

Murtoluvut

Sisällys

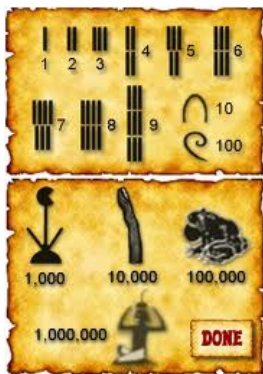
1 Murto- ja desimaaliluvut	3
1.1 Historia	3
1.2 Teoria	5
1.2.1 Jaollisuussäännöt	5
1.2.2 Rationaaliset luvut	5
1.2.3 Sekaluvusta murtoluvuksi	6
1.2.4 Murtolukujen laentaminen ja supistaminen	6
1.2.5 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskut	7
1.2.6 Murtolukujen jako- ja kertolaskut	8
1.2.7 Murtolukumuoto ja desimaalimuoto	9
1.3 Tehtävät	11
1.4 Sekalaisia tehtäviä	15
2 Vastaus	17
2.1 Murto- ja desimaaliluvut / Vastaus: Tehtävät	17
2.2 Murto- ja desimaaliluvut / Vastaus: Sekalaisia tehtäviä	20

1 Murto- ja desimaaliluvut

1.1 Historia

Murtoluvut ovat aina olleet mysteerisiä vaikka vanhoilla kulttuureilla onkin ollut kukoistava matematiikan osaaminen. Murtolukuja ei tunnettu Euroopassa niiden nykyisessä muodossaan ennen 1800-lukua. Tätä ennen murtolukuja käytettiin vain eri kokolukujen vertailuun eikä itse murtolukua pidetty edes lukuna. Katsotaan seuraavaksi, miten eri kulttuureissa käsiteltiin murtolukuihin liittyviä ongelmia.

Egypti ja Rooma



Tiedetään, että Egyptissä laskettiin murtoluvuilla jo 4000 vuotta sitten. He hyödynsivät jopa kymmenlukujärjestelmää, kuten mekin, ja heillä oli eri symboleita merkitsemään lukuja 1, 10, 100 ja niin edelleen. Nämä symbolit kuuluivat heidän kirjainjärjestelmäänsä, joita kutsutaan hieroglyfeiksi. Tässä yhteydessä egyptiläiset kuitenkin tekivät virheen murtolukuja kirjoittaessaan, he nimittäin merkitsivät luvun murtoluvuksi lisäämällä luvun yläpuolelle murtolukua tarkoittavan symbolin. Tämä tarkoittaa sitä, että heillä oli ainoastaan murtolukuja, joiden osoittajana oli yksi. Jostain syystä he eivät voineet laskea yhteen samannimisiä murtolukuja, ei siis esimerkiksi ollut mahdollista laskea $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Koska heidän hieroglyfeihin perustuva järjestelmänsä ei ollut käytännöllinen laskemiseen, tarvitsivat egyptiläiset suuria murtolukutauluja, joissa kerrottiin tavallisempien murtolukujen mahdollisia summia.

Rooman valtakunnassa oli samanlaisia ongelmia kuin Egyptissä. Murtoluvut ilmoitettiin kirjallisesti ja siitä syystä niitä oli erittäin vaikea laskea yhteen.

$\frac{1}{12}$ oli nimeltään *uncia*

$\frac{6}{12}$ oli nimeltään *semis*

$\frac{1}{24}$ oli nimeltään *semuncia*

$\frac{1}{144}$ oli nimeltään *scripulum*

Intia

Se järjestelmä, jota me tänä päivänä käytämme murtolukujen ilmaisemiseen, kehitettiin Intiassa noin 2500 vuotta sitten. Heidän järjestelmäänsä kutsuttiin Brahmiksi ja tämä järjestelmä on täsmälleen sama kuin se, jota me käytämme. Brahmissa käytettiin symboleita ilmaisemaan numeroita 1-9 ja siihen kuului myös oma systeeminsä ilmaisemaan luvun nollatila. Murtoluvut jopa kirjoitettiin samalla tavalla kuin me tänään ja murtoluvuissa oli sekä nimittäjä että osoittaja. Intialaiset eivät kuitenkaan merkinneet jakoviivaa, kuten me teemme. Arabialaiset omaksuivat intialaisen murtolukujärjestelmän kaupankäynnin kautta ja lisäsivät murtolukuihin jakoviivan.

Brahmi	↓		—	=	≡	+	ℓ	ℓ	ℓ	ℓ	ℓ
Hindu	↓	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Arabic	↓	•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Medieval	↓	o	I	2	3	Q	6	1	8	9	
Modern		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

© G. Sarcone, www.archimedes-lab.org

1.2 Teoria

1.2.1 Jaollisuussäännöt

Tulemme kohta aloittamaan murtolukujen supistamisen. Jotta tämä sujuisi nopeammin, on meidän tiedettävä, onko jokin luku jaollinen tietyillä toisilla luvuilla. Tarkistaaksemme, onko jokin luku jaollinen toisella luvulla, kuten esimerkiksi onko 158 jaollinen luvulla 14, suoritamme jakolaskun $\frac{158}{14}$. Jos osamäärä on kokonaisluku, on 158 jaollinen luvulla 14, mutta jos tuloksena on desimaaliluku, ei se ole jaollinen luvulla 14.

Esim. Onko luku 93 jaollinen luvulla 7?

Muodostamme jakolaskun ja ratkaisemme sen $\frac{93}{7} = 13,2\dots$. Koska saamme osamääräksi desimaaliluvun, voimme todeta, ettei luku 93 ole jaollinen luvulla 7.

Jos haluamme tarkistaa, onko luku jaollinen jollakin seuraavista luvuista, 2, 3, 5 tai 10, saattaa olla tarpeetonta suorittaa joka kerta erillinen jakolasku. Voimme sen sijaan hyödyntää yksinkertaisia *jaollisuussääntöjä*.

- Jos luku päättyy numeroon 0, 2, 4, 6 tai 8, on luku jaollinen luvulla 2.
- Jos luvun *numerotsumma* on jaollinen luvulla 3, on myös itse luku jaollinen luvulla 3.
- Jos luku päättyy numeroon 0 tai 5, on luku jaollinen luvulla 5.
- Jos luku päättyy numeroon 0, on luku jaollinen luvulla 10.

Esim. Luku 30 on jaollinen luvulla

- 2, koska 30 päättyy numeroon 0 (tai koska 30 on tasaluku).
- 3, koska $3 + 0 = 3$ ja 3 on jaollinen luvulla 3.
- 5, koska 30 päättyy numeroon 0.
- 10, koska 30 päättyy numeroon 0.

Voimme myös todeta, että luku 30 on jaollinen vielä yhdellä luvulla. Mikä on se luku?

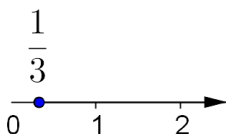
1.2.2 Rationaaliset luvut

Nyt tutustumme uuteen joukkoon, *rationaalsiin lukuihin*, jonka kanssa tulemme työskentelemään. Rationaalisten lukujen joukko merkitään \mathbb{Q} ja se koostuu kaikista niistä luvuista, jotka voidaan kirjoittaa osamääränä.

Esim. $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$

Aiemmin murtolukuja pidettiin vain tapana verrata kahta eri luonnollista lukua toisiinsa.

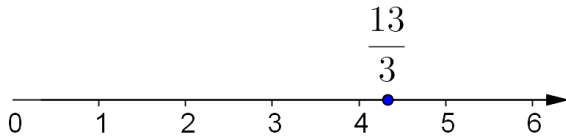
Murtoluku $\frac{1}{3}$ tarkoitti ainoastaan, että "luku 1 on kolme kertaa pienempi kuin luku 3". Nykyään tiedämme kuitenkin, että $\frac{1}{3}$ on täysin tavallinen luku, jolla on oma paikkansa lukusuoralla.



Jos olet epävarma, mihin jokin murtoluku kuuluu lukusuoralla, voit suorittaa jakolaskun.

Esim. Merkitse luku $\frac{13}{3}$ lukusuoralle.

Suoritamme jakolaskun ja saamme vastaukseksi, että $\frac{13}{3} = 4,3333\dots$. Tämän jälkeen on helppo merkitä luku lukusuoralle.



1.2.3 Sekaluvusta murtoluviiksi

Tässä kappaleessa opimme, kuinka muutetaan sekaluvut murtoluviiksi. Emme tule opettamaan murtolukujen muuttamista sekaluviiksi, sillä sekaluviilla laskeminen on hankalaa ja tästä syystä käytämme vain murtolukumuotoa, kun laskemme murtoluviilla.

Esim. Muunna $4\frac{1}{3}$ murtoluviiksi ("neljä kokonaista ja yksi kolmasosa").

Katsotaan kuvien kautta, millainen luku meillä oikeastaan on:



Jos laskemme väritetyt osat, huomaamme, että niitä on 13 kappaletta, eli: $4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$.

Saadaksemme tietää osoittajan arvon, kun muutamme sekalukua murtoluviiksi, laskemme "kokonaisluku \cdot nimittäjä + osoittaja". Tämä on täysin loogista, jos tutkimme yllä olevaa kuvaa. Nimittäjä on edelleen kolmasosina.

Esim. $5\frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{27}{5}$

Esim. $7\frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{47}{6}$

Esim. $3\frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{31}{9}$

1.2.4 Murtolukujen laventaminen ja supistaminen

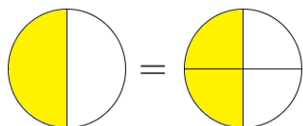
Laventaminen

Esim. Lavenna $\frac{1}{2}$ kahdella.

Kun lavennamme murtolukuja, niin oikeastaan kerromme murtoluvun luvulla 1. Luvun arvo ei muutu kun se kerrotaan yhdellä. Luku yksi kirjoitetaan muodossa $\frac{2}{2}$ kun lavennamme kahdella:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$$

Katsotaanpa myös kuvaa lavennuksesta:



Osoittajan ja nimittäjän *suhde* on edelleen sama.

Supistaminen

Matematiikassa laskujen vastaus on usein murtoluku. Tällöin on tärkeää, että murtolukua on supistettu niin paljon kuin mahdollista, jotta sitä olisi helpompi ymmärtää. Supistaminen on laventamisen käänteisoperaatio. Tutkitaanpa murtolukua $\frac{3}{9}$. Naemme, että sekä osoittaja että nimittäjä ovat jaollisia luvulla 3. Voimme siis kirjoittaa murtoluvun muodossa $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}$. Nyt, kun luku 3 on yhteisenä tekijänä osoittajassa ja nimittäjässä, voimme poistaa sen, sillä $\frac{3}{3} = 1$. Jäljelle jää $\frac{1}{3}$. Murtoluku $\frac{3}{9}$ oli itse asiassa $\frac{1}{3}$, joka oli lavennettu luvulla 3.

Esim. $\frac{5}{45} = \frac{1 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{9}$

Esim. $\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Välillä ei välttämättä heti löydy sitä suurinta yhteistä tekijää, jolla sekä osoittajan että nimittäjän voisi supistaa ja tällöin voi supistamisen tehdä useammassa vaiheessa.

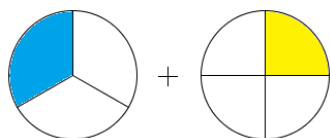
Esim. $\frac{36}{9} = \frac{12 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{12}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{4}{1} = 4$.

1.2.5 Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskut

Yhteinen nimittäjä

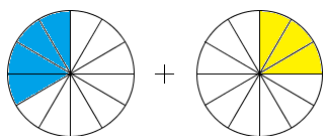
Kun murtolukuja lasketaan yhteen tai vähennetään toisistaan on nimittäjän oltava sama murtoluvuissa.

Esim. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Piirretään tilanteesta kuva:



Meidän on tehtävä murtoluvuista samannimisiä, jotta voisimme laskea ne yhteen. Lavennetaan $\frac{1}{3}$ luvulla 4 ja $\frac{1}{4}$ luvulla 3:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$



Lasketaan osoittajat yhteen:

$$\frac{7}{12}$$



Miten yhteinen nimittäjä löytyy

Jotta saisimme kahdesta murtoluvusta samannimisiä, voimme tehdä seuraavalla tavalla: lavennetaan ensimmäinen murtoluku toisen murtoluvun nimittäjällä ja toinen murtoluku lavennetaan ensimmäisen murtoluvun nimittäjällä.

Esim. $\frac{4}{5} - \frac{1}{6}$

Lavennetaan ensimmäinen murtoluku luvulla 6 ja toinen murtoluku luvulla 5:

$$\frac{24}{30} - \frac{5}{30}$$

Vähennetään osoittajat:

$$\frac{19}{30}$$

Vaikka voisimme aina laventaa toisen murtoluvun nimittäjällä, voi tämä olla monissa

tapauksissa varsin kömpelöä. Tutki seuraavaa: $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$. Voimme muodostaa yhteisen nimittäjän laventamalla ainoastaan murtoluvun $\frac{1}{4}$ luvulla 2

Esim.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{2}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Kappaleesta *lukuteoria* voit oppia, miten pienin yhteinen nimittäjä voidaan aina löytää.

1.2.6 Murtolukujen jako- ja kertolaskut

Kertolasku

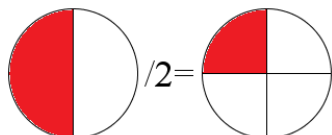
Murtolukujen kertolaskussa kerrotaan "osoittaja osoittajalla ja nimittäjä nimittäjällä".

$$\text{Esim. } \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{4}{21}$$

$$\text{Esim. } \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Jakolasku

Esim. $\frac{1}{2} / 2$. Piirretään tilanteesta kuva:



Voimme ajatella, että meillä on "puoli kertaa puolikas", eli

$$\frac{1}{2} / 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Kun murtolukuja jaetaan, niin käännämme laskutavan kertolaskuksi ja kerromme käännetyllä murtoluvulla (jälkimmäinen murtoluku käännetään ylösalaisin)

$$\text{Esim. } \frac{2}{3} / \frac{3}{4}$$

Vaihdamme laskutapaa ja käännämme sen murtoluvun, jolla haluamme jakaa:

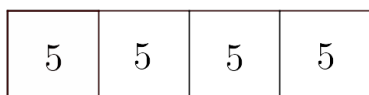
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

Kerromme osoittajan osoittajalla ja nimittäjän nimittäjällä:

$$\frac{8}{9}$$

$$\text{Esim. } \frac{2}{5} / 3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

Esim. Kuinka paljon on $\frac{1}{4}$ luvusta 20? Piirretään tilanteesta kuva:



"Meillä on luku 20 yksi neljäsosa kertaa", eli $20 \cdot \frac{1}{4} = 20/4 = 5$.

1.2.7 Murtolukumuoto ja desimaalimuoto

Kaikki desimaaliluvut voidaan kirjoittaa murtolukuina. Murtoluvut ovat useinmiten paljon käytännöllisempiä. Tarkastellaanpa esimerkiksi murtolukua $\frac{1}{3}$. Muuttaaksemme jonkin murtoluvun desimaaliluvuksi, tulee meidän suorittaa jakolasku. Osamääräksi tulee 0,3333333333... Kolmoset jatkuvat äärettömän pitkälle, joten luku $\frac{1}{3}$ on erittäin hankala

kirjoittaa desimaalilukuna.

Miten muunnamme desimaaliluvut murtoluvuiksi? Vastaus on; erittäin helposti, ja opimme tämän parhaiten esimerkin kautta:

Esim. Muunna $0,25$ murtoluvuksi.

Jos lausumme murtoluvun hiljaa itseksemme ääneen, ymmärrämme, mitä pitää tehdä. "Kaksikymmentäviisi sadasosa", eli $\frac{25}{100}$. Tiedämme myös, että voimme supistaa tämän murtoluvun luvulla 25 ja silloin desimaaliluku

$$0,25 = \frac{1}{4}.$$

Esim. Muunna $0,7$ murtoluvuksi.

$$0,7 = \frac{7}{10}.$$

Esim. Muunna $1,7$ murtoluvuksi.

$$1,7 = 1\frac{7}{10} = \frac{17}{10}$$

Esim. Muunna $0,45$ murtoluvuksi.

$$0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{9}{20}$$

1.3 Tehtävät

Jaollisuussäännöt

- Ovatko seuraavat luvut jaollisia luvulla 2?
 - 3
 - 8
 - 45
 - 146
 - 100029
 - 9846
- Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia luvulla 3?
 - 12
 - 25
 - 144
 - 783
 - 10023
 - 983
- Ovatko seuraavat luvut jaollisia luvulla 5?
 - 15
 - 40
 - 463
 - 10980
 - 4595
 - 5011
- Ovatko seuraavat luvut jaollisia luvulla 10?
 - 40
 - 615
 - 58940
 - 1004
 - 60000
 - 5401
- Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia luvulla 13?
 - 65

- 104
- 142
- 197
- 468
- 5104

- Luokan, jossa on 20 oppilasta, on tehtävä projekti ryhmissä. Jokaisessa ryhmässä pitää olla yhtä monta oppilasta. Kuinka monta vaihtoehtoa opettajalla on jakaa luokka ryhmiin?
- Määrittele joukko A , joka koostuu kaikista luonnollisista luvuista, jotka ovat pienempiä kuin 20 ja jaollisia luvulla 3.

Rationaaliset luvut

- Ilmoita, että murtoluku $\frac{11}{12}$ kuuluu rationaalsiin lukuihin.
- Pitääkö paikkansa, että $4 \in \mathbb{Q}$?
- Merkitse seuraavat murtoluvut lukusuoralle a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{7}{2}$ ja c) $\frac{5}{3}$

Sekaluvusta murtoluvuksi

- Muuta murtoluvuiksi.
 - $3\frac{2}{3}$
 - $6\frac{5}{7}$
 - $8\frac{1}{5}$
 - $5\frac{2}{5}$
 - $1\frac{7}{11}$
 - $10\frac{4}{5}$

Murtolukujen laventaminen ja supistaminen

- Lavenna seuraavat murtoluvut luvulla 4.
 - $\frac{2}{3}$
 - $\frac{5}{6}$
 - $2\frac{1}{3}$

13. Sievennä ja laske.

Vinkki: Lavenna luvulla 10, 100, tai 1000 päästäksesi eroon desimaaliluvuista.

a) $\frac{1,2}{0,4}$

b) $\frac{0,36}{0,06}$

c) $\frac{0,56}{0,07}$

d) $\frac{12}{0,1}$

e) $\frac{14,2}{0,02}$

f) $\frac{6,3}{0,03}$

14. Lavenna seuraavat murtoluvut luvulla 6.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{7}$

c) $\frac{11}{13}$

15. Supista seuraavia murtolukuja niin paljon kuin mahdollista.

a) $\frac{8}{24}$

b) $\frac{35}{42}$

c) $\frac{36}{63}$

d) $\frac{40}{50}$

e) $\frac{45}{95}$

f) $\frac{102}{123}$

16. Lisää <, > tai = mihin se sopii.

a) $\frac{2}{3} \square \frac{1}{2}$

b) $3\frac{1}{6} \square \frac{19}{6}$

c) $\frac{12}{18} \square \frac{4}{6}$

d) $\frac{3}{4} \square \frac{14}{19}$

e) $\frac{7}{9} \square \frac{9}{7}$

vähennyslaskut**17.** Selitä, mikä virhe seuraavassa laskussa on tehty:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

18. Laske.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{15} + \frac{2}{10}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$

e) $3\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

f) $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$

g) $\frac{4}{5} - \frac{1}{10}$

h) $\frac{3}{7} - \frac{2}{8}$

i) $3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$

19. Laske.

a) $\frac{4}{5} - \frac{1}{10} + 3$

b) $2\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + 2$

c) $\frac{9}{2} - 1\frac{1}{4} + \frac{5}{8}$

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$

e) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3}$

f) $3\frac{2}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

20. Laske.

a) $\frac{1}{2}$ pizzaa + $\frac{1}{4}$ pizzaa

b) $\frac{2}{3}$ pizzaa + $\frac{1}{5}$ pizzaa

c) $\frac{2}{3}p + \frac{1}{4}p - \frac{1}{6}p$

21. Selvitä A , B , C ja D , kun tiedät, että

- $A + A + A = B$
- $A + B = \frac{4}{9}$
- $A + C = D$
- $A + B + C = 1$

22. Eräessä elokuvakokoelmassa on $\frac{1}{5}$ toimintaelokuvia, $\frac{1}{10}$ draamaelokuvia ja $\frac{1}{4}$ komedioita. Kuinka suuren osan kaikista elokuvista muodostavat

muut elokuvat?

Murtolukujen jako- ja kertolaskut**23.** Suorita kertolasku

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}$

c) $1\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{9} \cdot 3$

e) $4 \cdot \frac{1}{5}$

f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

24. Mikä virhe seuraavassa laskussa on tehty?

$$\frac{2}{3} / \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

25. Suorita jakolasku.

a) $\frac{2}{5} / \frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{7} / \frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{6} / 4$

d) $7 / \frac{2}{3}$

e) $2\frac{1}{4} / \frac{3}{4}$

f) $6 / 2\frac{1}{2}$

26. Laske.

a) $4 \cdot \frac{3}{4}$

b) $6 \cdot \frac{1}{2}$

c) $5 \cdot \frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{4} / 3$

e) $1\frac{2}{3} / 2$

f) $\frac{1}{3} / 3$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$

h) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11}$

i) $2\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$

j) $\frac{4}{5} / \frac{1}{2}$

k) $\frac{7}{8} / \frac{2}{3}$

l) $\frac{7}{9} / 1\frac{1}{5}$

27. Sievennä ja laske.

a) $5(\frac{2}{3} + \frac{1}{2})$

b) $7(2\frac{1}{4} - \frac{1}{2})$

c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

d) $2\frac{5}{7} - \frac{1}{3} \cdot 4$

e) $7 / (\frac{7}{8} - \frac{1}{2})$

f) $\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot 2$

28. Muunna jakolasku kertolaskuksi.

a) $\frac{30}{7}$

b) $14/3$

c) $4 : 3$

29. Muodosta lauseke ja laske. Kuinka paljon on

a) $\frac{1}{2}$ luvusta 14

b) $\frac{1}{3}$ luvusta 12

c) $\frac{1}{5}$ luvusta 20

d) $\frac{2}{3}$ luvusta 6

e) $\frac{2}{3}$ luvusta 8

f) $\frac{2}{3}$ luvusta $\frac{1}{2}$

30. Joonas ja Maria jakoivat jäätelöpaketin niin, että Joonas sai tuplasti niin paljon jäätelöä kuin Maria. Kuinka suuren osan jäätelöpaketista Joonas söi?**31.** Lassi söi 200 gramman suklaalevystä 3 kertaa enemmän kuin Anna. Kuinka monta grammaa Lassi söi ja kuinka monta grammaa Anna söi?**32.** Pienessä kylässä, jossa on 140 taloa, on kotieläimiä $\frac{3}{4}$ kaikista taloista. Näistä taloista $\frac{1}{5}$ on kissa. Kuinka monessa talossa on kissa?**33.** Mikä luku x on?

a) $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{3} = \frac{x}{6}$

d) $\frac{4}{x} = \frac{2}{6}$

e) $\frac{8}{x} = 2$

f) $\frac{2 \cdot x}{4} = \frac{1}{2}$

34. Kuinka monta kertaa suurempi luku 5 on kuin luku 2?**35.** Kuinka monta kertaa pidemmän matkan henkilö, joka on pyöräillyt 72 km, on pyöräillyt verrattuna henkilöön, joka on pyöräillyt 8 km?**36.** Kuinka suuri luku 5 on verrattuna lukuun 25?**37.** Kuinka suuri osa 6 euroa on 21 eurosta?**Murtolukumuoto ja desimaalimuoto****38.** Muunna seuraavat murtoluvut desimaaliluvuiksi.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{5}$

f) $\frac{1}{3}$

39. Muunna seuraavat desimaaliluvut murtoluvuiksi.

a) 0,45

b) 0,13

c) 5,1

d) 3,09

e) 0,3

f) 0,5

40. Muunna desimaaliluvut murtoluvuiksi ennenkuin suoritat kertolaskun. Anna tämän jälkeen vastaus desimaalilukuna.

a) $0,1 \cdot 1$

b) $0,1 \cdot 0,1$

c) $0,01 \cdot 0,01$

d) $0,2 \cdot 0,6$

e) $0,06 \cdot 0,02$

f) $0,12 \cdot 0,5$

41. Laske päässälaskuna.

a) $0,01 \cdot 8$

b) $0,01 \cdot 9$

c) $0,1 \cdot 0,1$

d) $0,01 \cdot 0,1$

e) $0,001 \cdot 0,001$

f) $0,5 \cdot 0,1$

42. Laske päässälaskuna.

a) $15,1 \cdot 10$

b) $56,215 \cdot 100$

c) $1000 \cdot 65,12$

d) $31 \cdot 0,2$

e) $6 \cdot 0,5$

f) $0,2 \cdot 0,2$

g) $146/10$

h) $59/100$

i) $51004/100$

1.4 Sekalaisia tehtäviä

1. Merkitse seuraavat murtoluvut lukusuoralle: $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$ ja $\frac{7}{3}$
2. Lavenna murtoluvut luvulla 3.
 - a) $\frac{1}{8}$
 - b) $3\frac{4}{5}$
3. Sievennä ja laske.
 - a) $\frac{0,55}{0,05}$
 - b) $\frac{1021}{0,01}$
 - c) $\frac{1,9}{0,02}$
4. Supista murtolukuja niin paljon kuin mahdollista.
 - a) $\frac{32}{4}$
 - b) $\frac{50}{20}$
 - c) $\frac{63}{33}$
 - d) $\frac{15}{55}$
5. Merkitse murtoluvut lukusuoralle: a) $\frac{7}{2}$, b) $\frac{13}{3}$ ja c) $\frac{21}{4}$
6. Laske.
 - a) $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$
 - b) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$
 - c) $\frac{5}{2} + \frac{8}{3}$
 - d) $\frac{6}{5} - \frac{3}{10}$
 - e) $\frac{5}{7} - \frac{1}{3}$
 - f) $\frac{6}{11} - \frac{2}{13}$
 - g) $2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
 - h) $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7}$
 - i) $\frac{4}{9} / 5$
 - j) $4 / \frac{1}{11}$
7. Sievennä ja laske.
 - a) $\frac{2}{3}$ piirakkaa $- \frac{2}{5}$ piirakkaa
 - b) 1 piirakka $- \frac{1}{3}$ piirakkaa $- \frac{1}{6}$ piirakkaa
 - c) $2p - \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}p$
8. Sievennä ja laske.
 - a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$
 - b) $\frac{1}{2} / \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5}$
 - c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
9. Sievennä ja laske.
 - a) $3\frac{1}{3} - \frac{2(5-2)}{5}$
 - b) $2\frac{1}{3} + 6 - \frac{3(6-2)}{2}$
10. Eräässä teatteriesityksessä on kolme kertaa enemmän naispuolisia näyttelijöitä kuin miespuolisia. Kuinka suuri osuus näyttelijöistä on naisia?
11. Sievennä ja laske.
 - a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} / \frac{2}{3}$
 - b) $3 - \frac{2}{5} / \frac{1}{3}$
12. Kuinka paljon on $\frac{6}{7}$ luvusta 5?
13. Koulun pihalla on 60 ihmistä. $\frac{1}{4}$ on vanhempia, $\frac{1}{6}$ on opettajia ja loput ovat oppilaita. Kuinka monta oppilasta on koulun pihalla?
14. Junassa on 270 paikkaa. Näistä $\frac{2}{15}$ on nukkumapaikkoja. $\frac{2}{3}$ nukkumapaikoista on varattuja. Kuinka monta vapaata nukkumapaikkaa on jäljellä?
15. Sievennä ja laske.
 - a) $\frac{1}{3}(\frac{4}{3} - \frac{1}{3})$
 - b) $7(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$
 - c) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$
 - d) $4\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \cdot 4$
16. Juoksijalla on $\frac{4}{9}$ matkasta jäljellä juostavana. Hän on juossut jo 15 km. Kuinka paljon matkaa on jäljellä maaliin?

17. Laske.
- a) $3 + \frac{4}{5} / \frac{10}{3}$
- b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} / \frac{3}{16}$
- c) $(1 - \frac{2}{7}) / \frac{1}{3}$
- d) $\frac{6-2}{3} - \frac{2}{5} / \frac{1}{2}$
18. Kuinka monta kertaa enemmän rahaa on henkilöllä, jolla on 1050 euroa, verrattuna henkilöön, jolla on 450 euroa?
19. Kuinka pitkä on 1,5 cm pituinen muurahainen verrattuna 3 cm pituiseen kovakuoriaiseen?
20. Muunna seuraavat desimaaliluvut murtoluvuiksi.
- a) 0,95
- b) 0,67
- c) 19,2
- d) 0,001
21. Suorita kertolasku päässä laskuna.
- a) $0,5 \cdot 0,2$
- b) $0,7 \cdot 0,4$
- c) $0,008 \cdot 0,3$
- d) $0,06 \cdot 0,05$
- e) $0,07 \cdot 0,07$
- f) $0,4 \cdot 0,005$
22. Laske murtolukujen $\frac{6}{5}$ ja $\frac{4}{6}$ erotus.
23. Maria on saanut särkylääkemääräyksen lääkäriltään. Hänen tulee ottaa $1\frac{1}{2}$ tablettia päivittäin. Kuinka kauan riittää paketti, jossa on 20 tablettia?
24. Laske.
- $$\frac{3}{4} / \frac{4-2}{8} - \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2}$$
25. Moottoripyörän tankissa on $\frac{2}{7}$ bensiiniä jäljellä ja sillä määrällä moottoripyörällä voi ajaa 91 km. Kuinka pitkän matkan moottoripyörällä voi ajaa täydellä tankilla?
26. Laske:
- $$\frac{7-4}{5} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + 3(\frac{1}{3} - \frac{1}{9})$$
27. Yksi kolmasosa juhlien vieraista oli naisia ja yksi neljäsosa oli tyttöjä. Yksi kuudesosa oli miehiä ja vieraista kuusi oli poikia. Kuinka monta vierasta juhlissa oli?

2 Vastaus

2.1 Murto- ja desimaaliluvut / Vastaus: Tehtävät

1. a) Ei
b) Kyllä
c) Ei
d) Kyllä
e) Ei
f) Kyllä
2. a) Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
c) Katso ratkaisu.
d) Katso ratkaisu.
e) Katso ratkaisu.
f) Katso ratkaisu.
3. a) Kyllä
b) Kyllä
c) Ei
d) Kyllä
e) Kyllä
f) Ei
4. a) Kyllä
b) Ei
c) Kyllä
d) Ei
e) Kyllä
f) Ei
5. a) Katso ratkaisu.
b) Katso ratkaisu.
c) Katso ratkaisu.
d) Katso ratkaisu.
e) Katso ratkaisu.
f) Katso ratkaisu.
6. 4 vaihtoehtoa
7. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
8. $\frac{11}{12} \in \mathbb{Q}$
9. Pitää paikkansa
10. Katso ratkaisu.
11. a) $\frac{11}{3}$
b) $\frac{47}{7}$
c) $\frac{41}{5}$
d) $\frac{27}{5}$
e) $\frac{18}{11}$
f) $\frac{54}{5}$
12. a) $\frac{8}{12}$
b) $\frac{20}{24}$
c) $2\frac{4}{12} = \frac{28}{12}$
13. a) 3
b) 6
c) 8
d) 120
e) 710
f) 210
14. a) $\frac{6}{30}$
b) $\frac{24}{42}$
c) $\frac{66}{78}$
15. a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{9}{19}$
f) $\frac{34}{41}$
16. a) $>$
b) $=$
c) $=$
d) $>$
e) $<$

17. Murtoluvut on muutettava saman nimisiksi ennenkuin ne voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.
18. a) $\frac{5}{4}$
b) $\frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{15}$
d) $\frac{9}{8}$
e) $\frac{17}{4}$
f) $\frac{5}{3}$
g) $\frac{7}{10}$
h) $\frac{5}{28}$
i) $\frac{9}{4}$
19. a) $\frac{37}{10}$
b) $\frac{35}{9}$
c) $\frac{31}{8}$
d) $\frac{11}{18}$
e) $\frac{31}{60}$
f) $\frac{103}{42}$
20. a) $\frac{3}{4}$ pizzaa
b) $\frac{13}{15}$ pizzaa
c) $\frac{3}{4}p$
21. $A = \frac{1}{9}$
 $B = \frac{3}{9}$
 $C = \frac{5}{9}$
 $D = \frac{2}{3}$
22. $\frac{9}{20}$
23. a) $\frac{3}{8}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{6}{7}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{4}{5}$
f) $\frac{1}{9}$
24. Jakava murtoluku käännetään ympäri, kun jakolasku muutetaan kertolaskuksi.
25. a) 2
b) $\frac{12}{7}$
c) $\frac{5}{24}$
d) $\frac{21}{2}$
e) 3
f) $\frac{12}{5}$
26. a) 3
b) 3
c) $\frac{10}{7}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{5}{6}$
f) $\frac{1}{9}$
g) $\frac{2}{15}$
h) $\frac{12}{77}$
i) $\frac{44}{25}$
j) $\frac{8}{5}$
k) $\frac{21}{16}$
l) $\frac{35}{54}$
27. a) $\frac{35}{6}$
b) $\frac{49}{4}$
c) $\frac{8}{9}$
d) $\frac{29}{21}$
e) $\frac{56}{3}$
f) $\frac{11}{7}$
28. a) $30 \cdot \frac{1}{7}$
b) $14 \cdot \frac{1}{3}$
c) $4 \cdot \frac{1}{3}$
29. a) 7
b) 4
c) 4
d) 4

- e) $\frac{16}{3}$
- f) $\frac{1}{3}$
30. $\frac{2}{3}$
31. Lassi söi 150 grammaa, kun taas Anna söi 50 grammaa.
32. 21
33. a) $x = 3$
b) $x = 2$
c) $x = 10$
d) $x = 12$
e) $x = 4$
f) $x = 1$
34. $2,5$ kertaa suurempi
35. 9 kertaa pidemmän matkan.
36. Luku 5 on yksi viidesosa luvusta 25
37. Kaksi seitsemäsosaa.
38. a) 0,2
b) 0,25
c) 0,05
d) 0,75
e) 0,8
f) 0,333...
39. a) $\frac{9}{20}$
b) $\frac{13}{100}$
c) $\frac{51}{10}$
d) $\frac{309}{100}$
e) $\frac{3}{10}$
f) $\frac{1}{2}$
40. a) 0,1
b) 0,01
c) 0,0001
d) 0,12
e) 0,0012
f) 0,06
41. a) 0,08
- b) 0,09
- c) 0,01
- d) 0,001
- e) 0,000001
- f) 0,05
42. a) 151
b) 5621,5
c) 65120
d) 6,2
e) 3
f) 0,04
g) 14,6
h) 0,59
i) 510,04

2.2 Murto- ja desimaaliluvut / Vastaus: Sekalaisia tehtäviä

1. Katso ratkaisu.
2. a) $\frac{3}{24}$
b) $\frac{57}{15}$
3. a) 11
b) 102100
c) 95
4. a) 8
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{21}{11}$
d) $\frac{3}{11}$
5. Katso ratkaisu.
6. a) 2
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{31}{6}$
d) $\frac{9}{10}$
e) $\frac{8}{21}$
f) $\frac{56}{143}$
g) $\frac{9}{8}$
h) $\frac{3}{8}$
i) $\frac{4}{45}$
j) 44
7. a) $\frac{4}{15}$ piirakkaa
b) $\frac{1}{2}$ piirakkaa
c) $\frac{17}{12}p$
8. a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{7}{5}$
c) $\frac{1}{8}$
9. a) $\frac{32}{15}$
b) $\frac{7}{3}$
10. $\frac{3}{4}$
11. a) $\frac{35}{36}$
- b) $\frac{9}{5}$
12. $\frac{30}{7}$
13. 35
14. 12
15. a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{7}{4}$
c) 0
d) $\frac{214}{63}$
16. 12 km
17. a) $\frac{81}{25}$
b) 2
c) $\frac{15}{7}$
d) $\frac{8}{15}$
18. Seitsemän kolmasosaa enemmän, tai noin 2,3 kertaa enemmän.
19. Muurahaisen pituus on puolet kovakuoriaisen pituudesta.
20. a) $\frac{19}{20}$
b) $\frac{67}{100}$
c) $\frac{96}{5}$
d) $\frac{1}{1000}$
21. a) 0, 10
b) 0, 28
c) 0, 0024
d) 0, 0030
e) 0, 0049
f) 0, 0020
22. $\frac{8}{15}$
23. 13
24. $\frac{11}{4}$
25. 318,5 km
26. $\frac{34}{15}$

27. 24