

Trigonometriset funktiot

Sisällys

1 Trigonometriset funktiot	3
1.1 Teoria	3
1.1.1 Sini	3
1.1.2 Kosini	4
1.1.3 Tangentti	6
1.2 Tehtävät	8
2 Vastaus	11
2.1 Trigonometriset funktiot / Vastaus: Tehtävät	11

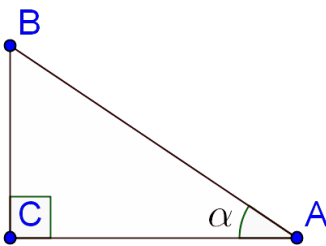
1 Trigonometriset funktiot

1.1 Teoria

1.1.1 Sini

Olemme oppineet laskemaan pythagoraan lauseella suorakulmaisen kolmion minkä tahansa sivun pituuden, kun kahden sivun pituus tunnetaan. Tulemme nyt oppimaan laskemaan *trigonometrinen funktioiden* avulla minkä tahansa suorakulmaisen kolmion sivun tai kulman suuruuden, kun tunnemme ainoastaan yhden kulman ja yhden sivun, tai kahden sivun suuruuden. Ensimmäinen trigonometrinen funktio, jonka opimme, on nimeltään *sini*.

Olkoon meillä suorakulmainen kolmio ABC. Suhde $\frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$ on nimeltään *sini* kulmalle α , ja se merkitään $\sin \alpha$.



$BC =$ vastakkainen kateetti

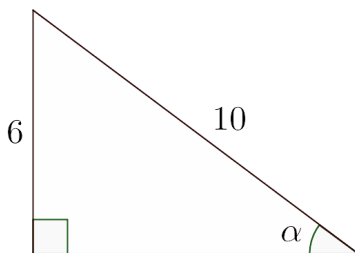
$AB =$ hypotenuusa

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$

Jos kulman sinin arvo tunnetaan, voidaan sen avulla laskea kulman asteluku. Teemme tämän esimerkissä kahdella eri tavalla. Ensin laskemme sen kuvan ja astelevyn avulla.

Esim. Määritä kulma α , kun $\sin \alpha = \frac{6}{10}$.

Koska $\sin \alpha = \frac{6}{10}$ tarkoittaa tämä, että meillä on suorakulmainen kolmio, jossa yksi kulma α määräytyy 6 yksikön pituisen vastakkaisen kateetin ja 10 yksikön pituisen hypotenuusan mukaan. Saamme seuraavanlaisen kuvan:



Voimme astelevyn avulla mitata, että kulma α on noin 37° .

Aikaisemmin sinin arvo laskettiin käyttäen edellisen esimerkin mukaisia geometrisiä muotoiluja. Nämä vastaukset koottiin taulukoihin. Tänä päivänä käytämme kuitenkin laskinta, kun haluamme määrittää kulman suuruuden.

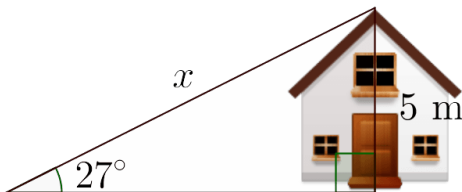
Tiedämme nyt, että $\sin \alpha = \frac{6}{10}$. Meillä on käytössämme yksi funktio, jonka kautta voimme ratkaista α arvon. Jotta voisimme tehdä tämän, tulee meidän operoida sinin *käänteisfunktion* kautta, joka poistaa sin yhtälön vasemmalta puolelta:

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{6}{10} \right)$$

löydämme laskimesta näppäimen \sin^{-1} . Painamme tätä ja kirjoitamme arvon $\frac{6}{10}$ ja saamme tietää, että $\alpha = 36,869\dots$ astetta.

Olisimmeko saaneet saman vastauksen $\sin \alpha = \frac{3}{5}$?

Esim. Talo on 5 m korkea ja se nähdään 27 asteen kulmassa. Kuinka pitkä välimatka on katsomispisteestä talon korkeimpaan kohtaan?



Muodostetaan yhtälö

$$\sin 27^\circ = \frac{5 \text{ m}}{x}$$

ja ratkaistaan yhtälö ristiin kertomisen avulla

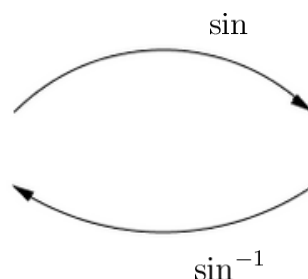
$$x \cdot \sin 27^\circ = 5 \text{ m}$$

Jaamme tekijällä $\sin 27^\circ$, jolloin saamme

$$x = \frac{5 \text{ m}}{\sin 27^\circ} = 11,013\dots \text{ m}$$

Eli välimatka on noin 11 m.

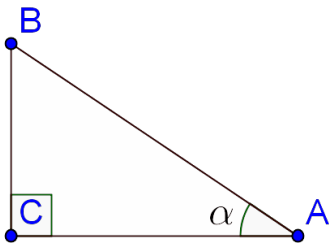
kulma



$\frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$

1.1.2 Kosini

Seuraava suhde, jota suorakulmaisessa kolmiossa tutkimme, on nimeltään *kosini*. Kosini kuvaa kulman α viereisen kateetin ja hypotenuusan välistä suhdetta suorakulmaisessa kolmiossa:

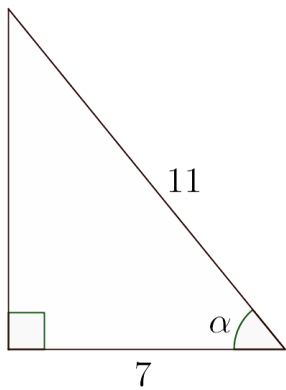


$AC =$ viereinen kateetti

$AB =$ hypotenuusa

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$

Esim. Määritä kulma α :



Muodostetaan yhtälö

$$\cos \alpha = \frac{7}{11}$$

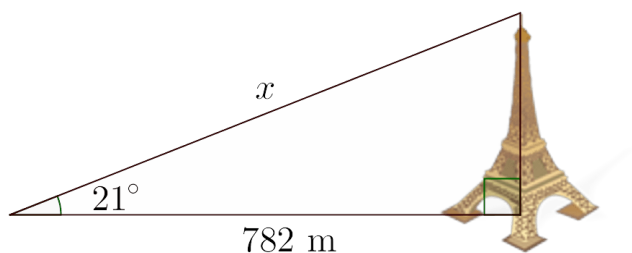
Saadaksemme α :n arvon, tulee meidän operoida kosinin käänteisfunktion kautta. Saamme:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{7}{11} \right)$$

Näppäilemme tämän laskimeen ja saamme vastaukseksi noin $50,5$ astetta.

Esim. Eiffeltorni nähdään 21 asteen kulmassa 782 metrin etäisyydeltä. Kuinka pitkä matka on katsomispisteestä tornin huippuun? Laske myös, kuinka korkea torni on.

Piirretään tilanteesta kuva



ja muodostetaan yhtälö:

$$\cos 21^\circ = \frac{782 \text{ m}}{x}$$

Ratkaisemme yhtälön ristiin kertomisen kautta ja saamme

$$x \cdot \cos 21^\circ = 782 \text{ m}$$

lopuksi jaamme tekijällä $\cos 21^\circ$ ja saamme vastaukseksi

$$x = \frac{782 \text{ m}}{\cos 21^\circ} = 837,635\dots \text{ m}$$

Etäisyys katsomispisteestä tornin huipulle on noin 838 m. Saadaksemme tietää, kuinka korkea torni on, voisimme tietenkin käyttää pythagoraan lausetta, mutta tällä kertaa laskemme sen sinilauseen kautta. Voimme muodostaa seuraavanlaisen yhtälön, jossa h on tornin korkeus:

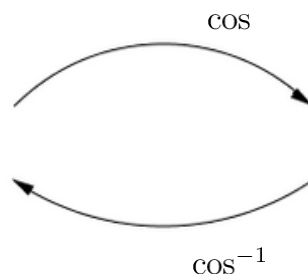
$$\sin 21^\circ = \frac{h}{838 \text{ m}}$$

Ratkaisemme yhtälöstä h :n ja saamme vastaukseksi

$$h = \sin 21^\circ \cdot 838 \text{ m} = 300,312\dots \text{ m}$$

Eli torni on noin 300 metriä korkea.

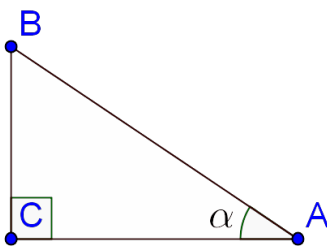
kulma



$$\frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

1.1.3 Tangentti

Viimeinen trigonometrisistä funktioista, johon tutustumme, on nimeltään *tangentti*. Tangentti on funktio, joka kuvaa kulman α vastakkaisen kateetin ja viereisen kateetin välistä suhdetta suorakulmaisessa kolmiossa:



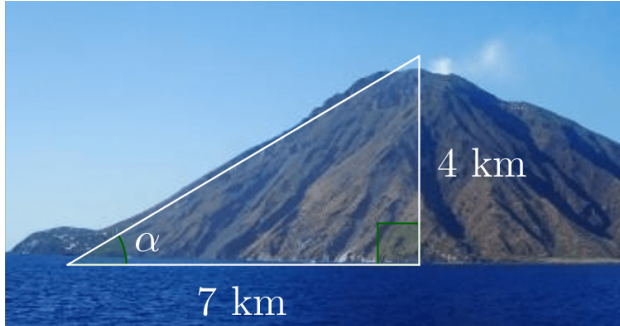
BC = vastakkainen kateetti

AC = viereinen kateetti

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$$

Esim. Kartalta voidaan katsoa, että tulivuori on 14 km pitkä ja 4 km korkea. Eräänä päivänä joukko retkeilijöitä päättää vaeltaa tulivuoren huipulle. Missä kulmassa he tulevat nousemaan tulivuorelle?

Meillä on kuvan mukainen tilanne:



Muodostetaan yhtälö

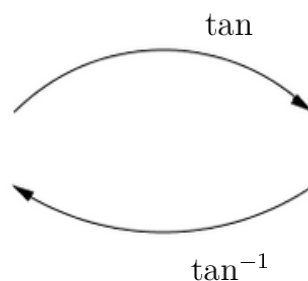
$$\tan \alpha = \frac{4}{7}$$

Saadaksimme tietää α yhtälöstä, operoimme tangentin käänteisfunktion kautta, joka poistaa tangentin yhtälön vasemmalta puolelta.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4}{7} \right) = 29,745\dots$$

Eli tulivuorelle nousetaan melkein 30 asteen kulmassa.

kulma

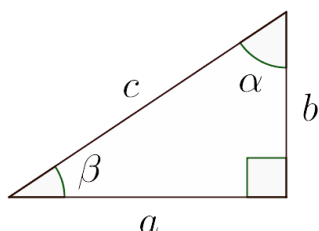


$\frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$

1.2 Tehtävät

Sini

1. Muodosta murtoluku, joka kuvaa alla olevan kolmion $\sin \alpha$ ja $\sin \beta$.

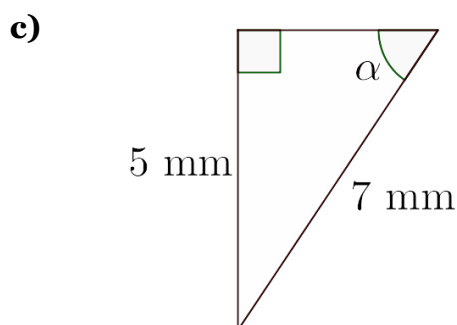
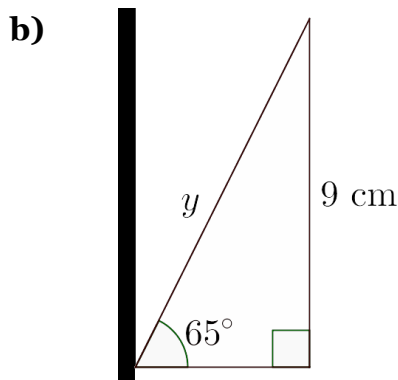
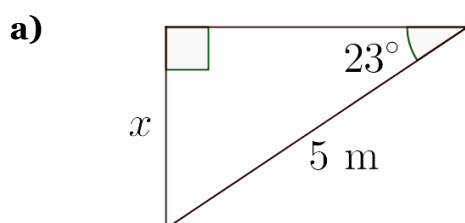


2. Piirrä kolmio, joka kuvaa seuraavia suhteita, ja määritä α kulmalevyn ja laskimen avulla:

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$
 b) $\sin \alpha = \frac{6}{7}$
 c) $\sin \alpha = 0,65$

3. Kumpi on suurempi: $\sin 20^\circ$ vai $\sin 40^\circ$?

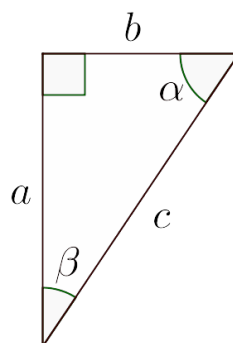
4. Määritä tuntematon muuttuja.



5. 8,3 m korkeasta puusta on vedetty köysirata, joka on 32 m pitkä. Missä kulmassa köysirata koskettaa maata?
6. 1,8 m pitkä ihminen näkee 45 m korkean tornin 21 asteen kulmassa. Mikä on etäisyys tornin huipulta ihmisen päähän?
7. Suorakulmaista kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5, kutsutaan egyptiläiseksi kolmioksi. Laske kolmion kulmat.
8. Määritä suorakulmaisen kolmion terävien kulmien suuruudet, kun hypotenuusa on 12 cm ja toinen kateeteista on 5 cm.

Kosini

9. Muodosta murtoluku, joka kuvaa alla olevan kolmion $\cos \alpha$ ja $\cos \beta$.



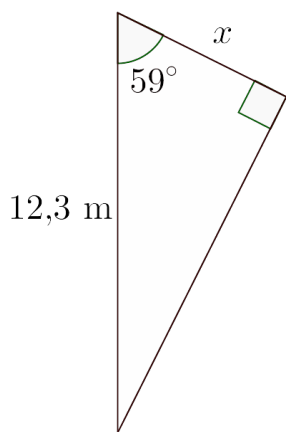
10. Piirrä kolmio seuraavista suhteista ja määritä α kulmalevyn ja laskimen avulla.

- a) $\cos \alpha = \frac{1}{7}$
 b) $\cos \alpha = \frac{4}{9}$
 c) $\cos \alpha = 0,5$

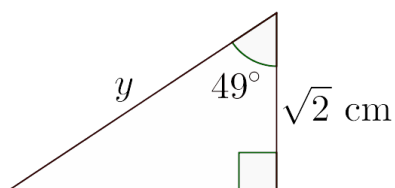
11. Mikä on suurempi: $\cos 20^\circ$ vai $\cos 40^\circ$?

12. Määritä tuntematon muuttuja.

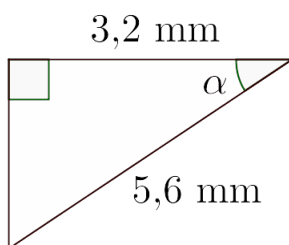
- a)



b)

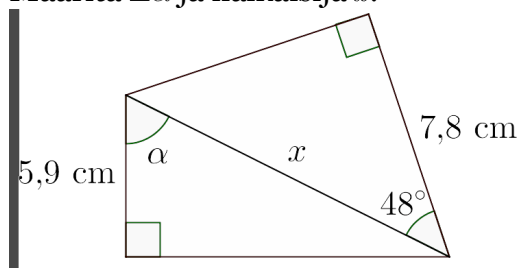


c)



13. Kaupungissa kaatui 10 m korkea pylväs kerrostaloa päin, joka oli 2,5 m etäisyydellä pylvästä. Minkä kulman kaatunut pylväs muodosti suhteessa maahan?

14. Määritä $\angle \alpha$ ja halkaisija x .



15. Kuinka pitkä on 15 m korkean talon varjo, kun auringon säteet muodostavat 42 asteen kulman maasta katsottuna?

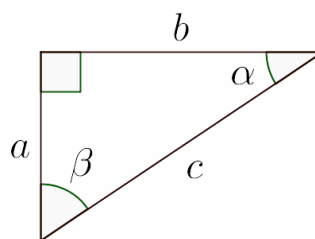
16. Mikä on sinin ja kosinin välinen yhteys? Täytä ruudut.

- a) $\sin(50^\circ) = \cos(\square)$
 b) $\cos(45^\circ) = \sin(\square)$
 c) $\sin \alpha = \cos(\square)$

d) $\cos \beta = \sin(\square)$

Tangentti

17. Muodosta murtoluku, joka kuvaa alla olevan kolmion $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$.

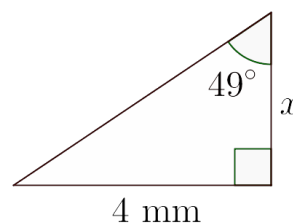


18. Piirrä kolmio, joka kuvaa seuraavia suhteita, ja määritä α kulmalevyn ja laskimen avulla.

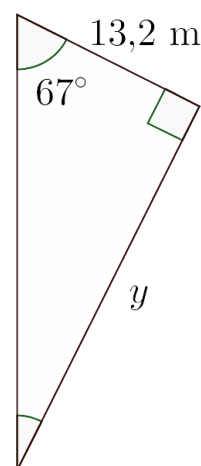
- a) $\tan \alpha = \frac{5}{9}$
 b) $\tan \alpha = 6$
 c) $\tan \alpha = 0,333\dots$

19. Määritä tuntematon muuttuja.

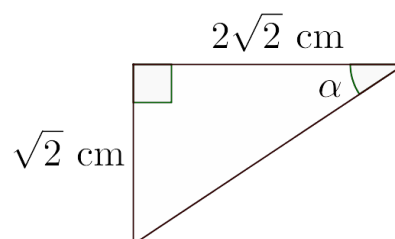
a)



b)



c)



20. Kuvan ihminen näkee tornin 40 asteen kulmassa 20 metrin etäisyydeltä. Kuinka korkea torni on?



- 21.** Majakan lamppu sijaitsee (tietenkin) majakan huipussa. Kuinka pitkän matkan lampun valosäde joutuu kulkemaan majakalta laivalle, joka on 500 metrin päässä, kun majakka on 55 metriä korkea?
- 22.** Laiva sijaitsee 5 km päässä suoraan pohjoiseen karikolta ja sillä on suora kurssi kohti karikkoa. Kuinka paljon pitää laivan muuttaa kurssiaan, jotta se voisi ohittaa karikon 1 km päästä karikon vasemmalta puolelta?
- 23.** Mäen kaltevuus ilmoitetaan usein prosentteina kulmien sijaan. $x\%$ kaltevuus tarkoittaa, että 100 metrin matkalta nousu on suoraan ylös x metriä. Missä kulmassa (asteina) nousee mäelle, jonka kaltevuus on
- a) 5%
 - b) 10%
 - c) 100%?
- 24.** Kun ollaan noustu eräälle mäelle, on liikuttu suoraan ylös 6 metriä ja linnuntietä 25 metriä. Mikä on mäen kaltevuus
- a) asteina?
 - b) prosentteina?
- 25.** Suora $4x + 5y = 20$ muodostaa yhdessä x -akselin ja y -akselin kanssa kolmion muotoisen alueen. Määritä kaikki tämän kolmion kulmien suuruudet. Perustele kunnolla.

2 Vastaus

2.1 Trigonometriset funktiot / Vastaus: Tehtävät

1. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
 $\sin \beta = \frac{b}{c}$
2. **a)** Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
c) Katso ratkaisu.
3. $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ$
4. **a)** ≈ 2 m
b) ≈ 10 cm
c) $\approx 46^\circ$
5. Kulma on $\approx 15^\circ$
6. noin 121 metriä
7. noin 37° , 53° ja 90°
8. Kulmat ovat 65° sekä 25°
9. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
 $\cos \beta = \frac{a}{c}$
10. **a)** Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
c) Katso ratkaisu.
11. $\cos 20^\circ > \cos 40^\circ$
12. **a)** $\approx 6,3$ m
b) $\approx 2,2$ cm
c) $\approx 55^\circ$
13. $\approx 76^\circ$
14. $x \approx 11,7$ cm
 $\alpha \approx 60^\circ$
15. noin 17 metriä
16. **a)** $\sin(50^\circ) = \cos(40^\circ)$
b) $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ)$
c) $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
d) $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$
17. $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
 $\tan \beta = \frac{b}{a}$
18. **a)** Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
- c)** Katso ratkaisu.
19. **a)** $x \approx 3$ mm
b) $y \approx 31$ m
c) $\alpha \approx 27^\circ$
20. noin 17 metriä
21. noin 503 metriä
22. noin 11 astetta
23. **a)** noin 3 astetta
b) noin 6 astetta
c) 45 astetta
24. **a)** noin 13 astetta
b) 24%
25. $\beta \approx 39^\circ$ ja $\alpha \approx 51^\circ$