

Polynomit 9lk

Sisällys

1 Polynomit	3
1.1 Teoria	3
1.1.1 Polynomin merkintä	3
1.1.2 Polynomin arvo	3
1.1.3 Polynomien yhteen- ja vähennyslaskut	4
1.1.4 Polynomien kertolasku	4
1.1.5 Binomikaavat	5
1.1.6 Tekijöihin jakaminen	6
1.2 Tehtävät	7
1.3 Sekalaisia tehtäviä	13
2 Vastaus	16
2.1 Polynomit / Vastaus: Tehtävät	16
2.2 Polynomit / Vastaus: Sekalaisia tehtäviä	19

1 Polynomit

1.1 Teoria

1.1.1 Polynomin merkintä

Tiedämme jo entuudestaan, että polynomi voi koostua useasta erilaisesta muuttujasta. Kerrataan asia katsomalla alla olevaa kuvaa:



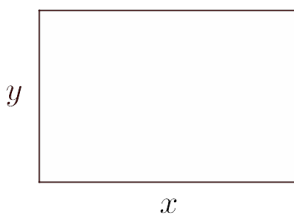
Jos merkitsemme autoja muuttujalla a , ja kettuja muuttujalla k , niin tiedämme, että voimme ilmaista kuvan sisällön yhtälönä

$$4a + 3k.$$

Nyt meillä on polynomi $4a + 3k$, joka koostuu muuttujista a ja k . Merkitsemme tätä jatkossa näin

$$P(a; k) = 4a + 3k.$$

Polynomin nimi ei tarvitse olla P , vaan voimme nimetä sen myös tilanteeseen sopivammalla tavalla. Voimme esimerkiksi nimetä suorakulmion pinta-alaa kuvaavan polynimin $A(x; y) = xy$



1.1.2 Polynomin arvo

Polynomilla voi olla yksi arvo. Tämä tarkoittaa, että meidän tulee laskea polynomin arvo annettujen muuttujien arvoilla.

Esim. Meillä on polynomi $P(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Laske $P(2)$.

$$P(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \\ &= 8 - 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Esim. Meillä on polynomi $P(x; y) = y^2 - xy - 2x + y$. Laske $P(1; -2)$.

$$P(x; y) = y^2 - xy - 2x + y$$

$$\begin{aligned} P(1; -2) &= (-2)^2 - 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + (-2) \\ &= 4 + 2 - 2 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.1.3 Polynomien yhteen- ja vähennyslaskut

Meillä on polynomit $A(x)$ ja $B(x)$. Voimme laskea ne yhteen: $A(x) + B(x)$ ja vähentää ne toisistaan: $A(x) - B(x)$.

Esim. $A(x) = 2x^2 - 3x + 3$ ja $B(x) = 4x^2 - 2$.

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (2x^2 - 3x + 3) + (4x^2 - 2) \\ &= 6x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (2x^2 - 3x + 3) - (4x^2 - 2) \\ &= 2x^2 - 3x + 3 - 4x^2 + 2 \\ &= -2x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

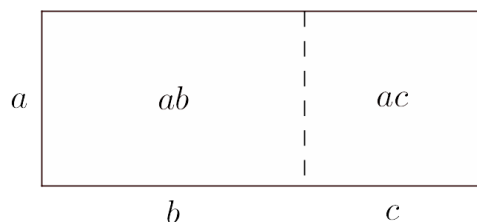
Kuten huomaamme, niin tämä toimii täysin samalla tavalla kuin tavallisten muuttujalausekkeiden kanssa.

1.1.4 Polynomien kertolasku

Olemme aiemmin oppineet kertomaan monomin polynomilla osittelulain avulla:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

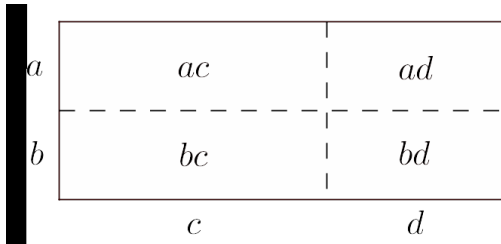
Muistamme myös, että tulkitsimme sen graafisesti:



Kehitämme tätä lakia nyt edelleen niin, että se koskee myös polynomien kertomista polynomilla:

$$(a + b)(c + d)$$

Selvittääksemme, mitä kertolasku tarkoittaa, teemme siitä myös graafisen tulkinnan. Kuvittele suorakulmio, jonka pituus on $a + b$ ja leveys on $c + d$. Mikä on tämän suorakulmion pinta-ala?



Suorakulmion pinta-ala saadaan kertomalla pituus leveydellä:

$$(a + b)(c + d)$$

ja kuvasta näemme, että voimme laskea koko suorakulmion pinta-alan neljän pienemmän suorakulmion avulla. Saamme siis:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esim. $A(x) = x + 2$ ja $B(x) = 3x - 3$. Suorita kertolasku $A(x) \cdot B(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (x + 2)(3x - 3) \\ &= 3x^2 - 3x + 6x - 6 \\ &= 3x^2 + 3x - 6 \end{aligned}$$

Esim. Sievennä $-(2x - 1)(x + 1)$

$$\begin{aligned} -(2x - 1)(x + 1) &= -(2x^2 + 2x - x - 1) \\ &= -(2x^2 + x - 1) \\ &= -2x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

1.1.5 Binomikaavat

Binomi tarkoittaa polygonia, jossa on kaksi termiä. On olemassa muutamia yleisiä polynomien kertolaskujen tapauksia, että niille on määritelty omat laskukaavansa. Kaavat ovat *summan neliö*, *erotuksen neliö* sekä *summan ja erotuksen tulo*.

Summan neliö

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Erotuksen neliö

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Esim. $(2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$

Esim. $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Summan ja erotuksen tulo

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Esim. $(4x + 2)(4x - 2) = 16x^2 - 4$

1.1.6 Tekijöihin jakaminen

Olemme tähän mennessä oppineet kertomaan polynomin polynomilla. Usein joudumme kuitenkin tilanteeseen, että meidän pitää toimia päinvastaisesti, eli että tulosta pitää selvittää tekijät. Tätä kutsutaan *tekijöihin jakamiseksi*.

Esim. Tiedämme, että $x(x + 1) = x^2 + x$, tällöin voimme jakaa lausekkeen $x^2 + x$ tekijöihin erottamalla muuttujan x kummastakin termistä. Tällöin saamme:

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

Tekijöihin jakamisessa tulee tutkia lausekkeessa esiintyviä mahdollisia yhteisiä tekijöitä ja muuttuja.

Esim. Jaa lauseke $2x^3 - 4x^2 + 8x$ tekijöihin.

Kaikki termit sisältävät muuttujan x , jolloin voimme ottaa sen yhteiseksi tekijäksi ja erottaa sen muista termeistä, jolloin saamme:

~~$x(2x^2 - 4x + 8)$~~ Huomaamme myös, että voimme erottaa tekijän kaksi kaikista termeistä:

~~$x(2x^2 - 4x + 8)$~~ **Esim.** Jaa lauseke $5x^2y + 10xy^3$ tekijöihin

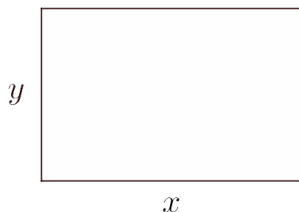
Näemme, että kummatkin termit sisältävät tekijän 5, sekä muuttujat xy . Tällöin voimme ottaa yhteisen tekijän:

$$5x^2y + 10xy^3 = 5xy(x + 2y^2)$$

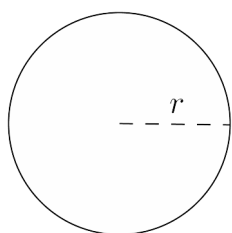
1.2 Tehtävät

Polynomin merkintä

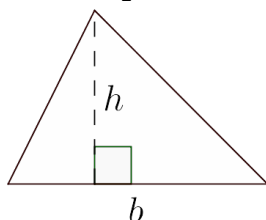
1. Muodosta polynomi, joka kuvaa alla olevan suorakulmion piirin pituutta, ja nimeä polynomi sopivalla tavalla.



2. Muodosta polynomi, joka kuvaa ympyrän



- a) Pinta-alaa
b) Kehän pituutta
3. Muodosta polynomi, joka kuvaa kolmion pinta-alaa.



Polynomin arvo

4. Sinulla on polynomi $P(x) = -x - 4$. Laske

- a) $P(6)$
b) $P(-1)$
c) $P(\frac{4}{5})$

5. Polynomi on $P(x) = x^2 + 3$. Laske

- a) $P(3)$
b) $P(-2)$
c) $P(\frac{1}{2})$

6. Sinulla on polynomi $P(x) = -x^2 - 1$. Laske

- a) $P(2)$

b) $P(-1)$

c) $P(\frac{2}{7})$

7. Polynomi on $P(x; y) = x^3y - 3x + y$. Laske

a) $P(1; 2)$

b) $P(-2; -1)$

c) $P(\frac{2}{3}; -2)$

8. Löydä virhe.

$$P(x; y) = 2x^2 - 3xy - 4$$

$$\begin{aligned} P(2; 1) &= 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \\ &= 2 - 6 - 4 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0; 2) &= 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \\ &= 2 \cdot 1 - 0 - 4 \\ &= 2 - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{2}; 1) &= 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 4 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 4 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 4 \\ &= -\frac{1}{2} - 4 \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

9. $P(x) = \frac{x}{3} - 4$. Ratkaise yhtälö

a) $P(x) = 10$

b) $P(x) = \frac{1}{4}$

c) $P(x) = 0$

10. Millä x :n arvolla saa polynomi arvon nolla?

a) $A(x) = 5x - 20$

b) $B(x) = \frac{4}{7}x + 4$

c) $C(x) = x^2 - 4$

11. Oletetaan, että $P(x) = 7x - 2$. Millä x :n arvolla saa polynomi arvon
- a) 0
b) 5

Polynomien yhteen- ja vähennyslaskut

12. $P_1(x) = -4x^2 + 3x + 5$ ja
 $P_2(x) = 8x^2 - 32x - 11$
- a) Sievennä $P_1(x) + P_2(x)$
b) Sievennä $P_1(x) - P_2(x)$
13. $P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ ja
 $P_2(x) = \frac{2}{5}x^2 + 3x + 4$
- a) Sievennä $P_1(x) + P_2(x)$
b) Sievennä $P_1(x) - P_2(x)$
14. $P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$ ja
 $P_2(x) = \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
- a) Sievennä $P_1(x) + P_2(x)$
b) Sievennä $P_1(x) - P_2(x)$
15. $P_1(x; y) = x^2y - 3xy + \frac{2}{5}x - y$ ja
 $P_2(x; y) = xy^2 + 4xy - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y$
- a) Sievennä $P_1(x; y) + P_2(x; y)$
b) Sievennä $P_1(x; y) - P_2(x; y)$

Polynomien kertolasku

16. Suorita kertolasku ja sievennä, jos se on mahdollista.
- a) $(x + 2)(x + 4)$
b) $(2x + 5)(4x - 1)$
c) $(2a - b)(8a - 5b)$
17. Suorita kertolasku ja sievennä, jos se on mahdollista.
- a) $-(7x - 1)(4x + 2)$
b) $-(x^2 - x)(2x^2 - x)$
c) $-(10a^3 - b^2)(5a^3 + b)$
18. Suorita kertolasku ja sievennä, jos se on mahdollista:
- a) $x(x + 7)$
b) $5y(-y + 7)$

- c) $(x - 2)(x + 7)$
d) $(3a - b)(a - 7b)$
e) $(\frac{1}{2}x - y)(\frac{2}{3}x + 8y)$
f) $(\frac{4}{5}x - \frac{1}{2})(-\frac{1}{3}y - 3)$
g) $-(x + 1)(x + 1)$
h) $-(2a - 2)(a + 3)$
i) $(0, 2x - 7)(0, 6x + 5)$

19. Sievennä lausekkeitä niin paljon kuin mahdollista.

- a) $6x + 2(x - 1)$
b) $7x - 3(x + 1)$
c) $3x(y - 2) - xy$
d) $4(2y + 3) - 6y$
e) $3a(a - 2) - 4a \cdot (-a)$
f) $2x(\frac{1}{3} - 2) + 3x$

20. Sievennä lausekkeitä niin paljon kuin mahdollista.

- a) $6x + 7 - (x - 4)$
b) $(2 + x) - 7(x - 3)$
c) $\frac{1}{2}(4x - 8) - (\frac{3}{7}x + 4)$
d) $(x - 4)(-2x + 8) - x(x - 3)$
e) $a(a - b) - (a - b)(2a + b)$
f) $5x^2(-x + \frac{1}{5}) - 2x(\frac{3}{4}x - x) + 2x^2 \cdot (-\frac{1}{2}x)$

21. Sievennä niin paljon kuin on mahdollista.

- a) $(5x + 1)(10x + 4) - 2x$
b) $9x - (6x + 2)(4x + 7)$
c) $(8x - 3)(x - 2) - (5x - 9)$
d) $(y^2 - y)(y - 5) - y(y^3 - y)$
e) $-[x - (x - 2)(x + 3)]$
f) $2x - [6x - (5x^2 - x)(10x^2 - 2x)]$

22. Sievennä.

- a) $(x^{14} + x^5)(x^3 + x)$
b) $(x^{2n} + x^n)(x^{2n} + x^n)$
c) $(a^n + a^4)(a^m + a^6)$

- 23.** Sievennä niin paljon kuin on mahdollista.
- a)** $2a - [3a - 2(a + 2)]$
b) $2x^2 - [-3x - (2x - 1)(4x - 2)]$
c) $6x \cdot (-2y) - [3x^2 - (7x - y)(2x + 1)]$
- 24.** Tee graafinen tulkinta kertolaskusta $(a + b)(c + d + e)$. Sievennä tämän jälkeen lauseke $(x + 2)(x^2 + x + 1)$
- 25.** Ratkaise yhtälö.
- a)** $(x + 3)(6x + 1) - 3x(2x + 1) = 17x$
b) $(2x - 8)(3x + 5) - 3x(2x + 7) = -5x + 4$

Binomikaavat

- 26.** Osoita, että $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kirjoittamalla potenssi kertolaskuna ja sieventämällä lausekkeen.

- 27.** Sievennä hyödyntäen summan neliötä.

- a)** $(x + 1)^2$
b) $(2x + 2)^2$
c) $(3x + 4)^2$
d) $(x + 5)^2$
e) $(10x + 2)^2$
f) $(x^3 + x^2)^2$

- 28.** Osoita, että $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- 29.** Sievennä hyödyntäen erotuksen neliötä.

- a)** $(x - 2)^2$
b) $(9x - 1)^2$
c) $(2x^2 - x)^2$
d) $(2a - b)^2$
e) $(x^2 - y^2)^2$
f) $(5a - 10b)^2$

- 30.** Sievennä.

- a)** $(3a + 2)^2$
b) $(x - y)^2$
c) $(2x + 5)^2$

- d)** $(8a - 7b)^2$
e) $(5a - 8)^2$
f) $(\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y)^2$
g) $(\frac{2}{5}x + 3)^2$
h) $(0, 1x + 0, 5)^2$
i) $(x^2 + x)^2$
j) $(0, 2a^2 - 0, 5b)^2$
k) $(\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2$
l) $(x - \sqrt{2})^2$

- 31.** Osoita, että $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

- 32.** Suorita kertolasku hyödyntäen summan ja erotuksen tulon muistisääntöä.

- a)** $(x - 7)(x + 7)$
b) $(5 - a)(5 + a)$
c) $(\frac{5}{2}x - 2)(\frac{5}{2}x + 2)$
d) $(\frac{1}{2}x - 7)(\frac{1}{2}x + 7)$
e) $(\frac{x}{3} - 4)(\frac{x}{3} + 4)$
f) $(\frac{2}{3}x - 8)(\frac{2}{3}x + 8)$
g) $(x + 1)(x - 1)$
h) $(0, 2x + 0, 6)(0, 2x - 0, 6)$
i) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$
j) $(0, 3a + 8)(0, 3a - 8)$
k) $(\pi + q)(\pi - q)$
l) $(\sqrt{b} - 4)(\sqrt{b} + 4)$

- 33.** Sievennä.

- a)** $(x + 4)^2 - (x + 1)(x - 1)$
b) $(2x - 3)(2x + 3) - (2x - 1)^2$
c) $(0, 1x + 2)^2 - (0, 3x - 1)(0, 3x + 1)$
d) $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) - (\frac{x}{2} + 2)^2$
e) $(\sqrt{3}x - 1)^2 - (x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$
f) $(\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{0})(\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{0})$

- 34.** Ratkaise yhtälöt.

- a)** $(x - 2)(x + 2) - (x + 1)^2 = 16$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 5\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 5\right) + (2x - 1)^2 = 4x^2$$

Tekijöihin jakaminen

35. Täydennä alla olevat tekijöihin jaot.

$$\text{a)} \quad 5a + 5b \\ = 5(\square + \square)$$

$$\text{b)} \quad 5x + 20 \\ = 5(\square + \square)$$

$$\text{c)} \quad 8x - 16 \\ = \square(\square - \square)$$

$$\text{d)} \quad 3x^2y + xy^2 \\ = xy(\square + \square)$$

$$\text{e)} \quad 7ab - 21a^2b \\ = 7ab(\square - \square)$$

$$\text{f)} \quad 2x^2y + 4xy \\ = \square(\square + \square)$$

$$\text{g)} \quad x^3 + x^2 + x \\ = x(\square + \square + \square)$$

$$\text{h)} \quad 2a^2 + a^4 - 3a^6 \\ = a^2(\square + \square - \square)$$

$$\text{i)} \quad 3x^7 - 12x^8 - 39x^9 \\ = 3x(\square - \square - \square)$$

$$\text{j)} \quad x^7 + x^5 \\ = x^5(\square + \square)$$

$$\text{k)} \quad x^{n+1} + x^n \\ = x^n(\square + \square)$$

36. Jaa tekijöihin.

$$\text{a)} \quad 4y - 12y^2$$

$$\text{b)} \quad 9x^3 - 27x^2$$

$$\text{c)} \quad 2a - 4a^2 + 16a^3$$

$$\text{d)} \quad 4x^2 - 2x + 6x^3$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\text{f)} \quad \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a$$

$$\text{g)} \quad x^3y^4 + x^2y^5$$

$$\text{h)} \quad a^2b^6 - 8ab^4$$

$$\text{i)} \quad 3a^2b - 9ab^2 + 6ab^3$$

$$\text{j)} \quad 0,09x + 0,18xy + 0,36x^2$$

37. Jaa tekijöihin.

$$\text{a)} \quad x^9 + x^5$$

$$\text{b)} \quad a^{50} + a^{25}$$

$$\text{c)} \quad x^{n+1} + x^n$$

$$\text{d)} \quad x^n + x^5$$

$$\text{e)} \quad x^{n+2} + x^{n+1} + x^n$$

$$\text{f)} \quad a^{n+2} + a^n + a^4$$

38. Täydennä tekijöihin jaot.

$$\text{a)} \quad 4x(x + 1) + 9(x + 1) \\ = (x + 1)(\square + \square)$$

$$\text{b)} \quad x^4(x - 4) - x^3(x - 4) \\ = (x - 4)(\square - \square)$$

$$\text{c)} \quad a^3(b + c) + a^2(b + c) - a(b + c) \\ = (b + c)(\square + \square - \square)$$

39. Jaa tekijöihin.

$$\text{a)} \quad 2(x + 1) - 3x(x + 1)$$

$$\text{b)} \quad x(2x - 5) + 4(2x - 5)$$

$$\text{c)} \quad a(3b + 5) - b(3b + 5) + 7(3b + 5)$$

$$\text{d)} \quad -5(\sqrt{7} - \pi) + z(\sqrt{7} - \pi)$$

$$\text{e)} \quad \sqrt{5}x^2(a - b) - \sqrt{3}x(a - b) - (a - b)$$

$$\text{f)} \quad -x^5(q - 2r) - 2x^4(q - 2r) + x^3(q - 2r)$$

40. Jaa tekijöihin ja sievennä niin paljon kuin on mahdollista.

$$\text{a)} \quad 2(x + 1) + 3(x + 1)$$

$$\text{b)} \quad x(x + 1) - x(x + 1)$$

$$\text{c)} \quad (a + b)c - 2c(a + b)$$

$$\text{d)} \quad 3a(b - 1) + a(b - 1)$$

$$\text{e)} \quad -(x + y) + 2(x + y)$$

$$\text{f)} \quad (x + 1)^4 + (x + 1)^3$$

41. Suorita alla olevat osatehtävät ymmärtääksesi, kuinka jaetaan tekijöihin hyödyntäen binomikaavoja.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a) Mitä binomikaavan laskutoimitusta olet käyttänyt, kun olet saanut termit " a^2 " ja " b^2 "

b) Mikä on päinvastainen

laskutoimitus, joka sinun tulee suorittaa mennäksesi takaperin?

- c)** Harjoittele tekijöihin jakamista täyttämällä alla olevat ruudut:
- $$4a^2 + 12a + 9 = (\square + \square)^2$$
- $$100x^2 + 4x + \frac{1}{25} = (\square + \square)^2$$
- $$36t^2 + 12\sqrt{2}t + 2 = (\square + \square)^2$$
- d)** Mitä on tärkeää tarkistaa tekijöihin jakamisen yhteydessä? Miksi emme voi jakaa lauseketta $a^2 + 3ab + b^2$ tekijöihinsä käyttäen summan tuloa tai erotuksen tuloa?
- e)** Mene takaisin osatehtävään "c" ja tarkista, onko keskimäinen termi todellakin " $2ab$ ".
- f)** Onko muita asioita, joita tulisi tutkia, ennen kuin suoritetaan tekijöihin jako? Voimmeko esimerkiksi jakaa lausekkeen $a^2 + 2ab - b^2$ tekijöihin? Entä $a^2 - 2ab + b^2$?

42. Jaa lausekkeet tekijöihin hyödyntäen summan tuloa tai erotuksen tuloa ja tarkista, että "keskimäinen termi" on oikein.

- a)** $a^2 + 2ab + b^2$
- b)** $16x^2 - 8xy + y^2$
- c)** $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$
- d)** $\frac{1}{4} + x + x^2$
- e)** $\frac{1}{4}a^2 - \sqrt{2}ab + 2b^2$
- f)** $\pi^2 + 2\pi x + x^2$

43. Tekijöihin jakaminen summan ja erotuksen tulon muistikaavan avulla on vielä helpompaa. Mieti, miten olet saanut termit a^2 ja b^2 , kun olet käyttänyt tätä muistikaavaa lausekkeessa:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

- a)** Mitä laskutoimitusta tulee sinun käyttää mennäksesi takaperin?
- b)** Harjoittele summan ja erotuksen tulon muistikaavaa täyttämällä alla olevat ruudut:
- $$a^2 - b^2 = (\square - \square)(\square + \square)$$
- $$4x^2 - 9 = (\square - \square)(\square + \square)$$
- $$x - 1 = (\square - \square)(\square + \square)$$
- c)** Voimmeko käyttää summan ja erotuksen tulon muistikaavaa jakaaksemme lausekkeen $a^2 + b^2$ tekijöihin?

44. Jaa lausekkeet tekijöihin hyödyntäen summan ja erotuksen tulon muistikaavaa.

- a)** $x^2 - 16$
- b)** $9 - z^2$
- c)** $9x^2 - 16y^2$
- d)** $\frac{1}{4}x^2 - 9$
- e)** $\frac{x^4}{4} - 16$
- f)** $\frac{4x^2}{9} - 1$

45. Jaa tekijöihin hyödyntäen binomikaavoja, jos se on mahdollista.

- a)** $y^2 - 2yz + z^2$
- b)** $4x^2 - 4xy + y^2$
- c)** $4x^2 - 9$
- d)** $16 + y^2$
- e)** $4x^2 - 12xy + 9y^2$
- f)** $4x^2 + 10x - 25$
- g)** $16x^2 - 8x - 1$
- h)** $2x^2 - 1$
- i)** $x - 1$
- j)** $9y^2 + 30yz + 25z^2$
- k)** $49x^2 - 4y^2 + 28xy$
- l)** $x - 6\sqrt{x} + 9$

46. Ratkaise yhtälöt.

Vinkki: Jaa tekijöihin. Jotta tulo olisi nolla, tulee myös jonkun tekijöistä olla nolla.

a) $x^2 + x = 0$

b) $5x^2 - 10x = 0$

c) $9x^2 - 16 = 0$

d) $25x^2 + 20x + 4 = 0$

e) $x^4 - 4x^2 = 0$

f) $4x^3 - 4x^2 + x = 0$

1.3 Sekalaisia tehtäviä

1. Sinulla on polynomi $P(x) = -2x - 8$. Laske
- $P(-10)$
 - $P(0)$
 - $P(\frac{4}{5})$
2. Oletetaan, että $P(x) = x^2 - 3$. Laske
- $P(5)$
 - $P(-3)$
 - $P(\frac{2}{3})$
3. Löydä virhe.
 $P(x; y) = -2xy^2 - xy - 2$
- $$P(1; 2) = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2 - 2$$
- $$= 16 - 2 - 2$$
- $$= 12$$
- $$P(-2; -3) = -2 \cdot (-2) \cdot (-3)^2 - (-2) \cdot (-3) - 2$$
- $$= 4 \cdot 9 - 6 - 2$$
- $$= 36 - 6 - 2$$
- $$= 28$$
- $$P(\frac{1}{2}; 1) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 - 2$$
- $$= -1 \cdot 4 - \frac{1}{2} - 2$$
- $$= -4 - \frac{3}{2}$$
- $$= -\frac{11}{2}$$
4. Millä x :n arvolla polynomi saa arvon nolla?
- $A(x) = 2(2x - 7)$
 - $B(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$
 - $C(x) = (x + 3)(x - 7)$
5. $P(x) = 11x - 1$. Millä x :n arvolla on polynomin arvo 3?
6. Ratkaise yhtälö $P(x) = -9$, kun $P(x) = \frac{x}{10} + 1$
7. Millä x :n arvolla saa polynomi $P_1(x) = 2x - 5$ saman arvon kuin polynomi $P_2(x) = 7x + 3$?
8. $P_1(x) = x^2 + 7x - 5$ ja $P_2(x) = -x^2 + 2x - 7$
- Sievennä $P_1(x) + P_2(x)$
 - Sievennä $P_1(x) - P_2(x)$
9. $P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ ja $P_2(x) = \frac{2}{5}x^2 + 3x + 4$
- Sievennä $P_1(x) + P_2(x)$
 - Sievennä $P_1(x) - P_2(x)$
10. Suorita kertolasku ja sievennä, jos se on mahdollista.
- $(x - 2)(x + 7)$
 - $(y + 1)(-y + 7)$
 - $-3x(2x - 7)$
 - $5y(-y + \frac{1}{2})$
 - $(-3a - 4)(-a - \frac{2}{3})$
 - $(\frac{1}{3}m - n)(-\frac{2}{3}m + \frac{1}{2}n)$
 - $(x^n + x^{n-1})(x^2 + x)$
11. Sievennä niin paljon kuin on mahdollista.
- $2x - 3x(x - 7)$
 - $(a - b) - (a - b)(2a + b)$
 - $-(x + 3) + 7 - (x - 4)$
 - $(x - 4)(-2x + 8) - x(x - 3)$
 - $a(a - b) - (2a - b)(2a + b)$
 - $-(2 + \frac{2}{3}x) - 7(x - 3) + 2$
 - $(x - 5)(2x - 3) - x(x - 3)$
 - $5a - \frac{1}{3}(12a - 6) - (a - b)(a + 2b)$
 - $\frac{1}{7}x - [2x - (\frac{1}{2}x - 1)(2x - \frac{2}{3})]$
12. Laske hyödyntäen summan tulon tai erotuksen tulon muistikaavaa.
- $(x + 2)^2$
 - $(2a - 2)^2$
 - $(x + y)^2$
 - $(-3x + 4)^2$
 - $(\frac{1}{2}x - 2)^2$
 - $(-\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y)^2$

- 13.** Suorita kertolasku hyödyntäen summan ja erotuksen tulo muistikaavaa.
- a) $(2a - 2)(2a + 2)$
b) $(2x - \frac{1}{2})(2x + \frac{1}{2})$
c) $(\frac{1}{6}x - 7)(\frac{1}{6}x + 7)$
d) $(\sqrt{5} - t)(\sqrt{5} + t)$
e) $(0,5x - 1,1y)(0,5x + 1,1y)$
f) $(\pi - r)(\pi + r)$
- 14.** Ratkaise yhtälöt.
- a) $(3x - 3)^2 - (3x - 2)(3x + 3) = 0$
b) $(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1)(\frac{4}{\sqrt{x}} + 1) = \frac{2}{3}$
- 15.** Täydennä alla olevat tekijöihin jaot.
- a) $10a + 30$
 $= 10(\square + \square)$
b) $8x + 64y$
 $= 8(\square + \square)$
c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{3}(\square - \square)$
d) $2xy - x^2 + 4x^3y$
 $= x(\square - \square + \square)$
- 16.** Jaa tekijöihin etsimällä yhteinen tekijä.
- a) $4y - 12y^2$
b) $9x^3 - 27x^2 + 18x$
c) $8m - 4m^2 + 16m^4$
d) $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x^2$
e) $x^{14} + x^{11}$
f) $x^n + x^{20}$
- 17.** Jaa tekijöihin etsimällä yhteinen tekijä.
- a) $-5(3x + 1) + 10(3x + 1)$
b) $x^2(2x - 5) - 6x^2(2x - 5) + (2x - 5)$
c) $x(6m - 3) - y(6m - 3) + z(6m - 3)$
d) $(x + 1)^{n+1} + (x + 1)^n$
e) $(x + 1)^n + 2(x + 1)^{n+1}$
- 18.** Jaa tekijöihin hyödyntäen summan ja erotuksen tulo muistikaavaa.
- a) $x^2 - 16$
b) $9 - \frac{1}{25}z^2$
c) $\frac{1}{4}x^2 - 36$
d) $\frac{4}{6}x^2 - 9$
e) $\frac{1}{16}m^4 - x^2$
f) $0,01x - 1$
- 19.** Jaa tekijöihin hyödyntäen summan tulo tai erotuksen tulo muistikaavoja, jos se on mahdollista.
- a) $4a^2 + 12ab + 9b^2$
b) $16x^2 - 8xy + y^2$
c) $a^2 + 4a + 4$
d) $4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2$
e) $9x^2 - 12x + 4$
f) $a^2 + 2a - 1$
- 20.** Millä x :n arvolla on polynomien arvo nolla?
- a) $A(x) = 8x^2 - 4x$
b) $B(x) = 7x(x - 3) - 6(x - 3)$
c) $C(x) = 36x^2(x - 4)^2 - 4(x - 4)^2$
- 21.** Suorita polynomien kertolasku kahdessa ensimmäisessä osatehtävässä ja sievennä vastauksesi. Tutki saamiasi vastauksia. Sinun pitäisi huomata tietty toistuva kaava, jonka avulla voit suorittaa loput tehtävät ilman välivaiheita.
- a) $(x + x^2)(x - 1)$
b) $(x + x^2 + x^3)(x - 1)$
c) $(x + x^2 + x^3 + x^4)(x - 1)$
d) $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x - 1)$
e) $(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(x - 1)$
f) Käytä löytämäsi kaavaa laskeaksesi seuraavan tehtävän suoraan

$$(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(2 - 1)$$

- 22.** Eräs lukujono, joka koostuu kolmesta toisiaan seuraavasta luvusta, voisi olla esimerkiksi 4, 5, 6. Tälle lukujonolle pätee, että ensimmäinen luku kerrottuna viimeisellä luvulla on yksi vähemmän kuin keskimäinen luku kerrottuna itsellään. ($4 \cdot 6 = 24$ ja $5 \cdot 5 = 25$).

Osoita, että tämä toteutuu jokaiselle sellaiselle lukujonolle.

- 23.** Löydä virhe, tai muuten maailmaa kohtaa tuho!

$$\begin{aligned} a &= b && \parallel \cdot a \\ a^2 &= ab && \parallel - b^2 \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 && \parallel \text{jaetaan tekijöihin} \\ (a + b)(a - b) &= b(a - b) && \parallel / (a - b) \\ a + b &= b && \parallel a = b \\ 2b &= b && \parallel / b \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

2 Vastaus

2.1 Polynomit / Vastaus: Tehtävät

1. $P(x; y) = 2x + 2y$
2. a) $A(r) = \pi r^2$
b) $P(r) = 2\pi r$
3. $A(b; h) = \frac{bh}{2}$
4. a) -10
b) -3
c) $-\frac{24}{5}$
5. a) 12
b) 7
c) $\frac{13}{4}$
6. a) -5
b) -2
c) $-\frac{53}{49}$
7. a) 1
b) 13
c) $-\frac{124}{27}$
8. Katso ratkaisu.
9. a) $x = 42$
b) $x = \frac{51}{4}$
c) $x = 12$
10. a) $x = 4$
b) $x = -7$
c) $x = \pm 2$
11. a) $x = \frac{2}{7}$
b) $x = 1$
12. a) $= 4x^2 - 29x - 6$
b) $-12x^2 + 35x + 16$
13. a) $\frac{9}{10}x^2 + 6$
b) $\frac{1}{10}x^2 - 6x - 2$
14. a) $\frac{9}{10}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}$
b) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{7}{4}$
15. a) $x^2y + xy^2 + xy + \frac{3}{20}x - \frac{7}{4}y$
b) $x^2y - xy^2 - 7xy + \frac{13}{20}x - \frac{1}{4}y$
16. a) $x^2 + 6x + 8$
b) $8x^2 + 18x - 5$
c) $16a^2 - 18ab + 5b^2$
17. a) $-28x^2 - 10x + 2$
b) $-2x^4 + 3x^3 - x^2$
c) $-50a^6 - 10a^3b + 5a^3b^2 + b^3$
18. a) $x^2 + 7x$
b) $-5y^2 + 35y$
c) $x^2 + 5x - 14$
d) $3a^2 - 22ab + 7b^2$
e) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}xy - 8y^2$
f) $-\frac{4}{15}xy - \frac{12}{5}x + \frac{1}{6}y + \frac{3}{2}$
g) $-x^2 - 2x - 1$
h) $-2a^2 - 4a + 6$
i) $0, 12x^2 - 3, 2x - 35$
19. a) $8x - 2$
b) $4x - 3$
c) $2xy - 6x$
d) $2y + 12$
e) $7a^2 - 6a$
f) $-\frac{1}{3}x$
20. a) $5x + 11$
b) $-6x + 23$
c) $\frac{11}{7}x - 8$
d) $-3x^2 + 19x - 32$
e) $-a^2 + b^2$
f) $-6x^3 + \frac{3}{2}x^2$
21. a) $50x^2 + 28x + 4$
b) $-24x^2 - 41x - 14$
c) $8x^2 - 24x + 15$
d) $-y^4 + y^3 - 5y^2 + 5y$

- e)** $x^2 - 6$
f) $50x^4 - 20x^3 + 2x^2 - 4x$
- 22. a)** $x^{17} + x^{15} + x^8 + x^6$
b) $x^{4n} + 2x^{3n} + x^{2n}$
c) $a^{m+n} + a^{n+6} + a^{m+4} + a^{10}$
- 23. a)** $a + 4$
b) $10x^2 - 5x + 2$
c) $11x^2 - 14xy + 7x - y$
- 24.** $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
- 25. a)** $x = 3$
b) $x = -\frac{22}{15}$
- 26.** Katso ratkaisu.
- 27. a)** $x^2 + 2x + 1$
b) $4x^2 + 8x + 4$
c) $9x^2 + 24x + 16$
d) $x^2 + 10x + 25$
e) $100x^2 + 40x + 4$
f) $x^6 + 2x^5 + x^4$
- 28.** Katso ratkaisu
- 29. a)** $x^2 - 4x + 4$
b) $81x^2 - 18x + 1$
c) $4x^4 - 4x^3 + x^2$
d) $4a^2 - 4ab + b^2$
e) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
f) $25a^2 - 100ab + 100b^2$
- 30. a)** $9a^2 + 12a + 4$
b) $x^2 - 2xy + y^2$
c) $4x^2 + 20x + 25$
d) $64a^2 - 112ab + 49b^2$
e) $25a^2 - 80a + 64$
f) $\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$
g) $\frac{4}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + 9$
h) $0,01x^2 + 0,1x + 0,25$
i) $x^4 + 2x^3 + x^2$
j) $0,04a^4 - 0,2a^2b + 0,25b^2$
- k)** $2x^2 + 4x + 2$
- l)** $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$
- 31.** Katso ratkaisu
- 32. a)** $x^2 - 49$
b) $25 - a^2$
c) $\frac{25}{4}x^2 - 4$
d) $\frac{1}{4}x^2 - 49$
e) $\frac{x^2}{9} - 16$
f) $\frac{4}{9}x^2 - 64$
g) $x^2 - 1$
h) $0,04x^2 - 0,36$
i) $x - 1$
j) $0,09a^2 - 64$
k) $\pi^2 - q^2$
l) $b - 16$
- 33. a)** $8x + 17$
b) $4x - 10$
c) $-0,08x^2 + 0,4x + 5$
d) $\frac{3x^2}{4} - 2x - \frac{40}{9}$
e) $= -x^4 + 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$
f) $\frac{x}{2}$
- 34. a)** $x = -\frac{21}{2}$
b) $x = -\frac{32}{5}$
- 35. a)** $5(a + b)$
b) $5(x + 4)$
c) $8(x - 2)$
d) $xy(3x + y)$
e) $7ab(1 - 3a)$
f) $2xy(x + 2)$
g) $x(x^2 + x + 1)$
h) $a^2(2 + a^2 - 3a^4)$
i) $3x^7(1 - 4x - 13x^2)$
j) $x^5(x^2 + 1)$
k) $x^n(x + 1)$

- 36.** **a)** $4y(1 - 3y)$
b) Ei onnistu
c) $(\sqrt{x} - 3)^2$
- 46.** **a)** $2a(1 - 2a + 8a^2)$
b) $x = 0$ tai $x = -1$
c) $2r(2x - 1) + 3x^2$
d) $x = \frac{4}{3}$ tai $x = -\frac{4}{3}$
e) $x = -\frac{21}{5}$
f) $x = 0$; $x = 2$ tai $x = -2$
g) $ah^4(ab^2 - x) = \frac{1}{2}$
h) $3ab(a - 3b + 2b^2)$
i) $0,09x(1 + 2y + 4x)$
j) $x^5(x^4 + 1)$
- 37.** **a)** $a^{25}(a^{25} + 1)$
b) $x^n(x + 1)$
c) $x^5(x^{n-5} + 1)$
d) $x^n(x^2 + x + 1)$
e) $a^4(a^{n-2} + a^{n-4} + 1)$
- 38.** **a)** $(x + 1)(4x + 9)$
b) $(x - 4)(x^4 - x^3)$
c) $(b + c)(a^3 + a^2 - a)$
- 39.** **a)** $(x + 1)(2 - 3x)$
b) $(2x - 5)(x + 4)$
c) $(3b + 5)(a - b + 7)$
d) $(\sqrt{7} - \pi)(z - 5)$
e) $(a - b)(\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3}x - 1)$
f) $(q - 2r)(-x^5 - 2x^4 + x^3)$
- 40.** **a)** $5(x + 1)$
b) 0
c) $-c(a + b)$
d) $4a(b - 1)$
e) $x + y$
f) $(x + 1)^3(x + 2)$
- 41.** **a)** Summan tuloa tai erotuksen tuloa
b) Neliöjuuri
- c)** $4a^2 + 12a + 9 = (2a + 3)^2$
 $100x^2 + 4x + \frac{1}{25} = (10x + \frac{1}{5})^2$
 $36t^2 + 12\sqrt{2}t + 2 = (6t + \sqrt{2})^2$
- d)** "Keskimmäisen termin täytyy olla $2ab$ "
e) Pitää paikkansa
f) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
 $a^2 + 2ab - b^2$ ei onnistu.
- 42.** **a)** $(a + b)^2$
b) $(4x - y)^2$
c) $(\frac{1}{2}x + y)^2$
d) $(\frac{1}{2} + x)^2$
e) $(\frac{1}{2}a - \sqrt{2}b)^2$
f) $(\pi + x)^2$
- 43.** **a)** Neliöjuurta
b) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$
 $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$
- 44.** **a)** $(x - 4)(x + 4)$
b) $(3 - z)(3 + z)$
c) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
d) $(\frac{1}{2}x - 3)(\frac{1}{2}x + 3)$
e) $(\frac{x^2}{2} - 4)(\frac{x^2}{2} + 4)$
f) $(\frac{2x}{3} - 1)(\frac{2x}{3} + 1)$
- 45.** **a)** $(y - z)^2$
b) $(2x - y)^2$
c) $(2x - 3)(2x + 3)$
d) Ei onnistu
e) $(2x - 3y)^2$
f) Ei onnistu
g) Ei onnistu
h) $(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$
i) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$
j) $(3y + 5z)^2$

2.2 Polynomit / Vastaus: Sekalaisia tehtäviä

1. a) 12
b) -8
c) $-\frac{48}{5}$
2. a) 22
b) 6
c) $-\frac{23}{9}$
3. Katso ratkaisu
4. a) $x = \frac{7}{2}$
b) $x = \frac{9}{8}$
c) $x = -3$ tai $x = 7$
5. $x = \frac{4}{11}$
6. $x = -100$
7. kun $x = -\frac{8}{5}$
8. a) $9x - 12$
b) $2x^2 + 5x + 2$
9. a) $\frac{9}{10}x^2 + 6$
b) $\frac{1}{10}x^2 - 6x - 2$
10. a) $x^2 + 5x - 14$
b) $-y^2 + 6y + 7$
c) $-6x^2 + 21x$
d) $-5y^2 + \frac{5y}{2}$
e) $= 3a^2 + 6a + \frac{8}{3}$
f) $= -\frac{2}{9}m^2 + \frac{5}{6}mn - \frac{1}{2}n^2$
g) $x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n$
11. a) $= -3x^2 + 23x$
b) $-2a^2 + b^2 + a - b + ab$
c) $-2x + 8$
d) $-3x^2 + 19x - 32$
e) $= -3a^2 + b^2 - ab$
f) $= -\frac{23}{3}x + 21$
g) $x^2 - 10x + 15$
h) $= a + 2 - a^2 - ab + 2b^2$
i) $x^2 - \frac{88}{21}x + \frac{2}{3}$
12. a) $x^2 + 4x + 4$
b) $4a^2 - 8a + 4$
c) $x^2 + 2xy + y^2$
d) $9x^2 - 24x + 16$
e) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$
f) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{12}{15}xy + \frac{9}{25}y^2$
13. a) $4a^2 - 4$
b) $4x^2 - \frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{36}x^2 - 49$
d) $5 - t^2$
e) $0,25x^2 - 1,21y^2$
f) $\pi^2 - r^2$
14. a) $x = \frac{5}{7}$
b) $x = \frac{48}{5}$
15. a) $10(a + 3)$
b) $8(x + 8y)$
c) $\frac{1}{3}(x - 1)$
d) $x(2y - x + 4x^2y)$
16. a) $4y(1 - 3y)$
b) $9x(x^2 - 3x + 2)$
c) $4m(2 - m + 4m^3)$
d) $\frac{1}{2}x(y - x)$
e) $x^{11}(x^3 + 1)$
f) $x^{20}(x^{n-20} + 1)$
17. a) $5(3x + 1)$
b) $(2x - 5)(-5x^2 + 1)$
c) $(6m - 3)(x - y + z)$
d) $= (x + 1)^n(x + 2)$
e) $(x + 1)^n(2x + 3)$
18. a) $(x - 4)(x + 4)$
b) $(3 - \frac{1}{5}z)(3 + \frac{1}{5}z)$
c) $(\frac{1}{2}x - 6)(\frac{1}{2}x + 6)$

- d)** $(\frac{2}{\sqrt{6}}x - 3)(\frac{2}{\sqrt{6}}x + 3)$
- e)** $(\frac{1}{4}m^2 - x)(\frac{1}{4}m^2 + x)$
- f)** $(0,1\sqrt{x} - 1)(0,1\sqrt{x} + 1)$
- 19. a)** $(2a + 3b)^2$
- b)** $(4x - y)^2$
- c)** $(a + 2)^2$
- d)** $(2x + \sqrt{2})^2$
- e)** $(3x - 2)^2$
- f)** Ei onnistu
- 20. a)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$
- b)** $x = \frac{6}{7}$ tai $x = 3$
- c)** $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 4$
- 21. a)** $-x + x^3$
- b)** $-x + x^4$
- c)** $-x + x^5$
- d)** $-x + x^6$
- e)** $-x + x^{n+1}$
- f)** 30
- 22.** Katso ratkaisu.
- 23.** Katso ratkaisu