Vektorit ja CAS

Vektori $\bar{a} = 4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 6\bar{k}$ esitetään laskimessa muodossa a:= [4,-2,6]. Pisteen (2,-3,5) paikkavektori (eli origosta alkava annettuun pisteeseen päättyvä vektori) on siis laskimen esitysmuodossa [2,-3,5].

Tehtäväsarja 1

© Määritä vektori AB

© Paikkavektoreiden erotuksena saamme

$\begin{bmatrix}1 & -3 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}-2 & -5 & 10\end{bmatrix}$

© Määritä vektori BA

$\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & -3 & 6\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}2 & 5 & -10\end{bmatrix}$

© Määritä janan AB keskipiste

© Keskipisteen paikkavektori on päätepisteiden paikkavektoreiden keskiarvo

$\dfrac{\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -3 & 6\end{bmatrix}}{2}$ $\quad \begin{bmatrix}2 & \frac{-1}{2} & 1\end{bmatrix}$

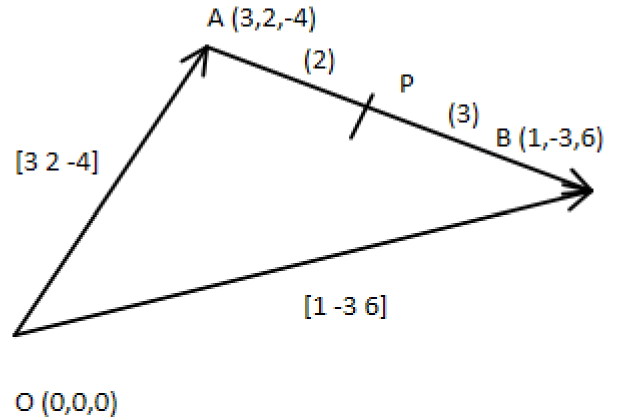
© Vastaus : Keskipiste on $\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)$

© Piste P jakaa janan AB suhteessa 2:3. Määritä piste P.

© Pisteen P paikkavektori saadaan jakosuhdevektorin kaavalla (MAOL–taulukko)

$\dfrac{2\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & 6\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix}}{2+3}$ $\quad \begin{bmatrix}\frac{11}{5} & 0 & 0\end{bmatrix}$

© Vastaus: P=(11/5,0,0)



Tehtäväsarja 2

Olkoon $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

$a:=[3\ \ -2\ \ -4]$	$[3\ \ -2\ \ -4]$
$b:=[1\ \ 2\ \ 2]$	$[1\ \ 2\ \ 2]$
© Laske vektoreiden a ja b pituudet.	
$\text{norm}(a)$	$\sqrt{29}$
$\text{norm}(b)$	3
© Laske vektoreiden a ja b pistetulo a· b.	
$\text{dotP}(a,b)$	-9
© Laske vektoreiden a ja b välinen kulma	
$\cos^{-1}\left(\dfrac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\cdot \text{norm}(b)}\right)$	123.854514813
© Laske vektorin a vektoriprojektio vektorilla b. (Kaava on MAOL–taulukossa)	
$\dfrac{\text{dotP}(a,b)}{\text{dotP}(b,b)}\cdot b$	$[-1\ \ -2\ \ -2]$

Tehtäväsarja 3

© Määritä kuvassa olevan tunnetun vektorin c loppupiste B, kun alkupiste A=$(2,1,-3)$.

© Vektorin esitys i,jk−muodossa on tunnettu ja muunnamme sen laskinmuotoon

$c:=[3\ \ 2\ \ 4]$ $\qquad [3\ \ 2\ \ 4]$

© Pisteen A paikkavektori on

$a:=[2\ \ 1\ \ -3]$ $\qquad [2\ \ 1\ \ -3]$

© Pisteen B paikkavektori on kuvan perusteella

$b:=a+c$ $\qquad [5\ \ 3\ \ 1]$

© Vastaus: Piste B on $(5,3,1)$

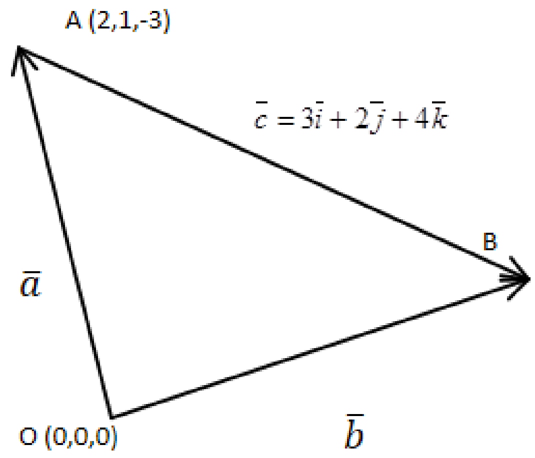
© Tapa 2 ratkaista sama tehtävä: Olkoon pisteen B paikkavektori $[x\ y\ z]$

$b:=[x\ \ y\ \ z]$ $\qquad [x\ \ y\ \ z]$

© Muodostetaan vektoreiden välinen yhtälö ja ratkaistaan siitä muuttujat x,y,z :

solve$(b-a=c,\{x,y,z\})$ $\qquad x=5$ and $y=3$ and $z=1$

© Vastaus: Piste B on $(5,3,1)$



Tehtävä 4 (S2013 5)

Pisteestä $A(1,-1,0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\overline{i}-4\overline{k}$ suuntaan pisteeseen C. Määritä pisteen C koordinaatit.

© Vektorin a suuntainen yksikkövektori saadaan komennolla unitv(a)

© Muodostetaan pisteen c paikkavektori

$[1\ \ {-1}\ \ 0]+9\cdot \text{unitV}([1\ \ {-2}\ \ 2])+10\cdot \text{unitV}([3\ \ 0\ \ {-4}])$ $\quad [10\ \ {-7}\ \ {-2}]$

© Piste C = $(10, -7, -2)$

Tehtävä 5 Olkoon $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{b} = 5\overline{i} - 10\overline{j} + (t+1)\overline{k}$. Millä t:n arvolla vektorit ovat yhdensuuntaiset?

$a:=[1 \quad {}^{-}2 \quad 4]$ $\qquad [1 \quad {}^{-}2 \quad 4]$

$b:=[5 \quad {}^{-}10 \quad t+1]$ $\qquad [5 \quad {}^{-}10 \quad t+1]$

© a ja b ovat yhdensuuntaiset, jos ne toteuttavat vektoriyhtälön a=rb, missä r on reaaliluku

solve$(a=r\cdot b,\{r,t\})$ $\qquad r=\dfrac{1}{5}$ and $t=19$

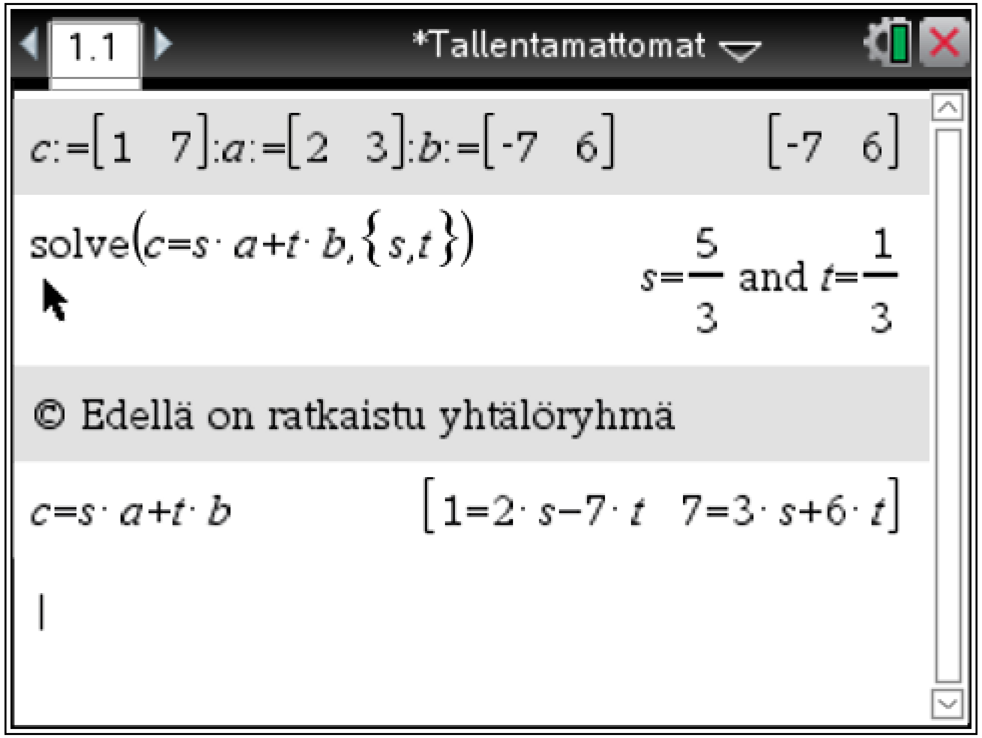
© Lisähuomautus: Vektoriyhtälön ratkaiseminen tarkoittaa seuraavanlaisen yhtälöryhmän ratkaisemista

$a=r\cdot b$ $\qquad [1=5\cdot r \quad {}^{-}2={}^{-}10\cdot r \quad 4=r\cdot(t+1)]$

Vastaus: t=19

Tehtävä 6 (S 2006 4)

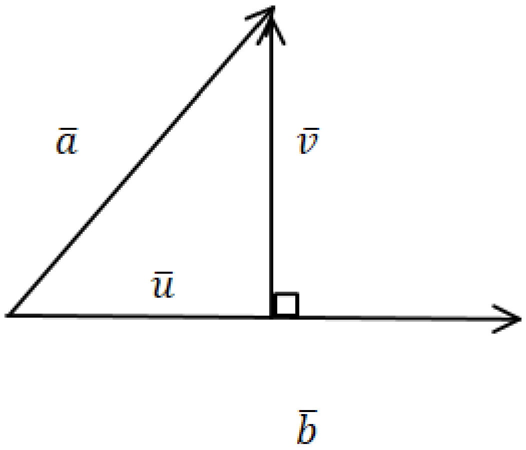
Jaa vektori $\bar{i}+7\bar{j}$ vektoreiden $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$ ja $\bar{b}=-7\bar{i}+6\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

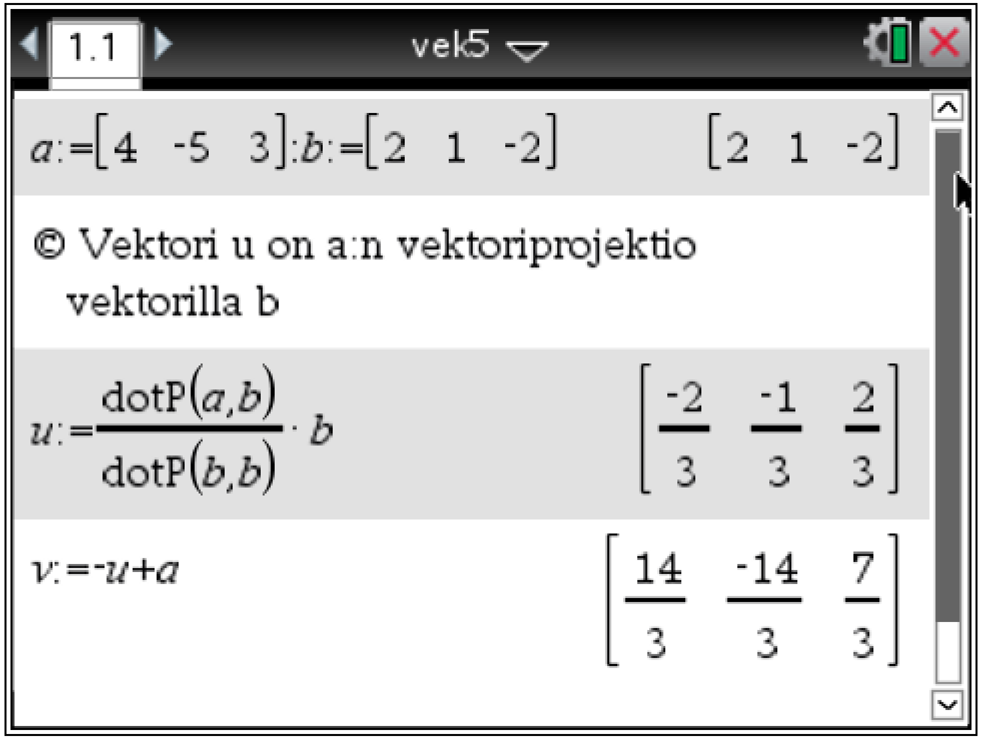


Vastaus: $\bar{\imath}+7\bar{\jmath}=\frac{5}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}$

Tehtävä 7 (K11 8)

Olkoon $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. Esitä vektori $\overline{a}$ summana vektoreista $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista $\overline{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja $\overline{v}$ kohtisuorassa vektoria $\overline{b}$ vastaan.





Tehtävä 8 (K 2006 6)

Tutki, ovatko pisteet P=(4,1,-2) ja Q=(0,2,4) pisteiden A=(1,1,1) ja B=(-1,1,3) määräämällä suoralla.

© MAOL:n taulukon suoran vektoriyhtälö > suoran AB pisteen paikkavektori on

$a:=[1\ \ 1\ \ 1]+t\cdot([-1\ \ 1\ \ 3]-[1\ \ 1\ \ 1])$ $\quad [1-2\cdot t\ \ 1\ \ 2\cdot t+1]$

© Tutkitaan onko piste P=(4,1,−2) suoralla AB

$\text{solve}(a=[4\ \ 1\ \ -2],t)$ $\quad t=\frac{-3}{2}$

© Piste P on suoralla AB

© Tutkitaan onko piste Q=(0,2,4) suoralla AB

$\text{solve}(a=[0\ \ 2\ \ 4],t)$ $\quad$ false

© Piste Q ei ole suoralla AB

Tehtävä 9 (K 2013 7)

Pisteiden A(2,0,1) ja B(3,1,3) yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin.

© Pisteiden A(2,0,1) ja B(3,1,3) yhdysjanan keskipisteen paikkavektori

$kp := \dfrac{\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\end{bmatrix}}{2}$ $\qquad \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}$

© Tason normaalivektori

$n := \begin{bmatrix}3 & 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

© Sovelletaan MAOL:n taulukosta tason vektoriyhtälöä joka tuottaa tason normaalimuotoisen yhtälön

$\mathrm{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}-kp\right)=0$ $\qquad x+y+2\cdot z-7=0$

© y−akselin leikkauspisteessä x=z=0

$\mathrm{solve}(0+y+2\cdot 0-7=0,y)$ $\qquad y=7$

© Leikkauspiste on (0,7,0)

Tehtävä 10

Onko piste (-1,-3,6) pisteiden (1,3,2), (-2,1,5) ja (2,-1,3) määräämässä tasossa?

© Tason yhtälö vektorimuodossa

$$p:=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}+r\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\right)+s\cdot\left(\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-3\cdot r+s+1 & -2\cdot r-4\cdot s+3 & 3\cdot r+s+2\end{bmatrix}$$

$\text{solve}\left(p=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 6\end{bmatrix},\{r,s\}\right)$ $\qquad r=1 \text{ and } s=1$

© Piste $(-1,-3,6)$ *on kyseisen kolmen pisteen määräämässä tasossa*.