} - \cos\pi\right)$$

$$= 1-(-1) = 2$$

Kuvaajan ja koordinaatiostoakselien rajaama pinta-ala välillä $[\frac{1}{\pi},\infty[$ on 2.

Vastaus

Pinta-ala on 2 $\left(a = \frac{1}{\pi}\right)$

10.11

a)

$$\int_1^\infty 6x^{-4}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t 6x^{-4}\ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big/_1^t \frac{6}{-3}x^{-3}$$

$$= -2\cdot \lim_{t\to\infty} \Big/_1^t \frac{1}{x^3}$$

$$= -2\cdot \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{1^3}\right)$$

$$= -2\cdot\left(0-1\right)$$

$$= 2$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{4} \frac{x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{4} \frac{x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{4} \frac{2x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to-\infty} \overset{4}{\underset{t}{/}} \ln\left|x^2+5\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to-\infty} \left(\ln\left|4^2+5\right| - \ln\left|t^2+5\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot \left(\ln|21| - \infty\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

Vastaus
a) 2
b) integraali hajaantuu

10.12

a)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{x}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\cdot \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{6x}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\cdot \lim_{t\to-\infty} \Big/_{t}^{0} \ln\left|3x^2+2\right| \\
&= \frac{1}{6}\cdot \lim_{t\to-\infty} \left(\ln\left|3\cdot 0^2+2\right| - \ln\left|3t^2+2\right|\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\ln 2 - \infty\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

Integraali hajaantuu.

b)

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty 2^{-x}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t 2^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{t\to\infty}\int_1^t -1\cdot 2^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{t\to\infty} \underset{1}{\overset{t}{/}}\frac{2^{-x}}{\ln 2} \\
&= -\left(\frac{2^{-t}}{\ln 2}-\frac{2^{-1}}{\ln 2}\right) \\
&= -\left(0-\frac{1}{2\ln 2}\right) \\
&= \frac{1}{2\ln 2} \quad (=\frac{1}{\ln 4})
\end{aligned}$$

Vastaus

a) integraali hajaantuu

b) $\frac{1}{2\ln 2}$

10.13

Funktio $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$ on määritelty, kun $1 - x > 0$, eli kun $x < 1$.

Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala

$$A = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin päätepisteessä 1, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$A = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \cdot \lim_{t\to 1-} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2 \cdot \lim_{t\to 1-} \int_0^t -1 \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2 \cdot \lim_{t\to 1-} \Big/_0^t \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -2 \cdot \lim_{t\to 1-} \Big/_0^t 2\sqrt{1-x}$$

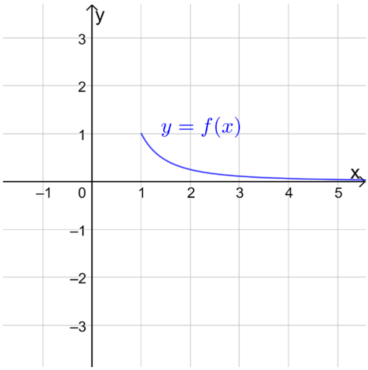
$$= -2 \cdot \lim_{t\to 1-} \left(2\sqrt{1-t} - 2\sqrt{1-0}\right) = -2 \cdot (0-2) = 4$$

Vastaus

4

10.14

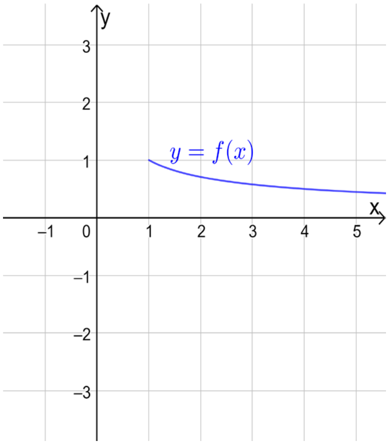
a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi\int_1^\infty r^2\ \mathrm{d}x = \pi\int_1^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-4}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi\int_1^\infty r^2 \, \mathrm{d}x = \pi\int_1^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

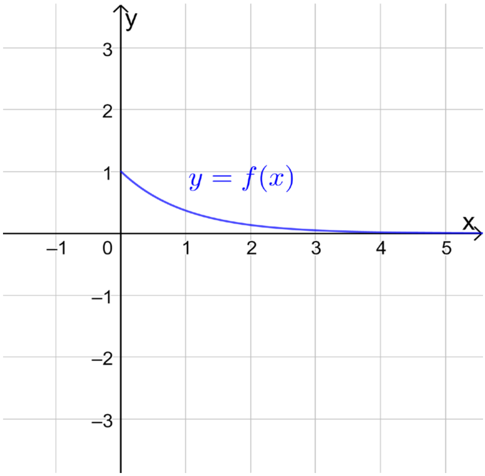
Vastaus

a) $\frac{\pi}{3}$

b) äärettömän suuri

10.15

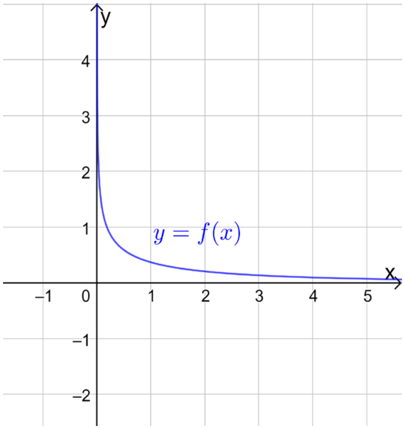
a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi \int_0^\infty r^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^\infty (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
V &= \boldsymbol{\pi} \int_0^\infty (f(x))^2 \, \mathbf{d}x \\
&= \boldsymbol{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mathbf{e}^x} \right)^2 \mathbf{d}x \\
&= \boldsymbol{\pi} \cdot \lim_{t \to \infty} \int_0^t \mathbf{e}^{-2x} \mathbf{d}x \\
&= \frac{\boldsymbol{\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä pyörähtävä alue.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi \int_0^\infty r^2 \, \mathbf{d}x = \pi \int_0^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathbf{d}x$.

$$
\begin{aligned}
V &= \boldsymbol{\pi} \int_0^\infty \left(f(x)\right)^2 \mathbf{d}x \\
&= \boldsymbol{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}\mathbf{e}^{\sqrt{x}}} \right)^2 \mathbf{d}x \\
&= \boldsymbol{\pi} \cdot \lim_{t \to \infty} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}\mathbf{e}^{\sqrt{x}}} \right)^2 \mathbf{d}x \\
&= \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}
$$

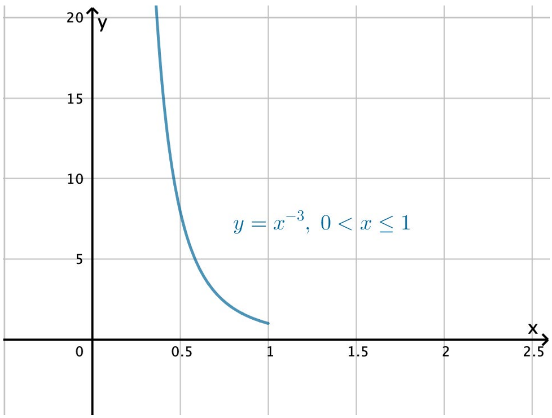
Vastaus

a) $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}$

b) $\boldsymbol{\pi}$

10.16

a) Funktio $f(x) = x^{-3}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.



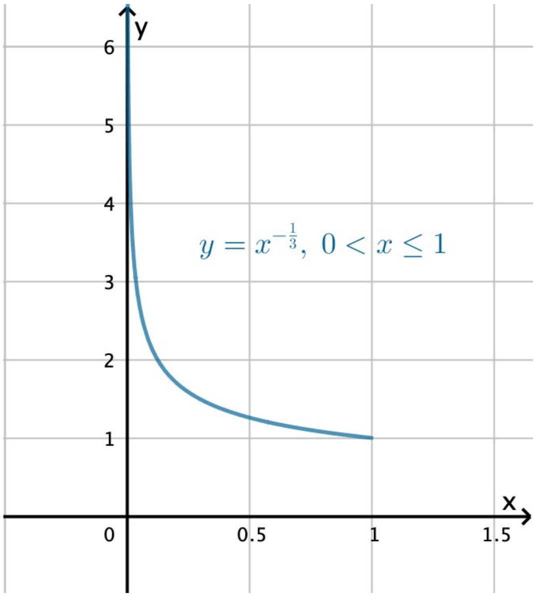
$f(1) = 1^{-3} = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 0} x^{-3} = \infty$, joten pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi \int_1^{\infty} r^2\ \mathrm{d}y = \pi \int_1^{\infty} x^2 \mathrm{d}y$.

Määritetään pyörähdyskappaleen säde x.

$$
\begin{aligned}
y &= x^{-3} \\
y^{-\frac{1}{3}} &= x^1 \\
x &= y^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{1}^{\infty} x^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{1}^{\infty} (y^{-\frac{1}{3}})^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t \to 0} \int_{1}^{t} x^{-\frac{2}{3}} \ \mathrm{d}x \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

b) Funktio $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.



$f(1) = 1^{-\frac{1}{3}} = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 0} x^{-\frac{1}{3}} = \infty$, joten pyörähdyskappaleen tilavuus

saadaan laskemalla epäoleellinen integraali $V = \pi \int_1^\infty r^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_1^\infty x^2 \mathrm{d}y$.

Määritetään pyörähdyskasppaleen säde x.

$$
\begin{aligned}
y &= x^{-\frac{1}{3}} \\
y^{-3} &= x^1 \\
x &= y^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{1}^{\infty} x^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{1}^{\infty} (y^{-3})^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \lim_{t \to 0} \int_{1}^{t} x^{-6} \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) kappaleen tilavuus on äärettömän suuri

b) $\frac{\pi}{5}$

10.17

Käyrä $y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, sekä suorat $y = 0,\ x = 0$ sekä suora $x = -a \ \ (a > 0)$ rajaavat pinta-alan.

Funktio $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla. Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala $A = \displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-a}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}{}^{(\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} \overbrace{\mathrm{e}^x}^{s'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\!-a}^{0}\ \underbrace{\ln\left|1+\mathrm{e}^x\right|}_{U(s(x))} \\
&= \ln\left|1+\mathrm{e}^0\right| - \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a}\right| \\
&= \ln|2| - \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a}\right| \\
&= \ln 2 - \ln(1+\mathrm{e}^{-a})
\end{aligned}
$$

Lasketaan pinta-alan raja-arvo, kun $a \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} A(a) &= \lim_{a\to\infty}\left(\ln 2 - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-a}\right)\right)\\ &= \ln 2 - \ln(1+0)\\ &= \ln 2 - \ln 1\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Vastaus

$A(a) = \ln 2 - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-a}\right) \to \ln 2,\ \ \text{kun}\ \ a \to \infty$

10.18

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty} \overset{t}{\underset{1}{/}} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \overset{t}{\underset{1}{/}} \frac{1}{1-p} x^{1-p}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}\cdot t^{1-p} - \frac{1}{1-p}\cdot 1^{1-p}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}\cdot \frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\cdot 1\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)\cdot \frac{1}{1-p}$$

Funktiolla $\frac{1}{t^{p-1}}$ on äärellinen raja-arvo äärettömyydessä,
kun $p-1 \geq 0$ eli kun $p \geq 1$.

Toisaalta lauseke $\frac{1}{1-p}$ on määritelty vain, kun $p \neq 1$.

Siis epäoleellinen integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ suppenee kun $p > 1$.

Vastaus
$p > 1$

10.19

a) Derivoidaan funktio $f(x) = x\ln x - x$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\ln x - x && \Big|\, \text{on oltava } x > 0 \\
f'(x) &= 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} - 1 \\
&= \ln x + 1 - 1 \\
&= \ln x
\end{aligned}
$$

Funktion $f(x)$ derivaattafunktio on $f'(x) = \ln x$, kun $x > 0$.

b) Funktio $g(x) = \ln x$ saa vain negatiivisia arvoja välillä $]\,0,1]$, joten kysytty pinta-ala $A = -\lim\limits_{t\to 0+}\int_t^1 g(x)\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
A &= -\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \ln x\ \mathrm{d}x && \Big|\, \begin{array}{l}\text{a-kohdan perusteella} \\ \int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.\end{array} \\
&= -\lim_{t\to 0+} \mathop{/}_t^1 \big(x\ln x - x\big) \\
&= -\lim_{t\to 0+} \big(1\cdot\ln 1 - 1 - (t\cdot \ln t - t)\big) \\
&= -(0 - 1 - (0 - 0)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $f'(x) = \ln x$, kun $x > 0$

b) 1

10.20

a) Lasketaan pyörähdyskappaleen pinta-ala.

$$A = 2\pi\int_{1}^{\infty} |\, f(x)\,| \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{1}^{\infty} \left|\frac{1}{x}\right| \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{1}^{\infty} \left|\frac{1}{x}\right| \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{t \to 0}\int_{1}^{t} \left|\frac{1}{x}\right| \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

$$= \infty$$

Gabrielin torven pinta-ala on äärettömän suuri.

b) Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi\int_{1}^{\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi \cdot \lim_{t \to 0}\int_{1}^{t} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

$$= \pi \quad (\mathrm{dm}^3)$$

Gabrielin torven tilavuus on $\pi\ \mathrm{dm}^3 = \pi\ \mathrm{L}$.

c) Koska Gabrielin torven pinta-ala on äärettömän suuri, sen ulkopinnan maalaamiseen ei riitä mikään maalimäärä.

d) Sisäpinnan maalaamiseen riittää $\pi\ \mathrm{L} \approx 3{,}2\ \mathrm{L}$ maalia. Kappale voidaan täyttää maalilla, jolloin sisäpinta tulee maalattua.

(On tietysti käytettävä teoreettista matematiikkamaalia, joka tunkeutuu myös äärettömän ohueen torveen koko matkalta.

Vastaus

a) äärettömän suuri

b) $\pi\ \mathrm{dm}^3$

c) Ulkopinnan maalaamiseen ei riitä mikään maalimäärä..

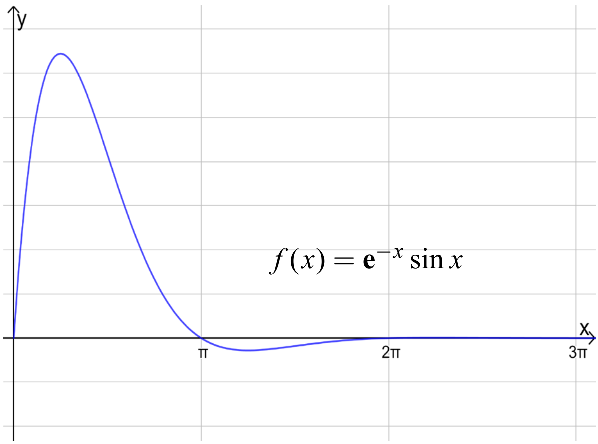
d) Sisäpinnan maalaamiseen tarvitaan korkeintaan 3,2 L maalia.

10.21

Laskataan funktion $f(x) = \mathbf{e}^{-x}\left(\sin x + \cos x\right)$ derivaatta.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\mathbf{e}^{-x} \cdot (\sin x + \cos x) + \mathbf{e}^{-x} \cdot \mathrm{D}(\sin x + \cos x) \\
&= -\mathbf{e}^{-x} \cdot (\sin x + \cos x) + \mathbf{e}^{-x} \cdot (\cos x - \sin x) \\
&= -\mathbf{e}^{-x} \sin x - \mathbf{e}^{-x} \cos x + \mathbf{e}^{-x} \cos x - \mathbf{e}^{-x} \sin x \\
&= -2\mathbf{e}^{-x} \sin x
\end{aligned}$$

Lasketaan integraali $\int_0^\infty \left|\mathbf{e}^{-x} \sin x\right| \, \mathbf{d}x$. Funktio $\mathbf{e}^{-x} \sin x$ leikkaa positiivisen x-akselin sinin nollakohdissa, eli kohdissa $x = n\pi$, missä $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.



Alue A_0 on siis x-akselin yläpuolella, A_1 alapuolella, A_2 yläpuolella jne. Yleisesti parilliset alueet ovat x-akselin yläpuolella ja parittomat alapuolella. Pinta-ala voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| e^{-x} \sin x \right| \, dx \qquad \left| \begin{array}{l} (-1)^n = 1, \text{ kun } n \text{ on parillinen ja} \\ (-1)^n = -1, \text{ kun } n \text{ on pariton.} \end{array} \right.$$

$$= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -2e^{-x} \sin x \, dx \quad \left| \int -2e^{-x} \sin x \, dx = e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \Big/_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \left(e^{-(n+1)\pi} \big(\underbrace{\sin(n+1)\pi}_{=0} + \underbrace{\cos(n+1)\pi}_{=(-1)^{n+1}} \big) - e^{-n\pi} \big(\underbrace{\sin n\pi}_{=0} + \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} \big) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \left(e^{-(n+1)\pi} \cdot (-1)^{n+1} - e^{-n\pi} \cdot (-1)^n \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \left((e^{-\pi})^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} - (e^{-\pi})^n \cdot (-1)^n \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \left((-e^{-\pi})^{n+1} - (-e^{-\pi})^n \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot (-e^{-\pi})^n \cdot \left(-e^{-\pi} - 1 \right)$$

Kahden peräkkäisen alueen pinta-alan suhde on

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1} \left(-e^{-\pi}\right)^{n+1} \left(-e^{-\pi} - 1\right)}{-\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \left(-e^{-\pi}\right)^n \left(-e^{-\pi} - 1\right)} = -\left(-e^{-\pi}\right) = e^{-\pi} = \frac{1}{e^{\pi}}.$$

Koska suhteen arvo indeksistä n riippumaton vakio, muodostavat alueiden A_n pinta-alat geometrisen jonon. $\square$

Integraalin $\int_0^\infty \left|\mathbf{e}^{-x}\sin x\right| \,\mathbf{d}x$ arvo on edellisen perusteella alueiden A_n, missä $n = 0, 1, 2, \ldots,$ pinta-alojen muodostama päättymätön geometrinen summa, jossa ensimmäinen termi on

$$A_0 = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^0\cdot(-\mathbf{e}^{-\pi})^0\cdot(-\mathbf{e}^{-\pi}-1) = -\frac{1}{2}(-\mathbf{e}^{-\pi}-1) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{-\pi}+1)$$

ja suhdeluku $q = \mathrm{e}^{-\pi} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}}$. Jonon suhdeluvulle pätee $0 < \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}} < 1$.

$$\int_0^\infty \left|\mathbf{e}^{-x}\sin x\right| \,\mathbf{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\mathbf{e}^{-x}\sin x\right| \,\mathbf{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} A_n$$

$$= \lim_{k\to\infty} S_k$$

geometrinen summa $S_k = \frac{a_1(1-q^k)}{1-q}$

Sijoitetaan $a_1 = A_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+1)$

ja $q = \mathrm{e}^{-\pi}$.

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+1)\cdot(1-\overbrace{(\mathrm{e}^{-\pi})^k}^{\to 0})}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}}+1}{2-\frac{2}{\mathrm{e}^{\pi}}} \quad (\mathrm{e}^{\pi}$$

$$= \frac{1+\mathbf{e}^{\pi}}{\mathbf{2e}^{\pi}-2} = \frac{\mathbf{e}^{\pi}+1}{\mathbf{2e}^{\pi}-2}$$

Vastaus

$$f'(x) = -2\mathbf{e}^{-x}\sin x$$

ja

$$\int_0^{\infty} \left|\mathbf{e}^{-x}\sin x\right| \, \mathbf{d}x = \frac{\mathbf{e}^{\boldsymbol{\pi}} + 1}{\mathbf{2e}^{\boldsymbol{\pi}} - 2}$$