

Monikulmiot ja ympyrä

Sisällys

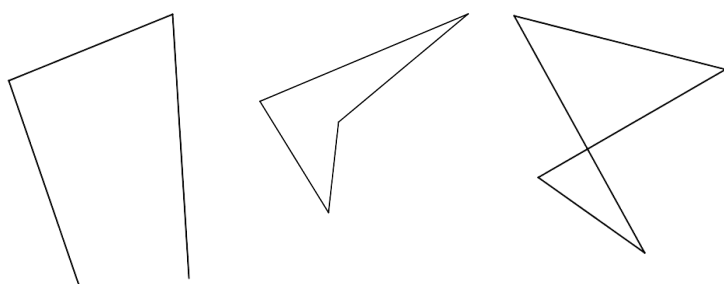
1 Polygonit	3
1.1 Teoria	3
1.1.1 Mikä on polygoni?	3
1.1.2 Polygonin pöirin pituus	3
1.1.3 Kolmiot	4
1.1.4 Nelikulmiot	6
1.1.5 Monikulmion korkeus	7
1.1.6 Polygonin pinta-ala	8
1.1.7 Pinta-alan muunnokset	11
1.2 Tehtävät	12
2 Ympyrä	19
2.1 Teoria	19
2.1.1 Ympyrä	19
2.1.2 Ympyrän kehä (pöiri)	20
2.1.3 Ympyrän pinta-ala	20
2.1.4 Ympyrän kaaren pituus	21
2.1.5 Sektorin pinta-ala	21
2.2 Tehtävät	23
3 Vastaus	27
3.1 Polygonit / Vastaus: Tehtävät	27
3.2 Ympyrä / Vastaus: Tehtävät	30

1 Polygonit

1.1 Teoria

1.1.1 Mikä on polygoni?

Janat, jotka ovat päätepisteistään kiinni toisissaan, muodostavat *polygonin*.



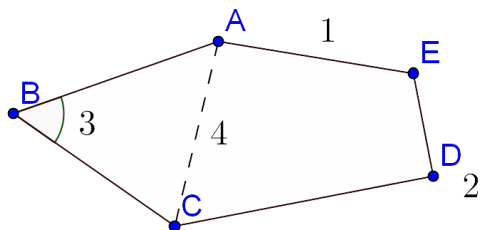
Avoin polygoni Suljettu polygoni Suljettu polygoni,
joka leikkaa
itseään

Suljettua polygonia, joka ei leikkaa itseään, kutsutaan *monikulmioksi*, ja me työskentelemme ainoastaan sellaisilla kuviolla tässä kappaleessa.

Monikulmion osia

Monikulmio koostuu

1. sivuista
2. kulmista (nimetään vastapäivään)
3. kulmista
4. lävistäjistä (jana yhdestä kulmasta toiseen)

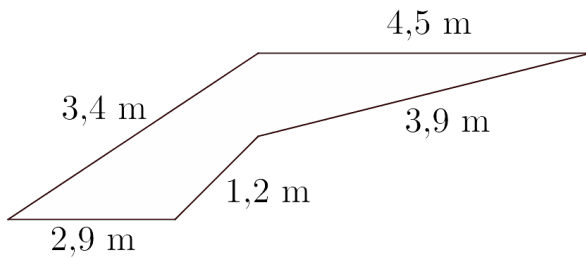


1.1.2 Polygonin piirin pituus

Laskemalla yhteen monikulmion sivujen pituudet saamme tietää sen *piirin pituuden* tai

ympärysmitan.

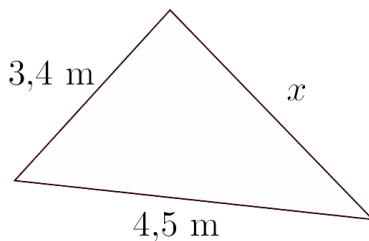
Esim. Laske monikulmion piirin pituus.



Merkitään piirin pituutta kirjaimella "P", joka tulee piiristä.

$$P = 3,4 \text{ m} + 4,5 \text{ m} + 3,9 \text{ m} + 1,2 \text{ m} + 2,9 \text{ m} \\ = 15,9 \text{ m}$$

Esim. Kuinka pitkä on sivu x kun piirin pituus on 14,4 m?

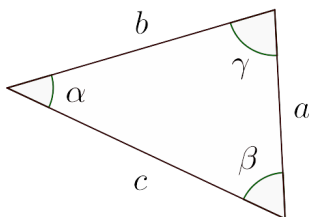


Muodostetaan yhtälö monikulmion piirin ja sivujen pituuksien suhteesta:

$$4,5 \text{ m} + 3,4 \text{ m} + x = 14,4 \text{ m} \quad \parallel \text{ Sievennetään} \\ 7,9 \text{ m} + x = 14,4 \text{ m} \quad \parallel - 7,9 \text{ m} \\ x = 6,5 \text{ m}$$

1.1.3 Kolmiot

Kolmio on polygoni, joka on rajattu kolmella sivulla.



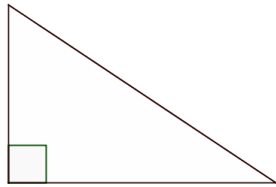
Jokaisella kolmion kulmalla on kaksi viereistä sivua ja yksi vastainen sivu. Jokaisella sivulla on myös kaksi viereistä kulmaa ja yksi vastainen kulma.

Huomioi kuvasta, miten sivut ja kulmat nimetään. Kulman $\angle\alpha$ vastainen sivu on a ja kulma $\angle\beta$ vastainen sivu on b .

Kolmioiden luokittelu

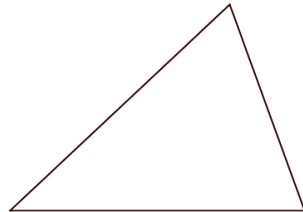
Suorakulmainen

kolmio



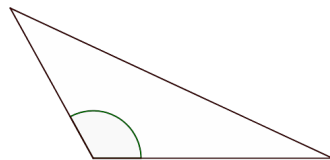
Yksi kulmista on 90°

Teräväkulmainen
kolmio



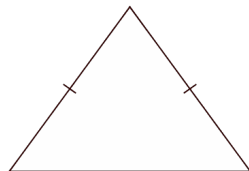
Kaikki kulmat ovat $< 90^\circ$

Tylppäkulmainen
kolmio



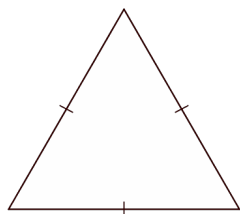
Yksi kulma on suurempi
kuin 90°

Tasakylkinen kolmio



Kaksi sivuista ovat yhtä
pitkät

Tasasivuinen kolmio

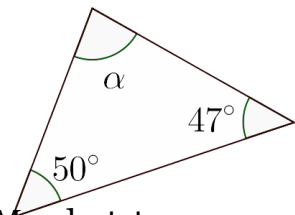


Kaikki sivut ovat yhtä
pitkät

Kolmion kulmien summa

Kolmion kulmien summa on 180° (tämä on todistettu kappaleessa geometrian perusteita).

Esim. Määritä $\angle \alpha$.



Muodostetaan seuraava yhtälö:

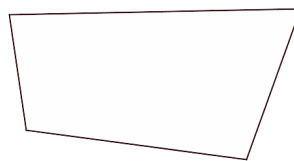
$$\begin{aligned} \alpha + 50^\circ + 47^\circ &= 180^\circ && \parallel \text{ Sievennetään} \\ \alpha + 97^\circ &= 180^\circ && \parallel - 97^\circ \\ \alpha &= 83^\circ \end{aligned}$$

1.1.4 Nelikulmiot

Monikulmiota, joka on neljän sivun rajaama, kutsutaan nelikulmioksi.

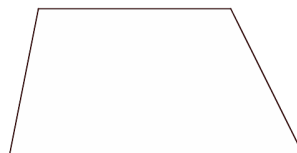
Nelikulmioiden luokittelu

Epäsäännöllinen
nelikulmio



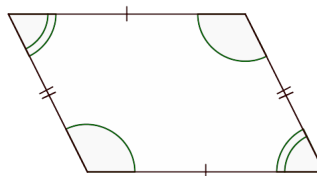
Ei ole yhdensuuntaisia
sivuja

Puolisuunnikas



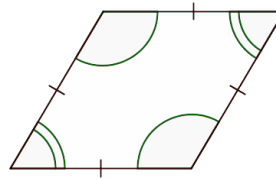
Kaksi sivuista ovat
yhdensuuntaiset

Suunnikas



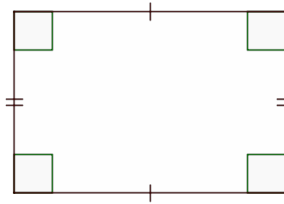
Vastakkaiset sivut ovat
yhdensuuntaiset ja
vastakkaiset kulmat ovat
yhtä suuret

Rombi



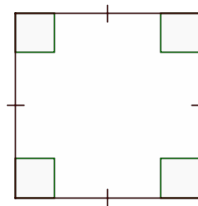
Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret

Suorakulmio



Kaikki kulmat ovat suoria ja vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä

Neliö



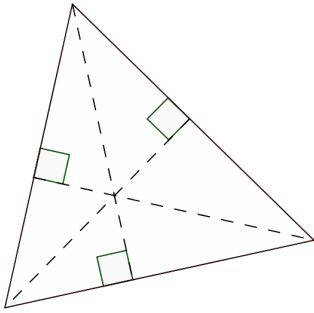
Kaikki kulmat ovat suoria ja kaikki sivut ovat yhtä pitkiä

1.1.5 Monikulmion korkeus

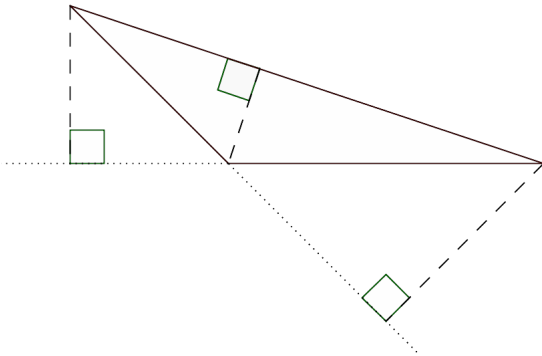
Kolmion korkeus

Kolmion korkeusjanan piirtämiseksi valitsemme kolmiosta yhden sivun, jota kutsumme *kannaksi*. Kannasta piirretään jana kannan *vastakkaiseen kulmaan* siten, että jana on suorassa kulmassa kantaa vasten.

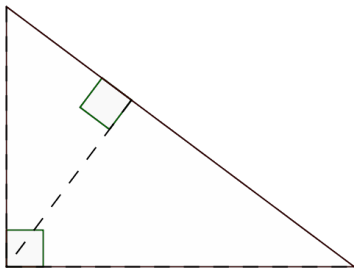
Korkeudet teräväkulmaisessa kolmiossa:



Tylppäkulmaisessa kolmiossa kahta sivuista pitää jatkaa kolmion ulkopuolelle niin, että korkeus voidaan piirtää:

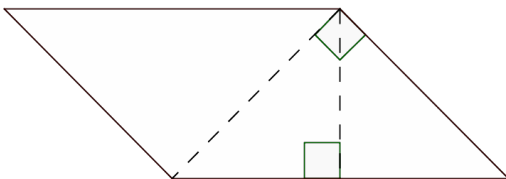


Suorakulmaisessa kolmiossa kaksi sivuista ovat suoraan kolmion korkeuksia:



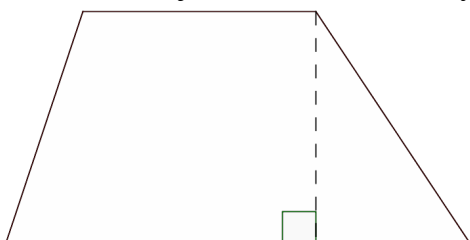
Suunnikkaan korkeus

Nelikulmissa valitsemme yhden sivuista kannaksi ja piirrämme siitä janan vastakkaiselle sivulle siten, että jana on suorassa kulmassa kantaa vasten:



Puolisuunnikkaan korkeus

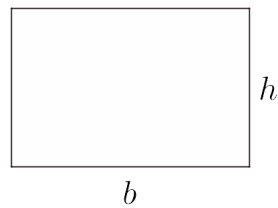
Puolisuunnikkaalla on oikeastaan kolme korkeutta, mutta meille on hyötyä ainoastaan siitä korkeudesta, joka kulkee kahden yhdensuuntaisen sivun välistä:



1.1.6 Polygonin pinta-ala

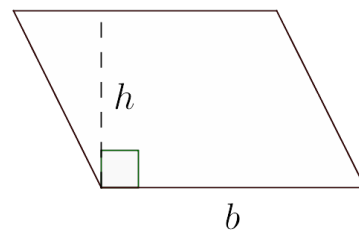
Pinta-ala on suure, joka kuvaa, kuinka suuren alueen kuvio peittää, eli kuinka suuri *ala* kuviolla on.

Suorakulmion pinta-ala



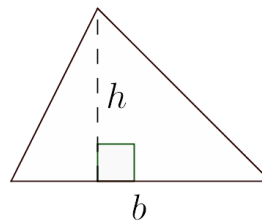
$$A = b \cdot h$$

Suunnikkaan pinta-ala



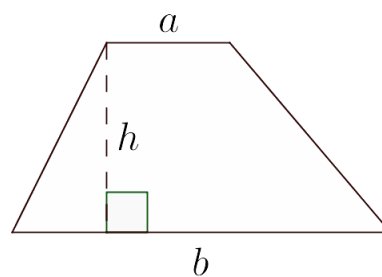
$$A = b \cdot h$$

Kolmion pinta-ala



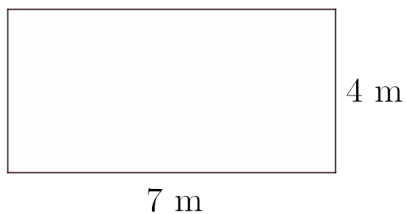
$$A = \frac{bh}{2}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala



$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

Esim. Määritä suorakulmion pinta-ala.



$$\begin{aligned} A &= 7 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} \\ &= 7 \cdot 4 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \\ &= 28 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Esim. Suunnikkaan pinta-ala on 42 m^2 ja korkeus on 7 m. Kuinka pitkä on suunnikkaan kanta?

Tiedämme, että $A = b \cdot h$, jolloin saamme seuraavan yhtälön:

$$42 \text{ m}^2 = b \cdot 7 \text{ m}.$$

Saadaksemme tietää, mikä arvo on b :llä, tulee meidän jakaa lauseke 7 m:llä:

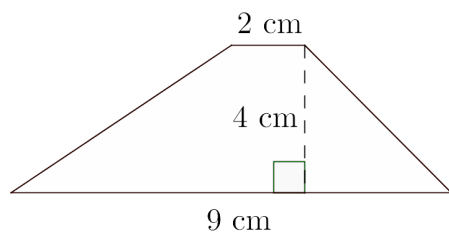
$$\frac{42 \text{ m}^2}{7 \text{ m}} = \frac{b \cdot 7 \text{ m}}{7 \text{ m}}.$$

Sievennetään, jolloin saamme

$$6 \text{ m} = b$$

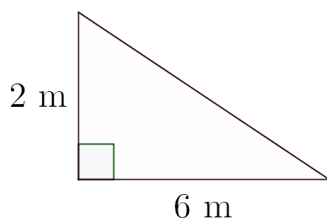
Kanta on siis 6 metriä.

Esim. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.



$$\begin{aligned} A &= \frac{(9 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) \cdot 4 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{11 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} \\ &= \frac{44 \text{ cm}^2}{2} \\ &= 22 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

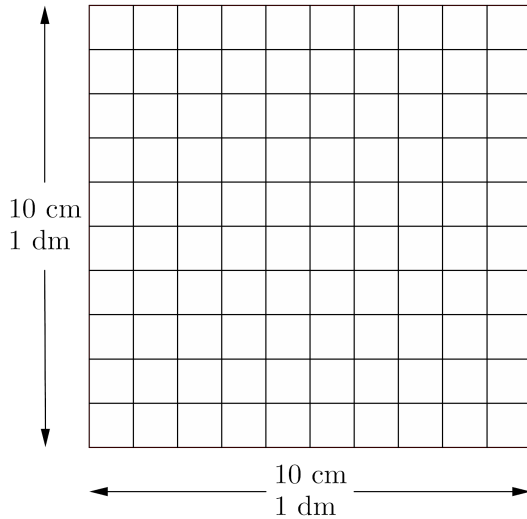
Esim. Määritä kolmion pinta-ala.



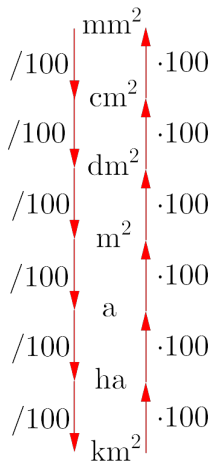
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}}{2} \\
 &= \frac{12 \text{ m}^2}{2} \\
 &= 6 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

1.1.7 Pinta-alan muunnokset

Tutkitaan aluksi alla olevaa kuvaa ymmärtääksemme, miten pinta-alan muunnokset toimivat.



Koko neliön pinta-ala on $1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 1 \text{ dm}^2$. Pienen neliön pinta-ala on $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$. Suureen neliöön mahtuu yhteensä 100 kappaletta pientä neliötä. Tämä tarkoittaa sitä, että $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.



Esim. $7000 \text{ m}^2 = 70 \text{ a}$

Esim. $0,5 \text{ dm}^2 = 50 \text{ cm}^2$

Esim. $0,0001 \text{ dm}^2 = 1 \text{ mm}^2$

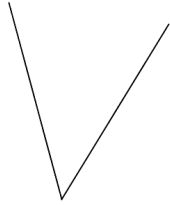
Esim. $60504 \text{ m}^2 = 6,0504 \text{ ha}$

1.2 Tehtävät

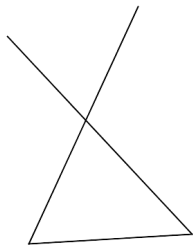
Mikä on polygони?

1. Mitkä ala olevista polygoneista on monikulmioita?

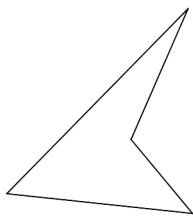
a)



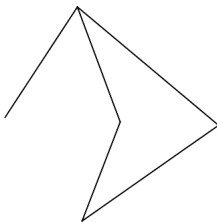
b)



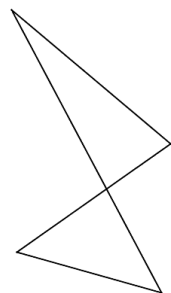
c)



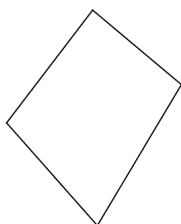
d)



e)



f)



2. Merkitse pisteet $A(-2, 1)$, $B(-2, -1)$, $C(1, 0)$, $D(3, -1)$ ja $E(2, 1)$

koordinaatistoon ja yhdistä ne aakkosjärjestyksessä niin, että muodostuu monikulmio. Piirrä halkaisijat AC ja BD. Mitä huomaat näistä kahdesta halkaisijasta? Mikä monikulmion kulmista aiheuttaa sen, että halkaisija BD kulkee varsinaisen monikulmion ulkopuolella?

3. Monikulmio, jolla on viisi kulmaa, on nimeltään "viisikulmio". Piirrä mielivaltainen viisikulmio niin, että
- kaikki halkaisijat ovat monikulmion sisäpuolella
 - ainakin yksi halkaisija kulkee monikulmion ulkopuolella.
4. Piirrä monikulmio ABCDE siten, että $\angle CBA > 180^\circ$ ja $\angle AED = 90^\circ$. Piirrä halkaisija, joka kulkee monikulmion ulkopuolella.
5. Tiedämme entuudestaan, että kolmion kulmien summa on 180° . Pystytkö tämän tiedon perusteella määrittelemään
- nelikulmion kulmien summan
 - viisikulmion kulmien summan
 - kuusikulmion kulmien summan

Vinkki: Piirrä nelikulmio, viisikulmio ja kuusikulmio. Jaa monikulmiot kolmioiksi halkaisijoiden avulla. Kuinka paljon kulmasumma kasvaa jokaisen uuden kulman lisäyksen jälkeen?

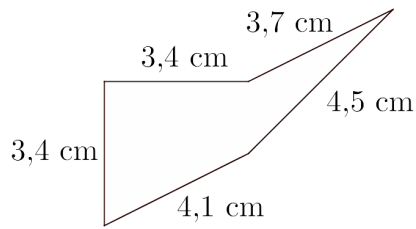
6. Säännöllinen monikulmio on sellainen monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kulmat yhtä suuret. Kuinka suuri on yksi kulma säännöllisessä
- kolmiossa
 - nelikulmiossa

- c) viisikulmiossa
 d) kuusikulmiossa?

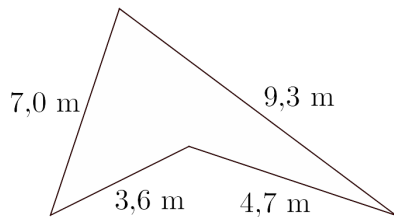
Polygonin piirin pituus

7. Laske monikulmion piirin pituus.

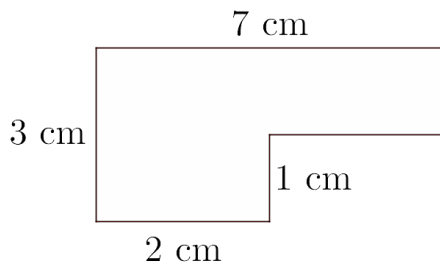
a)



b)

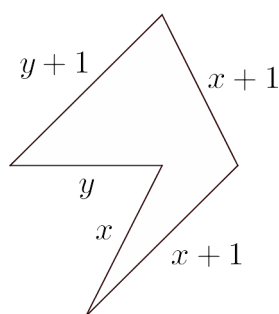


8. Laske monikulmion piirin pituus (kaikki kulmat ovat suorita).

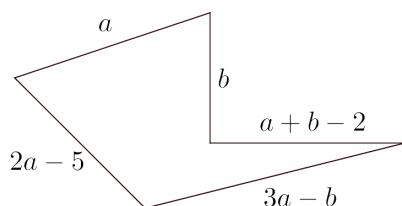


9. Laske seuraavien polygonien piirin pituus.

a)

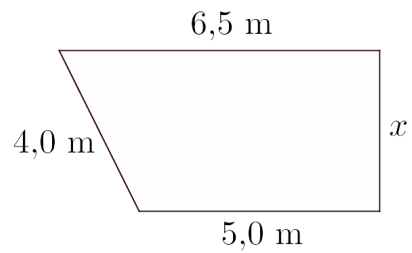


b)

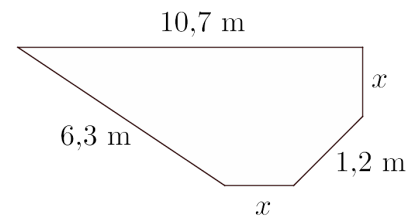


10. Määritä x , kun kuvion ympärysmitta on $20,0$ m.

a)



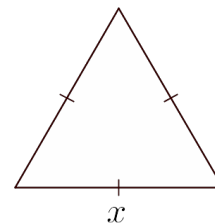
b)



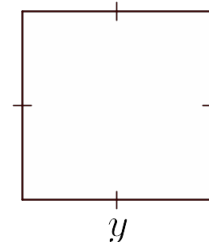
11. *Säännöllinen monikulmio* on sellainen monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kulmat yhtä suuret. Samanpituiset sivut merkitään "poikkiviivalla" niillä sivuilla, jotka ovat samanpituiset.

Alla olevien monikulmioiden piirin pituus on 36 cm. Määritä x , y ja z .

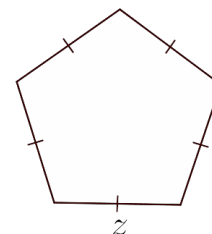
a)



b)



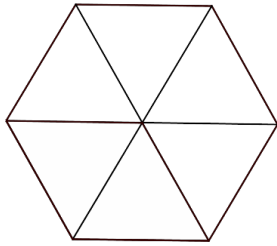
c)



12. Mikä on alla olevan säännöllisen monikulmion piirin pituus, kun väritetyn alueen piirin pituus on 28 m.

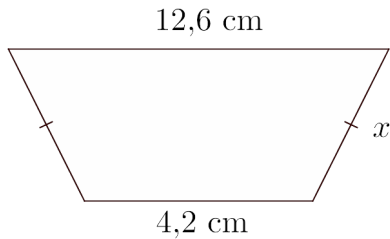
Vinkki: Säännöllinen kuusikulmio koostuu kuudesta kappaleesta

säännöllisiä kolmioita.

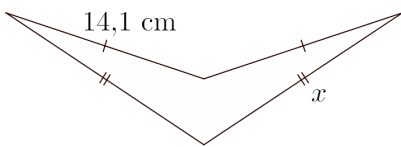


13. Määritä x , kun

a) $P = 26,8$ cm

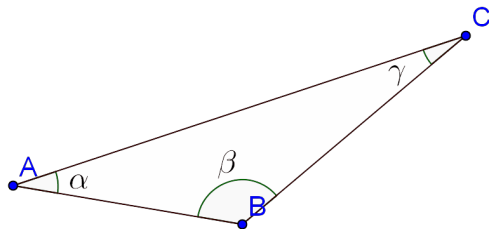


b) $P = 57,4$ cm



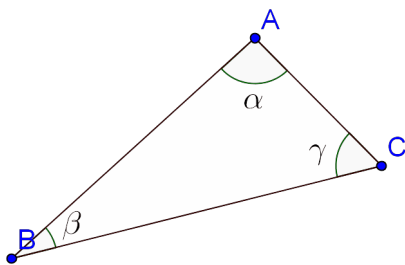
Kolmiot

14. Mitkä ovat viereisiä sivuja kulmalle



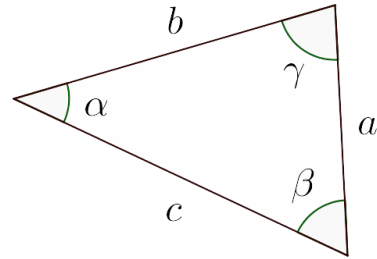
- a) $\angle \alpha$
- b) $\angle \beta$
- c) $\angle \gamma$

15. Mikä sivu on vastasivu kulmalle



- a) $\angle \alpha$
- b) $\angle \beta$
- c) $\angle \gamma$

16. Mitkä ovat viereisiä kulmia sivulle



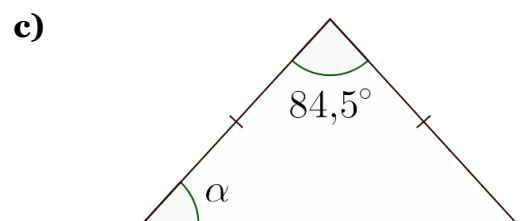
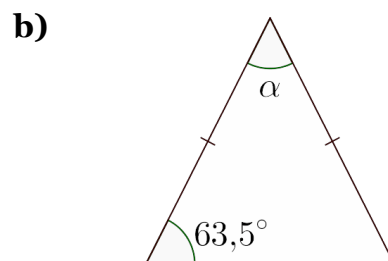
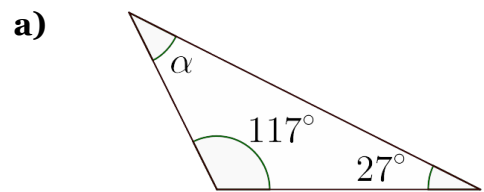
- a) a
- b) b
- c) c

17. Minkä niminen on säännöllinen kolmio?

18. Määritä mihin luokkaan kolmio kuuluu seuraavien kulma-asteiden perusteella.

- a) $\angle 35^\circ, \angle 90^\circ$ ja $\angle 55^\circ$
- b) $\angle 120^\circ, \angle 20^\circ$ ja $\angle 40^\circ$
- c) $\angle 40^\circ, \angle 80^\circ$ ja $\angle 60^\circ$
- d) $\angle 60^\circ, \angle 60^\circ$ ja $\angle 60^\circ$
- e) $\angle 20^\circ, \angle 20^\circ$ ja $\angle 140^\circ$
- f) $\angle 68^\circ, \angle 79^\circ$ ja $\angle 33^\circ$

19. Määritä $\angle \alpha$



20. Suorakulmaisessa kolmiossa yhden kulman suuruus on 34° . Määritä viimeisen kulman suuruus.

21. Kunka suurina ovat kulmat tasakylkisessä suorakulmaisessa kolmiossa?

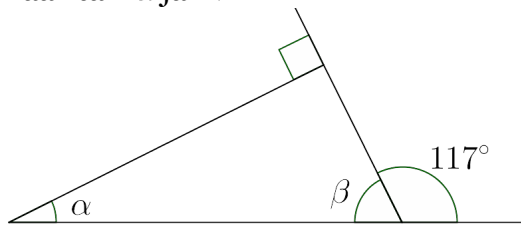
22. Kaksi kolmion kulmista on annettu. Luokittele kolmio.

a) 34° ja 59°

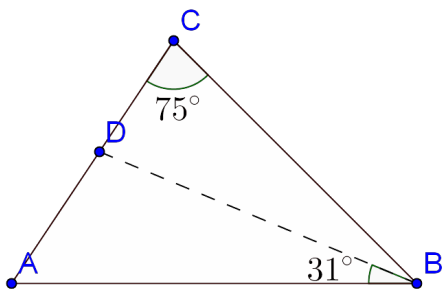
b) 73° ja 43°

c) 24° ja 48°

23. Määritä $\angle\alpha$ ja $\angle\beta$

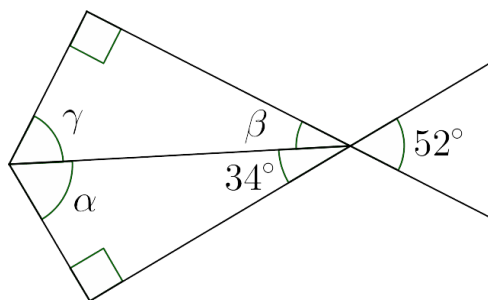


24. Jana BD on kulmanpuolittaja. Määritä kaikki kolmion kulmat.



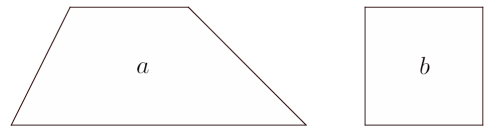
25. Tasakylkisessä kolmiossa yhtä pitkät sivut ovat 7 cm pidempiä kuin kolmas sivu. Piirin pituus on 70 cm. Kuinka pitkiä ovat kolmion sivut?

26. Määritä $\angle\alpha$, $\angle\beta$ ja $\angle\gamma$.



Nelikulmiot

27. Mitkä seuraavista nelikulmioista ovat



a) Puolisuunnikkaita, kun puolisuunnikkaalla on kaksi yhdensuuntaista sivua

b) suunnikas, kun suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset

c) rombi, kun rombin kaikki sivut ovat yhtä pitkät

d) suorakulmio, kun suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat suorina

e) neliö, kun neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat suorina?

28. Mitä voit kertoa kulmista

a) rombissa

b) suunnikkaassa?

29. Minkä niminen on säännöllinen nelikulmio?

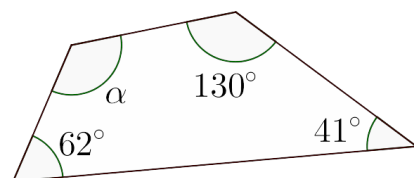
30. Mitä voit kertoa halkaisijoista

a) suorakulmiossa

b) neliössä

c) rombissa?

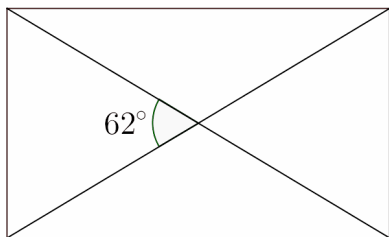
31. Määritä $\angle\alpha$.



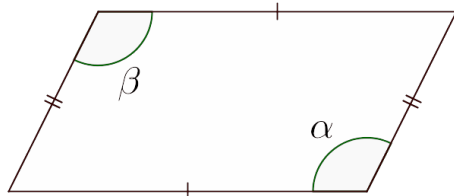
32. Rombissa on kulma, joka on 35° .

Kuinka suuria ovat muut kulmat?

- 33.** Suorakulmion ympärysmitta on 48 m. Yksi sivu on kolme kertaa pidempi kuin toinen sivu. Kuinka pitkiä sivut ovat?
- 34.** Suunnikkaan yhden kulman suuruus on 13° . Kuinka suuria ovat muut kulmat?
- 35.** Määritä kaikki suorakulmion kulmat.



- 36.** Tasasivuisella kolmiolla ja neliöllä on yhtä pitkä piirin pituus. Kolmion sivu on 30 cm. Kuinka pitkä sivu on neliöllä?
- 37.** Osoita, että $\angle\alpha = \angle\beta$



Vinkki: Jatka sivuja ja ajattele samankohtaisia kulmia.

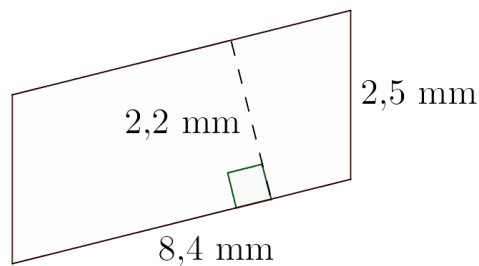
Monikulmion korkeus

- 38.** Piirrä mielivaltainen
- suorakulmainen kolmio
 - teräväkulmainen kolmio
 - tylppäkulmainen kolmio

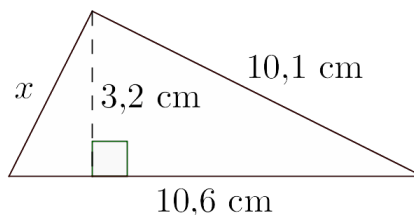
ja piirrä kaikkiin kolmioihin niiden kaikki korkeudet piirtokolmion avulla.

Polygonin pinta-ala

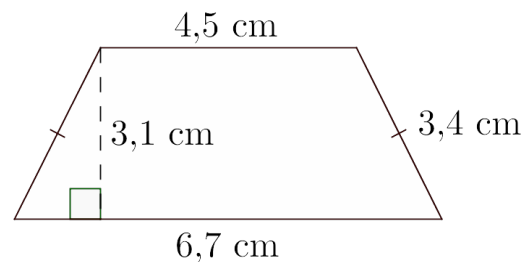
- 39.** Määritä suunnikkaan piirin pituus ja pinta-ala.



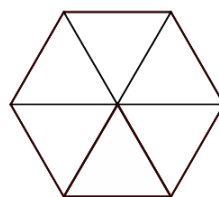
- 40.** Laske kolmion pinta-ala. Määritä myös x :n pituus, kun kolmion piirin pituus on 24,3 cm.



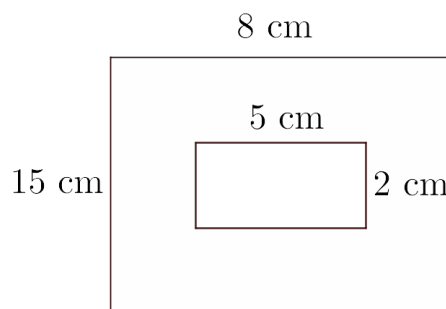
- 41.** Määritä puolisuunnikkaan piirin pituus ja pinta-ala.



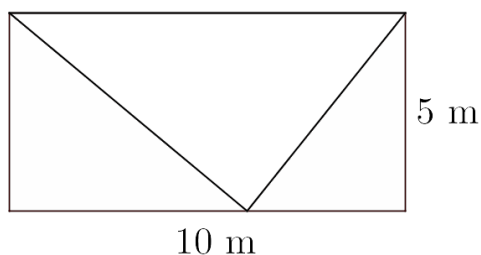
- 42.** Määritä säännöllisen kuusikulmion pinta-ala, kun väritetyn kolmion piirin pituus on 15 cm ja korkeus on 4,33 cm.



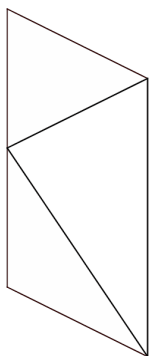
- 43.** Määritä väritetyn alueen pinta-ala.



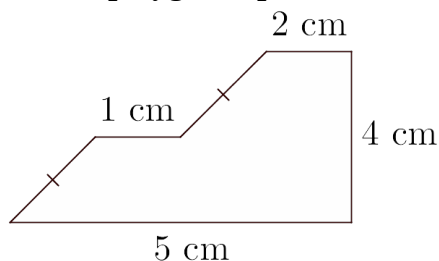
- 44.** Määritä väritetyn alueen pinta-ala. Mitä huomaat?



45. Kuinka suuri pinta-ala on kahdella väritetyllä alueella yhteensä verrattuna koko suunnikkaan pinta-alaan?



46. Määritä polygonin pinta-ala.



47. Määritä pinta-ala sellaiselle suorakulmiolle, jonka piirin pituus on 27 cm ja jonka pituus on tuplasti pidempi kuin leveys.

48. Ratkaise yhtälö $bh = A$ muuttujan

- a) b suhteen
b) h suhteen

49. Suorakulmion kanta on 6 cm. Pinta-ala on 66 cm^2 . Kuinka pitkä on suorakulmion korkeus?

50. Suunnikkaan korkeus on 11 cm ja pinta-ala on $38,5 \text{ cm}^2$. Määritä sen kannan pituus.

51. Ratkaise yhtälö $\frac{bh}{2} = A$ muuttujan

- a) b suhteen
b) h suhteen

52. Kolmion korkeus on $3,5$ metriä ja pinta-ala on $9,8 \text{ m}^2$. Kuinka pitkä on sen kanta?

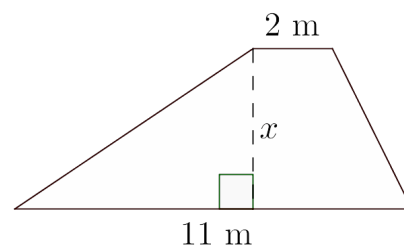
53. Kolmion kannan pituus on $9,1$ metriä ja pinta-ala on $5,3 \text{ m}^2$. Kuinka korkea kolmio on?

54. Ratkaise yhtälö $\frac{h(a+b)}{2} = A$ muuttujan

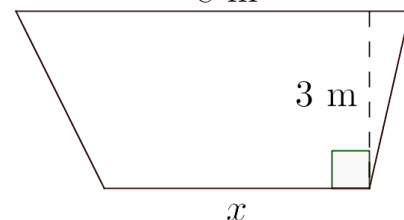
- a) a suhteen
b) b suhteen
c) h suhteen

55. Määritä x , kun

- a) Pinta-ala on 26 m^2



- b) pinta-ala on 21 m^2
8 m



Pinta-alan muunnokset

56. Mittaa yhden A4 paperin pituus ja ilmoita pituus

- a) millimetreinä
b) senttimetreinä
c) metreinä

57. Muunna metreiksi.

- a) 4 km
b) 59 dm
c) 560 cm
d) 53000 mm

58. Muunna neliömetreiksi

- a) 50 dm^2

b) 10,5 a

c) 0,04 ha

d) 10500 cm²

59. Muunna desimetreiksi.

a) 649 cm

b) 5,6 m

c) 0,05 km

d) 6500 mm

60. Muunna neliödesimetreiksi.

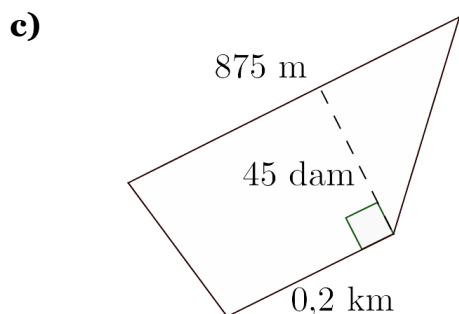
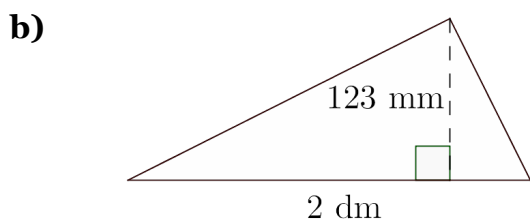
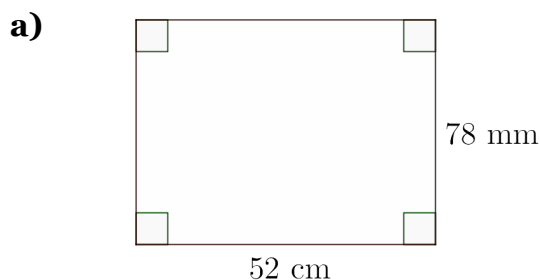
a) 3,4 m²

b) 520 cm²

c) 98000 mm²

d) 0,00054 a

61. Määritä polygonin pinta-ala.



62. Muunna hehtaareiksi

a) 689 a

b) 9356 m²

c) 0,12 km²

d) 98356 dm²

63. Muunna aareiksi.

a) 0,00058 km²

b) 674954 dm²

c) 845 m²

d) 805467235 mm²

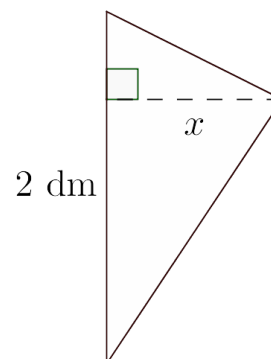
64. Eräs mies on kaakeloimassa keittiötä ja hänen tulee käyttää nelikulmaisia kaakeleita, joiden sivun pituus on 8 cm. Kuinka monta kaakelia hän tarvitsee, kun kaakeloitavan pinnan pinta-ala on 4,5 neliometriä?

65. Määritä x , kun

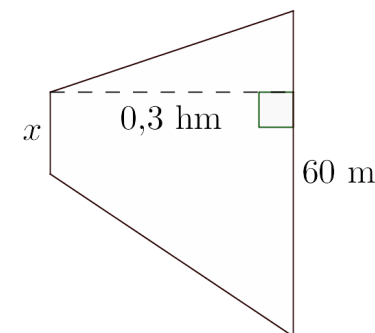
a) $A = 0,01 \text{ m}^2$



b) $A = 320 \text{ cm}^2$



c) $A = 24 \text{ a}$



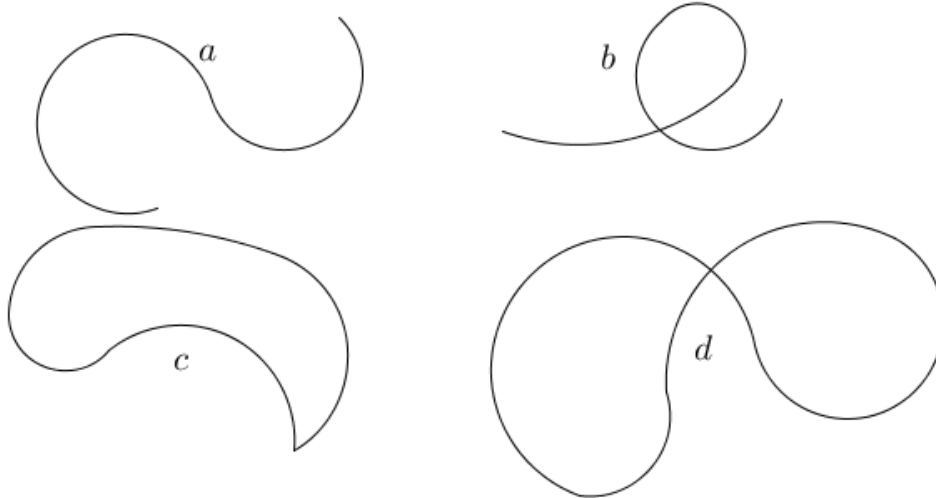
2 Ympyrä

2.1 Teoria

2.1.1 Ympyrä

Kaaret

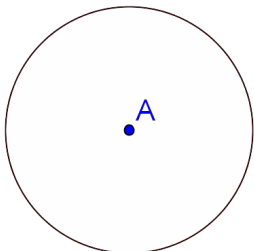
Kaari koostuu toisiinsa yhteydessä olevista pisteistä ja se nimetään pienellä kirjaimella.



- Kaari *a* on avoin
- Kaari *b* on avoin ja leikkaa itseään
- Kaari *c* on suljettu
- Kaari *d* on suljettu ja leikkaa itseään

Ympyrän määritelmä

Ympyrä on tasossa oleva *suljettu kaari*, joka koostuu kaikista tason pisteistä, jotka sijaitsevat samalla etäisyydellä ympyrän *keskipisteestä*. Ympyrä nimetään keskipisteensä mukaan. Sitä kaarta, josta ympyrä koostuu, kutsutaan ympyrän *kehäksi* (ja se merkitään pienellä *p*:llä).

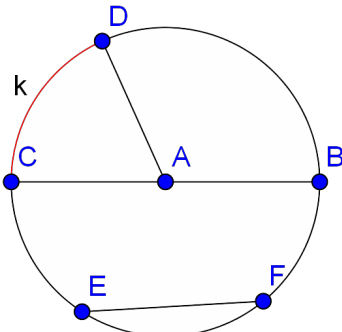


Ympyrä A

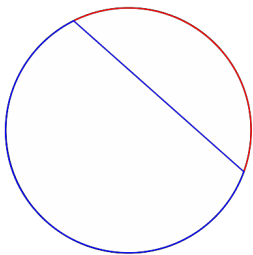
Ympyrän osat

- *Jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kehän pistettä

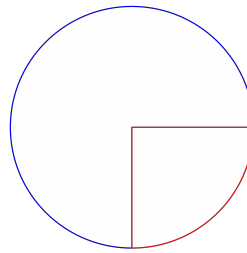
- *Halkaisija* on jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta
- *Säde* on jana, joka kulkee ympyrän keskipisteestä yhteen ympyrän kehän pisteeseen
- *Ympyrän kaari* on yksi osa ympyrän kehästä
- *Sektori* on alue, joka rajautuu kahteen säteeseen ja ympyrän kaareen
- *Segmentti* on alue, joka rajautuu jänneeseen ja ympyrän kaareen.



- Jana EF on jänne
- Jana BC on halkaisija
- Jana AB on säde
- Kaari k on ympyrän kaari



Segmentti



Sektori

2.1.2 Ympyrän kehä (piiri)

Ympyrän *kehän* ja *halkaisijan* välinen *suhde* on aina sama, riippumatta siitä, kuinka suuri tai pieni ympyrä on. Tämä suhde on luku π (pii), joka on irrationaaliluku. Jos piille määritellään likiarvo, on useimmin käytetty π :n arvona $3,14$.

$$\frac{\text{ympyrän kehä}}{\text{halkaisija}} = \pi$$

Jos ympyrän halkaisijan pituus tiedetään, voimme laskea ympyrän kehän pituuden.

$$\text{Ympyrän kehä} = \text{halkaisija} \cdot \pi$$

Esim. Ympyrän halkaisija on 3 cm. Kuinka pitkä on ympyrän kehän pituus?

$$P = 3 \text{ cm} \cdot \pi = \overbrace{3\pi \text{ cm}}^{\text{tarkka arvo}} \\ \approx \underbrace{9,42 \text{ cm}}_{\text{likiarvo}}$$

Soveltavissa tehtävissä voi vastauksen ilmoittaa likiarvona, mutta puhtaasti matemaattisessa tehtävässä voi vastaukseksi antaa tarkan arvon.

2.1.3 Ympyrän pinta-ala

Tulemme nyt laskemaan kaaren alle jäävän alueen pinta-alan ensimmäistä kertaa. Tämä on sellainen tehtävä, joka on historiallisesti aina ollut hieman hankalaa. Vain Arkimedes onnistui tässä antiikin aikana, mutta hänen tietonsa menetettiin ja kesti 1600-luvulle asti ennen kuin modernin ajan aikana on pystytty kehittämään matematiikkaa niin pitkälle, että pystyisimme suorittamaan tämän tehtävän.

Ympyrän pinta-alan voi laskea kaavan $A = \pi r^2$ kautta, jossa r on ympyrän säde.

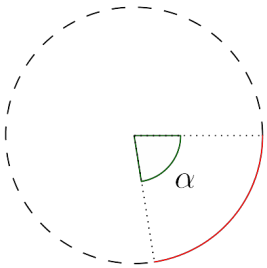
Esim. Määritä ympyrän pinta-ala, kun sen halkaisija on 12 cm.

Jos halkaisija on 12 cm, niin silloin säde on 6 cm. Tällöin:

$$A = \pi \cdot (6 \text{ cm})^2 = \overbrace{36\pi \text{ cm}^2}^{\text{tarkka arvo}} \\ \approx \underbrace{113 \text{ cm}^2}_{\text{likiarvo}}$$

2.1.4 Ympyrän kaaren pituus

Ympyrän kaari on yksi osa ympyrän kehää. Kysymys kuuluukin, kuinka suuri osa kaari on kehästä? Alla oleva kuva auttaa meitä hahmottamaan, miten ympyrän kaaren pituus voidaan laskea:



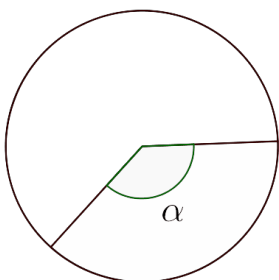
Sektorin keskuskulma α määrittää sen, kuinka suuri osa kehän pituudesta kaari tulee olemaan. Tästä syystä kaaren pituus on

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \underbrace{d\pi}_{\text{piirin pituus}}$$

jossa d on ympyrän halkaisija.

2.1.5 Sektorin pinta-ala

Voimme selvittää sektorin pinta-alan samalla tavalla kuin laskimme sektorin kehän pituuden. Keskuskulman suuruus määrittää jälleen, kuinka suuri osa koko ympyrän pinta-alasta sektorin pinta-ala on.

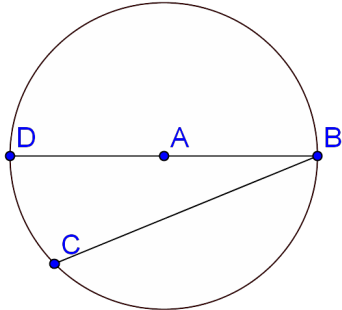


Sektorin pinta-ala: $\frac{\alpha}{360^\circ} \underbrace{\pi r^2}_{\text{pinta-ala}}$

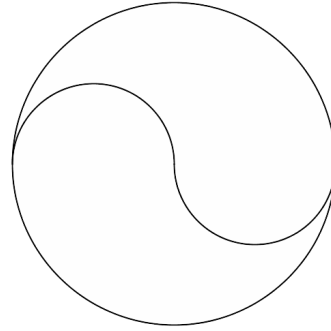
2.2 Tehtävät

Ympyrä

- Piirrä ympyrä, jonka halkaisija on 7 cm.
- Ilmoita kirjaimin ympyrän



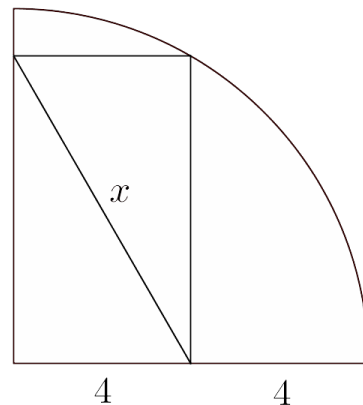
- jänne
 - säde
 - halkaisija
- Kuinka monta leikkauspistettä voi kahdella tasossa olevalla ympyrällä olla? Piirrä myös kuvat tilanteista.
 - Onko väite oikein vai väärin?
 - Ympyrässä halkaisija on tuplasti pidempi kuin säde.
 - Ympyrässä halkaisija on pisin jänne.
 - On mahdollista, että etäisyys ympyrän keskipisteestä sen kehälle voi vaihdella.
 - Viiva on kaari
 - Kahdella ympyrällä voi olla kolme yhteistä leikkauspistettä.
 - On olemassa tilanne, jossa segmentti ja sektori kuvaavat samaa aluetta ympyrässä. Voitko keksiä, miltä sellainen sektori tai segmentti näyttää?
 - Muodosta matemaattinen kuvaus
 - sektorista
 - segmentistä
 - Piirrä alla oleva kuvio harpin avulla vihkoosi.



- Piirrä koordinaatisto ja siihen kaksi ympyrää. Yhden ympyrän keskipiste on $A(1, -3)$ ja sen yksi kehäpiste on $B(-1, -1)$ ja toisen ympyrän keskipiste on $C(-2, 0)$ ja yksi kehäpiste on $D(-3, 1)$.

Huomaamme, että ympyrät sivuavat toisiaan, mutta mikä on matemaattisesti oikea nimitys tälle sivuamiselle?

- Ratkaise x .

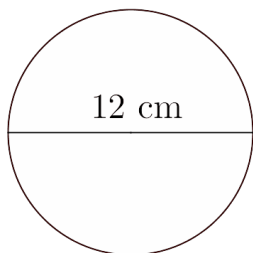


Ympyrän kehä (piiri)

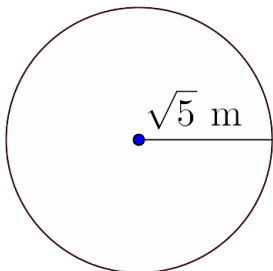
- Laske likiarvo ympyrän piirille, kun sen halkaisija on
 - 52 cm
 - $\frac{2}{3}$ m
 - $\sqrt{7}$ km
- Laske ympyrän kehän pituus, kun tiedämme, että sen säde on
 - 15 cm
 - 0,4 cm
 - $\frac{4}{7}$ cm
- Määritä ympyrän kehän tarkka

pituus.

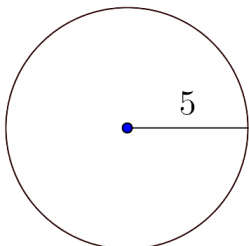
a)



b)

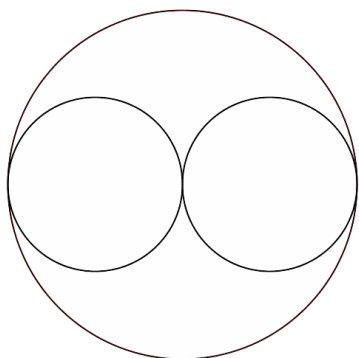


13. Selitä, minkä virheen oppilas on tehnyt, kun hän on laskenut ympyrän kehän pituuden seuraavasti:



$$P = 5\pi \approx 15,7$$

14. Kuinka pitkän matkan pyörii rengas yhden kierroksen aikana, kun sen halkaisija on 45 cm?
15. Pallo, jonka halkaisija on 25 senttimetriä, pyöri pitkin 20 metriä pitkää mäkeä alas. Kuinka monta kierrosta pallo pyöri näiden 20 metrin matkalla?
16. Kumpi on pidempi, suuren ympyrän kehän pituus vai kahden ympyrän yhteenlasketut kehän pituudet?



17. Ratkaise yhtälö $d\pi = P$ muuttujan d

suhteen.

18. Ylhäältä katsottuna vuoren muoto muistuttaa hyvin paljon ympyrää. Vuoren läpi tullaan räjäyttämään tunneli autotietä varten. Kuinka pitkä tunneli tulee olemaan, kun vuoren ympärysmitta on noin $5,3$ km?
19. Kuvittele, että meillä olisi erittäin pitkä naru ja kiertäisimme sen koko maapallon ympäri. Kuvittele sitten, että meillä on toinen naru, jonka viritämme myös maapallon ympäri toisen narun päälle, mutta 1 metri sen yläpuolelle. Muodosta lauseke, joka kuvaa, kuinka paljon pidempi tämä toinen naru on kuin ensimmäinen naru.
20. Ratkaise yhtälö $2\pi r = P$ muuttujan r suhteen.
21. Määritä ympyrän säteen tarkka arvo, kun ympyrän kehän pituus on 50 cm.

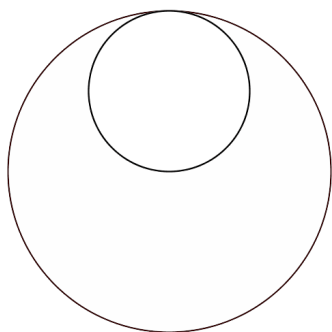
Ympyrän pinta-ala

22. Laske pinta-alan likiarvo ympyrälle, jonka säde on
- a) 1,3 cm
b) $\frac{4}{9}$ m
c) $\sqrt{2}$ m
23. Laske ympyrän pinta-alan likiarvo, kun ympyrän halkaisija on
- a) 16 cm
b) 0,3 m
c) $\frac{1}{9}$ km
24. Määritä ympyrän pinta-alan tarkka arvo, kun ympyrän säde on
- a) 2 cm
b) $\frac{2}{3}$ m
c) $\sqrt{5}$ mm
25. Oppilaalla on ollut tehtävänä laskea pinta-ala ympyrälle, jonka halkaisija on 3 ja hän on laskenut sen näin:

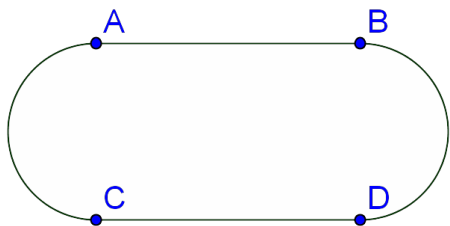
$$A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

Mitä hän teki väärin?

26. Määritä ympyrän pinta-ala kolmen desimaalin tarkkuudella, kun ympyrän kehän pituus on $1, 2\pi$.
27. Erään ympyrän kehän pituus on 10 cm. Ilmoita ympyrän pinta-alan tarkka arvo.
28. Valkoisen alueen säteen pituus on 3 cm. Määritä tummennetun alueen pinta-ala.



29. Ratkaise yhtälö $\pi r^2 = A$ muuttujan r suhteen.
30. Kuinka pitkä on on ympyrän säde, kun sen pinta-ala on 50 m^2 ?
31. Erään ympyrän pinta-ala on $100\pi \text{ m}^2$. Määritä sen kehän tarkka pituus.
32. Alla oleva kuva esittää juoksurataa. Jana $AB = CD = 100 \text{ m}$. Tiedämme, että oikean juoksuradan tulee olla 400 m pitkä. Määritä radan välissä olevan alueen pinta-ala.



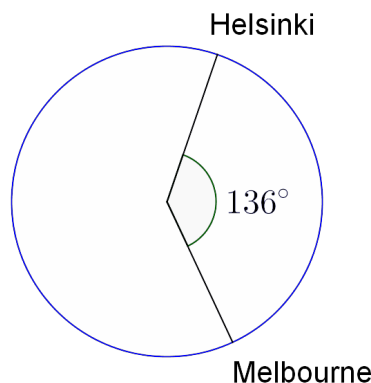
33. Osoita, että ympyrän pinta-ala kasvaa nelinkertaiseksi kun sen säteen pituus tuplaantuu.
34. Kellon minuuttiviisari on 15 cm pitkä. Kuinka pitkän matkan on minuuttiviisarin kärki kulkenut



- a) 1 tunnin aikana
b) 30 minuutin aikana
c) 15 minuutin aikana
d) 5 minuutin aikana
e) 1 minuutin aikana

Ympyrän kaaren pituus

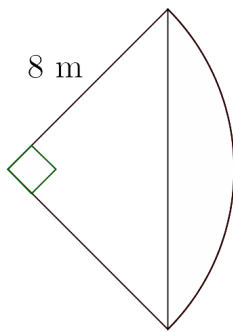
35. Ympyrän halkaisija on 13 m. Määritä ympyrän kaaren pituus, kun keskuskulma on
- a) 9°
b) 47°
36. Määritä Helsingin ja Melbournen välinen etäisyys, kun maapallon säteen pituus on noin 6400 km.



37. Ratkaise yhtälö $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot d\pi = k$ muuttujan
- a) d suhteen
b) α suhteen
38. Määritä keskuskulman suuruus, kun ympyrän kaaren pituus on 65 ja säteen pituus on 74

Sektorin pinta-ala

39. Erään ympyrän säteen pituus on 45 m ja sen keskuskulma on 31° . Määritä sektorin pinta-ala.
40. Määritä segmentin pinta-ala.



- 41.** Ratkaise yhtälö $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = S$
muuttujan
- a)** r suhteen
 - b)** α suhteen
- 42.** Erään ympyrän sektorin pinta-ala on 89 cm^2 ja keskuskulman suuruus on 23° . Mikä on säteen pituus?

3 Vastaus

3.1 Polygonit / Vastaus: Tehtävät

1. a) Ei ole monikulmio
b) Ei ole monikulmio
c) On monikulmio
d) Ei ole monikulmio
e) Ei ole monikulmio
f) On monikulmio
2. C
3. a) Katso ratkaisu
b) Katso ratkaisu.
4. Katso ratkaisu
5. a) 360°
b) 540°
c) 720°
6. a) 60°
b) 90°
c) 108°
d) 120°
7. a) 19,1 cm
b) 24,6 m
8. 20 cm
9. a) $3x + 2y + 3$
b) $7a + b - 7$
10. a) 4,5 m
b) 0,9 m
11. a) 12 cm
b) 9 cm
c) $\frac{36}{5}$ cm
12. 42 m.
13. a) 5 cm.
b) 14,6 cm
14. a) AC ja AB
b) AB ja BC
c) AC ja BC
15. a) BC
b) AC
c) AB
16. a) β ja γ
b) α ja γ
c) α ja β
17. Tasasivuinen kolmio
18. a) Suorakulmainen
b) Tylppäkulmainen
c) Teräväkulmainen
d) Tasasivuinen
e) Tasakylkinen
f) Teräväkulmainen
19. a) 36°
b) 53°
c) $47, 75^\circ$
20. 56°
21. $90^\circ, 45^\circ$ ja 45°
22. a) Teräväkulmainen
b) Teräväkulmainen
c) Tylppäkulmainen
23. $\angle\beta = 63^\circ$ ja $\angle\alpha = 27^\circ$
24. $\angle CBD = 31^\circ$
 $\angle BDC = 74^\circ$
 $\angle ADB = 106^\circ$
 $\angle A = 43^\circ$
25. Sivut ovat $\frac{77}{3}$ cm, $\frac{77}{3}$ cm ja $\frac{56}{3}$ cm
26. $\alpha = 56^\circ$
 $\beta = 18^\circ$
 $\gamma = 72^\circ$
27. a) a,b,c,e,f
b) b,c,e,f
c) b,f
d) b,e

- e)** b
- 28. a)** Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
b) Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
- 29.** Neliö
- 30. a)** Ne ovat yhtä pitkät.
b) Ne ovat yhtä pitkät ja ne ovat toisiinsa kohden suorassa kulmassa.
c) Ne ovat toisiinsa kohden suorassa kulmassa.
- 31.** $\alpha = 127^\circ$
- 32.** $145^\circ, 145^\circ, 35^\circ$ ja 35°
- 33.** 6 m, 6 m, 18 m ja 18 m
- 34.** $167^\circ, 167^\circ, 13^\circ$ ja 13°
- 35.** $\angle\alpha = 59^\circ, \angle\beta = 118^\circ$ ja $\angle\gamma = 31^\circ$
- 36.** 22,5 cm
- 37.** Katso ratkaisu.
- 38. a)** Katso teoria
b) Katso teoria
c) Katso teoria
- 39.** $P=21,8$ mm
 $A \approx 18,5$ mm²
- 40.** $A \approx 17$ cm²
 $x = 3,6$ cm
- 41.** $P = 18$ cm
 $A \approx 17,4$ cm²
- 42.** $A \approx 65$ cm²
- 43.** 110 cm²
- 44.** 25 m²
- 45.** Puolet
- 46.** 14 cm²
- 47.** 40,5 cm²
- 48. a)** $b = \frac{A}{h}$
b) $h = \frac{A}{b}$
- 49.** 11 cm
- 50.** 3,5 cm
- 51. a)** $b = \frac{2A}{h}$
b) $h = \frac{2A}{b}$
- 52.** 5,6 m
- 53.** $\approx 1,2$ m
- 54. a)** $a = \frac{2A}{h} - b$
b) $b = \frac{2A}{h} - a$
c) $h = \frac{2A}{a+b}$
- 55. a)** 4 m
b) 6 m
- 56. a)** 297 mm
b) 29,7 cm
c) 0,297 m
- 57. a)** 4000 m
b) 5,9 m
c) 5,6 m
d) 53 m
- 58. a)** 0,5 m²
b) 1050 m²
c) 400 m²
d) 1,05 m²
- 59. a)** 64,9 dm
b) 56 dm
c) 500 dm
d) 65 dm
- 60. a)** 340 dm²
b) 5,2 dm²
c) 9,8 dm²
d) 5,4 dm²
- 61. a)** 405,6 cm²
b) 1,23 dm²
c) ≈ 24 ha
- 62. a)** 6,89 ha
b) 0,9356 ha
c) 12 ha

- d)** 0,098356 ha
- 63. a)** 5,8 a
- b)** 67,4954 a
- c)** 8,45 a
- d)** 8,05467235 a
- 64.** noin 703
- 65. a)** $\frac{1}{4}$ dm
- b)** 3,2 dm
- c)** 10 dam

3.2 Ympyrä / Vastaus: Tehtävät

1. Katso ratkaisu.
2. a) BC (tai BD)
b) AD tai AB
c) BD
3. Nolla, yksi, kaksi tai äärettömän monta.
4. a) Oikein
b) Oikein
c) Väärin
d) Oikein
e) Väärin
5. Puoliympyrä.
6. a) Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
- 7.
8. Ympyrät *tangentoivat* toisiaan
9. 8
10. a) ≈ 163 cm
b) ≈ 2 m
c) ≈ 8 km
11. a) ≈ 94 cm
b) $\approx 2,5$ cm
c) $\approx 3,6$ cm
12. a) 12π cm
b) $2\sqrt{5}\pi$ m
13. Kehän pituus lasketaan "halkaisija x pii" eikä "säde x pii"
14. ≈ 141 cm.
15. 25 kokonaista kierrosta
16. Ne ovat yhtä pitkät.
17. $d = \frac{P}{\pi}$
18. Noin 1,7 km
19. 2π
20. $r = \frac{P}{2\pi}$
21. $\frac{25 \text{ cm}}{\pi}$
22. a) $\approx 5 \text{ cm}^2$
b) $\approx 0,6 \text{ m}^2$
c) $\approx 6 \text{ m}^2$
23. a) $\approx 201 \text{ cm}^2$
b) $\approx 0,1 \text{ m}^2$
c) $\approx 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ km}^2$
24. a) $4\pi \text{ cm}^2$
b) $\frac{4\pi}{9} \text{ m}^2$
c) $5\pi \text{ mm}^2$
25. Kun lasketaan ympyrän pinta-ala, tulee käyttää ympyrän sädettä eikä halkaisijaa.
26. $\approx 1,131$
27. $\frac{25}{\pi} \text{ cm}^2$
28. $27\pi \text{ cm}^2$
29. $r = (\pm)\sqrt{\frac{A}{\pi}}$
30. ≈ 4 m
31. 20π m
32. noin ≈ 96 a
33. Katso ratkaisu.
34. a) ≈ 94 cm.
b) ≈ 47 cm
c) $\approx 23,5$ cm
d) ≈ 8 cm
e) $\approx 1,6$ cm
35. a) ≈ 1 m
b) $\approx 5,3$ m.
36. ≈ 15200 km
37. a) $d = \frac{k \cdot 360^\circ}{\alpha\pi}$
b) $\alpha = \frac{k \cdot 360^\circ}{d\pi}$
38. $\approx 50^\circ$
39. $\approx 548 \text{ m}^2$
40. $\approx 18 \text{ m}^2$

41. a) $r = (\pm) \sqrt{\frac{s \cdot 360^\circ}{\alpha \pi}}$

b) $\alpha = \frac{S \cdot 360^\circ}{\pi r^2}$

42. $\approx 21 \text{ cm}$