

Luku 5 Kertaus

Kertaustunti voidaan pitää tarvittaessa.

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja kertaus (5 min)
- Tehtävät 1-7 pienryhmissä ja/tai opettajan kanssa (30 min)
- Itsearviointi ja palaute (10 min)

Tunnin tavoitteet: Harjoitellaan yhtälönratkaisua kerraten kursilla käytyjä asioita.

Toimintaohje: Tehtäviä voidaan laskea pienryhmissä ja/tai opettajan valinnan mukaan osin käydä välillä läpi yhdessä. Tehtäviä voi perustella suullisesti ryhmäkavereille, mutta kannattaa sanoa, että tulee osata myös kirjoittaa.

Tehtävä 1 Kerratkaa oppimanne asiat yhdessä keskustellen.

- Samanmuotoiset termit
- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön totuusarvon tutkiminen
- Yhtälön ratkaisun etsiminen
- Yhtälön ratkaisun tarkistaminen
- Eri muunnokset ja niiden käyttäminen
- Tyyppiä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen

Toimintaohje: Tehtävässä 1 oppilaat kuvailevat omin sanoin toisilleen äänneen kurssin keskeisimpiä ideoita.

Tehtävä 2 Tutki, ovatko seuraavat yhtälöt tosia vai epätosia. Perustele vastauksesi suullisesti.

a) $6 \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12$

$6 \cdot 12 = 6 \cdot 12$

tosia, molemmilta puolilla yhtälöä on yhtä paljon ($6 \cdot 12 = 72$).

b) $3 + 2 = 8$

$5 \neq 8$

epätosia, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on 5 ja oikealla 8.

c) $y + 2 = 4 + 5$

$y + 2 = 9$

tosia, kun muuttujan y arvo on 7, muulloin epätosia.

d) $-180 = -(-180)$

$-180 \neq 180$

epätosia, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on -180 ja oikealla 180.

Tehtävä 3

a) Laske lausekkeen $3x - 5$ arvo, kun $x = -2$.

Sijoitetaan muuttujan x arvo lausekkeeseen, $3(-2) - 5 = -6 - 5 = -11$ eli lausekkeen arvo on -11.

b) Onko alla yhtälö/yhtälöitä, joiden ratkaisu on $x = 3$?

$x + 5 = x + 5$

$x^2 = 4$

$2x = 5 + 1$

$x + 3 = 4$

$2(x - 3) = 0$



$4 = x + x$

Vastaus ja perustelu: *Kyllä, yhtälöt $2x = 5 + 1$, $x + 5 = x + 5$ ja $2(x - 3) = 0$. Sijoittamalla niihin muuttujan x paikalle 3 saadaan yhtälö, joka on tosia.*

Tehtävä 4 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Sanallinen selitys |
|--------------------------|----------------|--|
| $-5 - y = y + 2$ | | |
| $-5 - y + y = y + y + 2$ | L y | <u>Lisään</u> molemmille puolille y : n . |
| $-5 = 2y + 2$ | M M | Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>$-y + y$</u> vasemmalla ja <u>$y + y$</u> oikealla puolella. |
| $-5 - 2 = 2y + 2 - 2$ | V2 | <u>Vähennän</u> puolittain luvun 2. |
| $-7 = 2y$ | M M | Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla laskut <u>$-5 - 2$</u> ja <u>$+2 - 2$</u> . |
| $-\frac{7}{2} = y$ | J 2 M M | Jaan yhtälön molempia puolia luvulla <u>2</u> ja muokkaan lausekkeita. Yhtälön ratkaisu on <u>$-\frac{7}{2}$</u> . (tai $y = -\frac{7}{2}$) |

Tehtävä 5 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ seuraavilla tavoilla.

| | Kallen ratkaisu | Leenan ratkaisu | |
|---|---------------------------------|-------------------------|---|
|  | $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ | $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ | Huom. Tehtävässä 5 sekä Kalle että Leena ovat tehneet virheen, vaikka vastaus on sama. Kalle on laskenut virheellisesti vaiheen $5 - 5$ ja Leena vaiheen $3x + 2$. Kysy oppilailta, millaisia ajatuksia tämä heissä herättää? |
| | $2x + 5 - 5 = 3x - 3 + 5 - 5$ | $2x + 5 = 3x + 2$ | |
| | $2x + 5 = 3x - 3$ | $2x + 5 = 5x$ | |
| | $2x - 2x + 5 = 3x - 2x - 3 + 3$ | $2x = 5x - 5$ | |
| | $5 = 3x - 2x$ | $2x - 2x = 5x - 5 - 2x$ | |
| | $5 = x$ | $0 = 3x - 5$ | |
| | | $0 + 5 = 3x - 5 + 5$ |  |
| | | $5 = x$ | |

a) Minkä muunnokset Kalle on tehnyt ensimmäisenä? *Vähentänyt luvun 5 puolittain eli V5* Entä Leena? *Leena on muokannut yhtälön vasenta puolta eli M.*

b) Tarkista, ovatko Kallen ja Leenan vastaukset oikein.

Tarkistetaan sijoittamalla $x=5$ riville 1. Kallen yhtälöstä tulee vasemmalta puolelta: $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikealta $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Nämä ovat eri suuret, joten Kallen ratkaisu on väärä. Leenalla puolestaan vasen puoli saa arvoksi $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikea puoli $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Molemmat ovat siis ratkaisseet yhtälön väärin.

c) Ympyröi virheet. Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi välttää.

Kallen virhe: Muista ottaa huomioon kaikki termit, joita lasket.

Leenan virhe: Yhdistä vain samanmuotoiset termit.

Tehtävä 6 Ratkaise seuraavat yhtälöt.

| | |
|---|--|
| <p>a) $y + 3y = 10 - 2$ MM</p> <p>$4y = 8$ J4</p> <p>$\frac{4y}{4} = \frac{8}{4}$ MM</p> <p>$y = 2$</p> | <p>b) $b - 2 = 3b + 4$ Vb</p> <p>$b - b - 2 = 3b - b + 4$ MM</p> <p>$-2 = 2b + 4$ V4</p> <p>$-2 - 4 = 2b + 4 - 4$ MM</p> <p>$-6 = 2b$ J2</p> <p>$\frac{-6}{2} = \frac{2b}{2}$ MM</p> <p>$-3 = b$</p> |
| <p>c) $1 + \frac{a}{5} = 7$ V1</p> <p>$1 - 1 + \frac{a}{5} = 7 - 1$ MM</p> <p>$\frac{a}{5} = 6$ K5</p> <p>$5 \cdot \frac{a}{5} = 6 \cdot 5$ MM</p> <p>$a = 30$</p> | <p>d) $5(2z - 4) = 20$ J5</p> <p>$\frac{5(2z-4)}{5} = \frac{20}{5}$ MM</p> <p>$2z - 4 = 4$ L4</p> <p>$2z - 4 + 4 = 4 + 4$ MM</p> <p>$2z = 8$ J2</p> <p>$\frac{2z}{2} = \frac{8}{2}$ MM</p> <p>$z = 4$</p> |

Tehtävä 7

a) Laske yhtälö $-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$ vähintään kahdella eri tavalla.

Tavalla 1

$$\begin{aligned}
 -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 && \mathbf{M} \\
 4(y + 4) &= 12 && \mathbf{J4 \ M \ M} \\
 y + 4 &= 3 && \mathbf{V4 \ M \ M} \\
 y &= -1
 \end{aligned}$$

Tavalla 2



$$\begin{aligned}
 -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 && \mathbf{M} \\
 -2y - 8 + 6y + 24 &= 12 && \mathbf{M} \\
 4y + 16 &= 12 && \mathbf{V16 \ M \ M} \\
 4y &= -4 && \mathbf{J4 \ M} \\
 y &= \frac{-4}{4} && \mathbf{M} \\
 y &= -1
 \end{aligned}$$

Tavalla 3

$$\begin{aligned}
 -2(y + 4) + 6(y + 4) &= 12 && \mathbf{J2 \ M \ M} \\
 -1(y + 4) + 3(y + 4) &= 6 && \mathbf{M} \\
 (y + 4)(3 - 1) &= 6 && \mathbf{M} \\
 (y + 4)2 &= 6 && \mathbf{J2 \ M \ M} \\
 y + 4 &= 3 && \mathbf{V4 \ M \ M} \\
 y &= -1
 \end{aligned}$$

b) Kumpi ratkaisutapa on mielestäsi sopivampi tähän tehtävään? Miksi? *Esimerkkivastauksista tapa 1, sillä se on lyhyin.*

Jokeri 8 Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

| | Kallen ratkaisu | Leenan ratkaisu | |
|---|--|---|---|
|  | $4b + 16 = -8$ $\frac{4b}{4} + \frac{16}{4} = \frac{-8}{4}$ $b + 4 = -2$ $b + 4 - 4 = -2 - 4$ $b = -6$ | $4b + 16 = -8$ $\frac{4b + 16}{4} = \frac{-8}{4}$ $b + 16 = -2$ $b + 16 - 16 = -2 - 16$ $b = -18$ |  |

- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $4b + 16 = -8$. Kumpi ratkaisi oikein?
Kalle. Molemmat ovat jakaneet yhtälöä puolittain luvulla 4. Leena ei kuitenkaan ole muistanut jakaa lukua 16 luvulla 4.
- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jakaminen täytyy suorittaa kaikille yhtälön termeille.

Jokeri 9 Täydennä yhtälön ratkaisun matemaattinen esitys kahdella eri tavalla.

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Matemaattinen esitys | Muunnos |
|--|---------------|--------------------------|------------|
| $\frac{8 + 20x}{4} = 6x$ | | $\frac{8 + 20x}{4} = 6x$ | |
| | K4 | | M |
| $4 \cdot \frac{8 + 20x}{4} = 4 \cdot 6x$ | | $2 + 5x = 6x$ | |
| | M M | | V5x |
| $8 + 20x = 24x$ | | $2 + 5x - 5x = 6x - 5x$ | |
| | V20x | | M M |
| $8 + 20x - 20x = 24x - 20x$ | | $2 = x$ | |
| | M M | | |
| $8 = 4x$ | | | |
| | J4 M M | | |
| $2 = x$ | | | |

Jokeri 10 Muodosta yhtälö ja ratkaise se.

a) Tiina ja Ville jakavat 60 euron palkan. Tiina teki töitä kaksi kertaa niin paljon kuin Ville. Kuinka paljon kumpikin saa palkkaa? *Ratkaisu: Merkitään kirjaimella p Villen palkkaa. Nyt Tiinan palkka on $2p$ (koska Tiina teki töitä kaksi kertaa enemmän kuin Ville). Muodostetaan yhtälö $p + 2p = 60$ josta voidaan ratkaista Villen ja Tiinan palkka.*

$$\begin{array}{ll} p + 2p = 60 & \text{M} \\ 3p = 60 & \text{J3} \\ \frac{3p}{3} = \frac{60}{3} & \text{MM} \\ p = 20 & \end{array}$$

Vastaus: Villen palkka oli 20 euroa ja Tiinan palkka oli 40 euroa.

b) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 108. Mikä on pienin luvuista?

Ratkaisu: Merkitään ensimmäistä lukua n , toinen on silloin $n + 1$ ja kolmas $n + 2$. Tällöin

$$\begin{array}{ll} n + (n + 1) + (n + 2) = 108 & \text{M} \\ 3n + 3 = 108 & \text{V3MM} \\ 3n = 105 & \text{J3MM} \\ n = 35 & \end{array}$$

Vastaus: Kolme lukua ovat 35, 36 ja 37 eli pienin on 35.

c) Lippu Robinin konserttiin maksoi aikuisille (eli yli 12-vuotiaille) 20 euroa ja alle 12-vuotiaille 10 euroa. Selvitä, montako lasten ja montako aikuisten lippua myytiin, kun tiedetään, että lippuja myytiin yhteensä 350 kappaletta ja lipunmyyntituloja saatiin yhteensä 4000 euroa.

Ratkaisu: Merkitään yli 12-vuotiaiden lippujen lukumäärää kirjaimella y ja lasten lippujen lukumäärää kirjaimella x .

Nyt tiedetään, että $x + y = 350$ (eli kaikkien myytyjen lippujen lukumäärän on oltava 350 kpl)

Lisäksi tiedetään, että $10x + 20y = 4000$ (eli lipunmyyntitulot myydyistä lipuista ovat yhteensä 4000 euroa).

Jos muuttujan x ratkaisee ensimmäisestä yhtälöstä, saadaan että $x = 350 - y$. Sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön, jolloin saadaan uusi yhtälö $10(350 - y) + 20y = 4000$ ja ratkaistaan se:

$$\begin{array}{ll} 10(350 - y) + 20y = 4000 & \text{M} \\ 3500 - 10y + 20y = 4000 & \text{M} \\ 3500 + 10y = 4000 & \text{V3500MM} \\ 10y = 500 & \text{J10MM} \\ y = 50 & \end{array}$$

Lasten lippujen lukumäärä (eli x) saadaan, kun sijoitettiin ratkaistu y yhtälöön $x = 350 - y$ eli $x = 350 - 50 = 300$.

Vastaus: Aikuisten lippuja myytiin 50 kappaletta ja lasten lippuja myytiin 300 kappaletta.

Jokeri 11 Muodosta mahdollisimman haastava yhtälö ja ratkaise se.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

| Ryhmätaito | Onnistuminen | | | | |
|---|--------------|--|--|--|--|
| Autoimme ja rohkaisimme toisiamme | | | | | |
| Keskustelimme toisemme huomioiden | | | | | |
| Toistimme asioita tarvittaessa | | | | | |
| Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan | | | | | |
| Hyödynsimme virheitä oppiaksemme | | | | | |