Laskinohje MAA2−kurssin opiskelijoille ja opettajille

Lue ja kokeile itse läpi ensi MAY1− kurssin ohje.

1. Lausekkeen käsittely

Sulkujen poistaminen

Binomin neliö

$\text{expand}\left((x-6)^2\right) \blacktriangleright x^2-12\cdot x+36$

Binomin kuutio

$\text{expand}\left((x+1)^3\right) \blacktriangleright x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1$

Tekijöihin jako muistikaavalla

$\text{factor}\left(x^2+4\cdot x+4\right) \blacktriangleright (x+2)^2$

Tekijöihin jako muistikaavalla

$\text{factor}\left(x^2-100\right) \blacktriangleright (x-10)\cdot (x+10)$

Tekijöihin jako nollakohtien avulla

$\text{factor}\left(5\cdot x^2-10\cdot x-15\right) \blacktriangleright 5\cdot (x-3)\cdot (x+1)$

Neliöksi täydentäminen (https://fi.wikipedia.org/wiki/Neliöksi_täydentäminen)

$\text{completeSquare}\left(x^2+4\cdot x+15,x\right) \blacktriangleright (x+2)^2+11$

$\text{completeSquare}\left(x^2+4\cdot x+10,x\right) \blacktriangleright (x+2)^2+6$

$\text{completeSquare}\left(x^2+4\cdot x+4,x\right) \blacktriangleright (x+2)^2$

2. Murtolausekkeen supistaminen

Supista $\dfrac{x^2-1}{3x-3}$.

$\text{factor}\left(x^2-1\right) \blacktriangleright (x-1)\cdot (x+1)$

$\text{factor}(3\cdot x-3) \blacktriangleright 3\cdot (x-1)$

$\frac{x^2-1}{3x-3}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{3\cdot(x-1)}=\frac{x+1}{3}$ ⚠ (tuossa ensimmäisessä kirjoitetusta lausekkeesta pitää tulla ulos oikealla nuolinäppäimellä, jotta laskin ei laske laskua, vaan kirjoittaa pelkän lausekkeen)

Saadaan laskimella suoraan, mutta **ei tuota kokeessa täysiä pisteitä!**

$\text{expand}\left(\frac{x^2-1}{3\cdot x-3}\right) ▸ \frac{x}{3}+\frac{1}{3}$ ⚠

$\text{factor}\left(\frac{x^2-1}{3\cdot x-3}\right) ▸ \frac{x+1}{3}$ ⚠

Määritä vakio r siten, että lauseke $\frac{x^2+r\cdot x-45}{4x+12}$ voidaan supistaa. Määritä supistettu muoto. Millä x:n arvoilla lauseke on määritelty?

Osoittaja

$\mathbf{o}(x):=x^2+r\cdot x-45$ ▸ *Valmis* (muista r:n ja x:n väliin kertomerkki)

Nimittäjä

$\mathbf{m}(x):=4\cdot x+12$ ▸ *Valmis*

$\text{factor}(\mathbf{m}(x))$ ▸ $4\cdot(x+3)$ eli voidaan supistaa vain , jos x+3 on myös osoittajan tekijä

Nimittäjän nollakohdan

$\text{solve}(\mathbf{m}(x)=0,x)$ ▸ $x=-3$

tulee olla myös osoittajan nollakohta

$\mathbf{o}(-3)=0$ ▸ $-3\cdot r-36=0$

josta ratkaisemalla

$\text{solve}(-3\cdot r-36=0,r)$ ▸ $r=-12$

Jaetaan tällä r:n arvolla osoittaja tekijöihin, voimme kertoa käytettävän b:n arvon pystyviivan jälkeen

$\mathbf{o}(x)|r=-12$ ▸ $x^2-12\cdot x-45$

eli $\text{factor}(x^2-12\cdot x-45)$ ▸ $(x-15)\cdot(x+3)$

tai suoraan

$\text{factor}\left(\mathbf{o}(x)|r=-12\right) ▸ (x-15)\cdot(x+3)$

Supistetaan murtolauseke

$\frac{(x-15)\cdot(x+3)}{4\cdot(x+3)}=\frac{x-15}{4}$ ⚠

Murtolauseke on määritelty, kun

$\text{solve}\left(\mathbf{m}(x)\neq 0,x\right) ▸ x\neq -3$

3. Yhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen

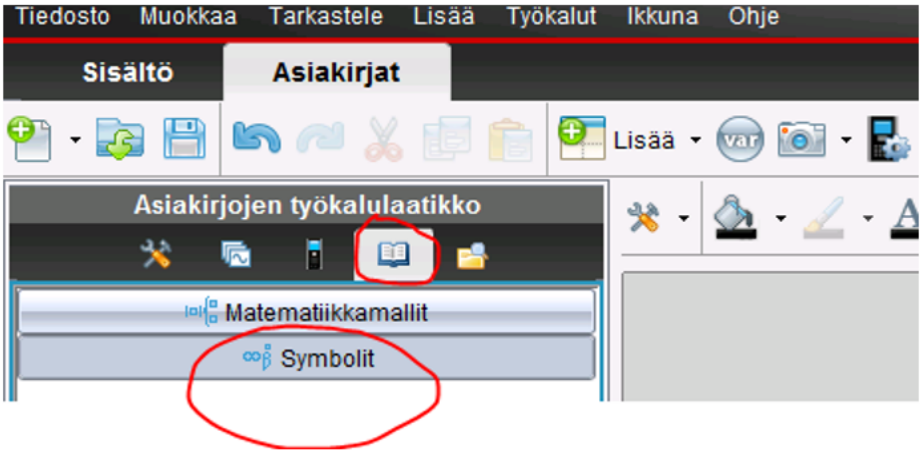
Toisen asteen yhtälö, joka käsin ratkaistaan ratkaisukaavalla

$\text{solve}\left(x^2-6\cdot x+5=0,x\right) ▸ x=1 \text{ or } x=5$

Kolmannen asteen yhtälö, joka käsin ratkaistaan ottamalla yhteinen tekijä

$\text{solve}\left(x^3=2\cdot x,x\right) ▸ x=-\sqrt{2} \text{ or } x=0 \text{ or } x=\sqrt{2}$

Suurempi tai yhtäsuuri kuin – merkki löytyy Apuohjelmat (Kirjan kuva) – Symbolit



tai laskinnäkymässä klikkaamalla ctrl ja sitten =

Toisen asteen epäyhtälö, joka käsin ratkaistaan ratkaisemalla vastaava yhtälö ja piirtämällä kuvaaja

$\text{solve}\left(x^2-3\cdot x\geq 0,x\right) ▸ x\leq 0 \text{ or } x\geq 3$

4. Kausiapulainen Hessu kasaa 800:sta hernesoppapurkista mahdollisimman

korkean keon, jonka ylimmässä kerroksessa on kolme purkkia ja seuraavassa alemmassa kerroksessa aina kaksi purkkia enemmän kuin edellisessä.

a) Kuinka monta kerrosta Hessun keossa on?

b) Kuinka monta purkkia Hessulta jää yli?

a)

Aritmeettinen jono 3,5,7,...

$a_n = 3+(n-1)\cdot 2 = 2\cdot n+1$

Jos kennossa on n kerrosta, niin rasioiden kokonaismäärä on

$S_n = \dfrac{3+2\cdot n+1}{2}\cdot n = n\cdot (n+2)$

$\text{solve}(n\cdot (n+2)\le 800,n)$ ▸ $-29.3019433962\le n\le 27.3019433962$

Vastaus: Keossa on 27 kerrosta.

b)

Keossa on rasioita

$S_{27} = 27\cdot (27+2) = 783.$

Joten yli jää $800-783 = 17.$

Vastaus: Yli jää 17 rasiaa.

Muodosta sellainen kolmannen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat −2, 0 ja 3 ja joka saa kohdassa 2 arvon 4. Piirrä plynomifunktion kuvaaja.

nollakohta x=−2 josta tekijä x + 2

nollakohta x= 0 josta tekijä x − 0

nollakohta x=3 josta tekijä x −3

Funktion lauseke on

$\mathbf{q}(x):=a\cdot (x+2)\cdot (x-0)\cdot (x-3)$ ▸ *Valmis*

Koska funktion arvo kohdassa 2 on 4, saadaan

$\mathbf{q}(2)=4$ ▸ $-8\cdot a=4$

josta ratkaisemalla saadaan

$\text{solve}(-8\cdot a=4,a) \blacktriangleright a=\frac{-1}{2}$

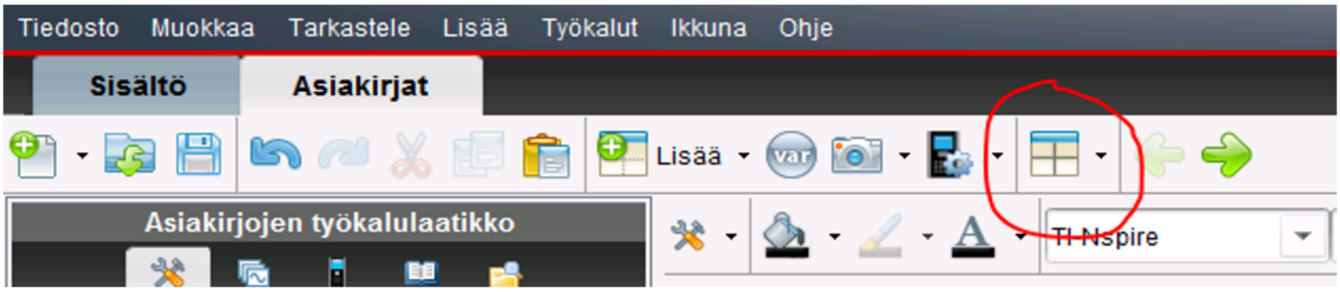
Saamme funktion (huomaa pystyviivan käyttö)

$\mathbf{q}(x)|a=\frac{-1}{2} \blacktriangleright \frac{-x\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{2}$

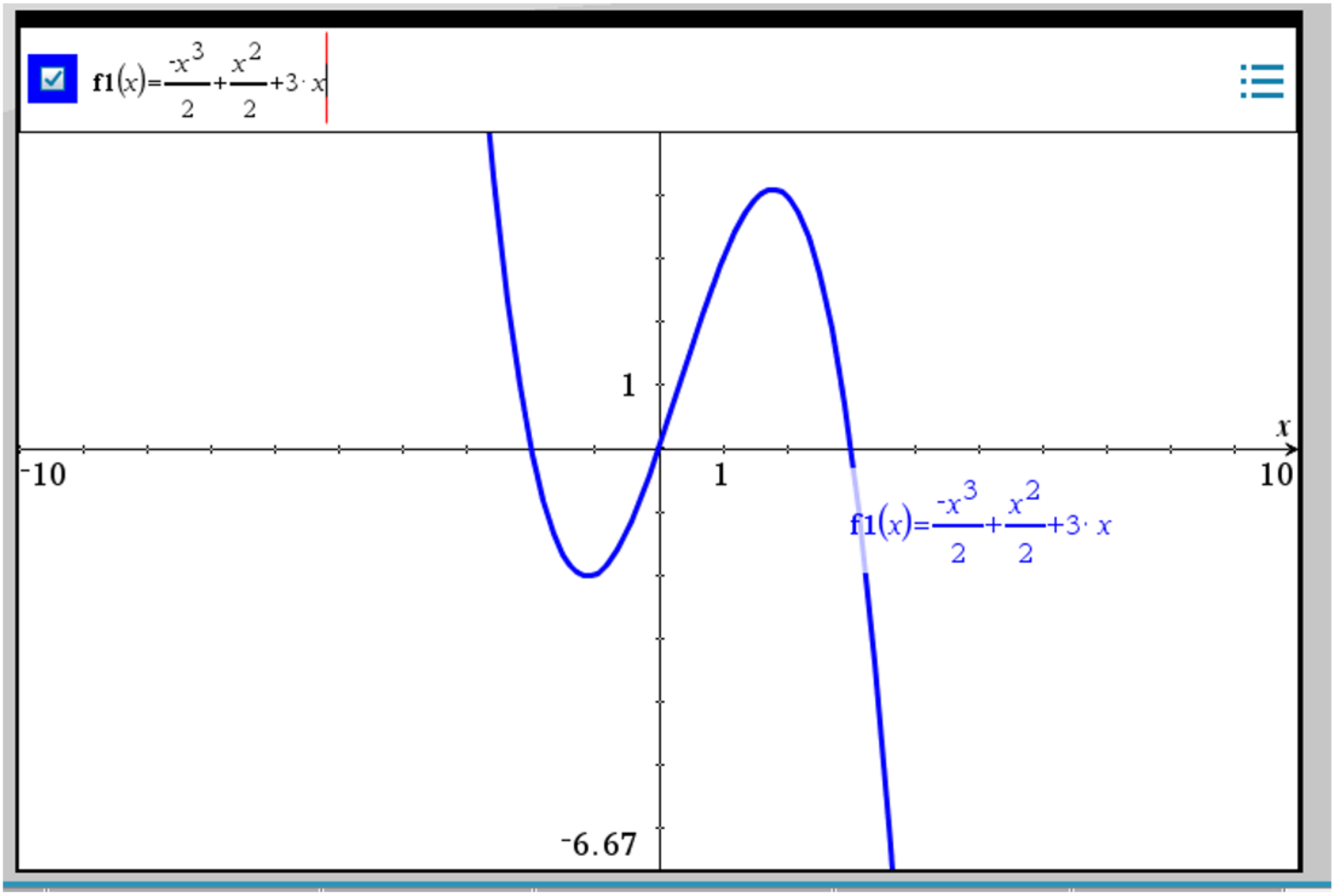
muokattuna

$\text{expand}\left(\frac{-x\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{2}\right) \blacktriangleright \frac{-x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+3\cdot x$

Näytön jakaminen kahteen osaan



Näyttö kannattaa jakaa kahteen osaan kun tehtävässä on osana funktion kuvaajan piirtämistä tai geometrinen kuva.



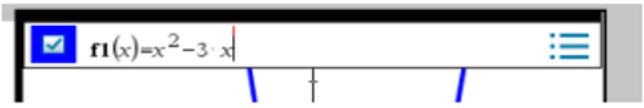
Lisätietoja kuvaajat–sovelluksesta

Kuvaajat sovellus

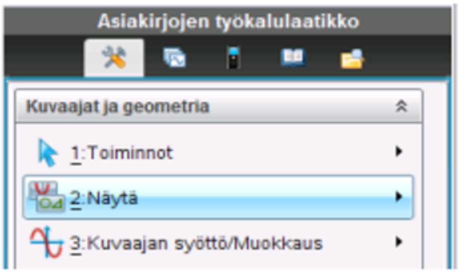
Tiedosto – Uusi asiakirja tietokonesivukoko – Lisää kuvaajat sovellus , jolloin avautuu oikalla oleva näkymä.

Tuplaklikkaa ruudulla tai klikkaa TAB–nappia, jolloin pääset määrittelemään piirrettävän funktion

f1(x):

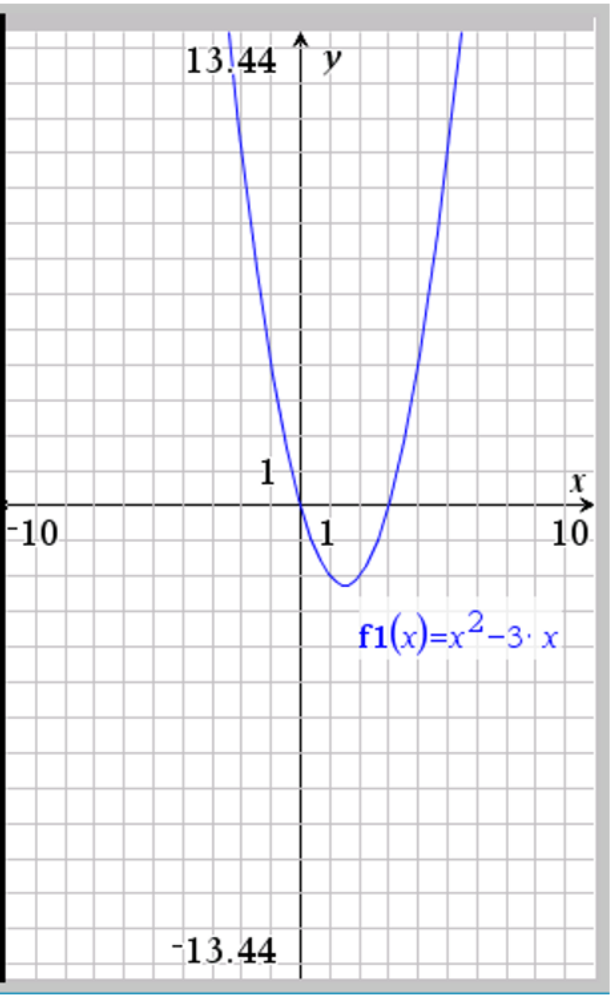


Saat taustaruudukon näkymään klikkaamalla hiiren oikea – Näytä – Näytä viivaruudukko tai Työkalupakista:

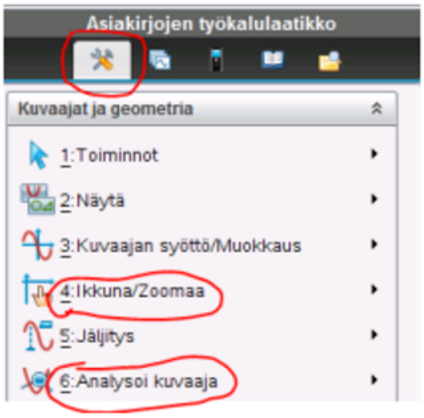


Voit viitata oikealla olevaan funktioon myös täällä Muistiinpanot– sovelluksessa käyttämällä sen nimeä tyyliin

$\text{solve}(\mathbf{f1}(x)=0,x)$ ▸ $x=0$ or $x=3$

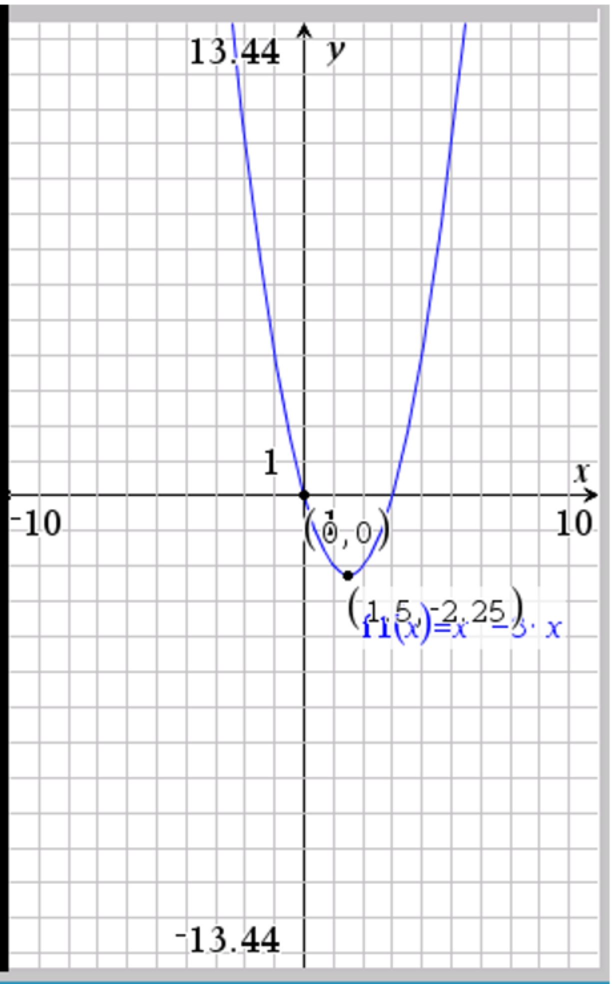


Kuvaajat sovellus – osa 2



Kokeile Asiakirjatyökalut – 4: Ikkuna/Zoomaa – Zoomaa alue.Alkuperäiseen näkymään pääset saman valikon komennolla Zoomaa vakio.

Kokeile Asiakirjatyökalut – 6:Analysoi kuvaaja – Nolla ja anna väli alaraja–yläraja jonka välillä haluamasi funktion nollakohta on. Hae myös toinen nollakohta. Kokeile etsiä myös paraabelin huippu saman valikon komennolla Minimipiste.



6. Diskriminatti

Millä vakion k arvoilla yhtälöllä $5x^2+k\cdot x+1=0$ **on vähintään yksi ratkaisu?**

Juuria on vähintään yksi, kun diskriminantti

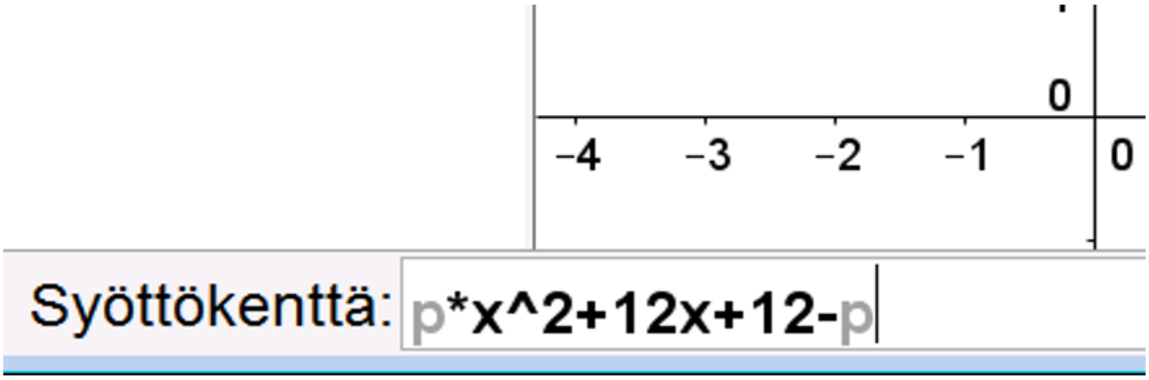
$\mathbf{d}:=k^2-4\cdot 5\cdot 1 \blacktriangleright k^2-20$

on suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla

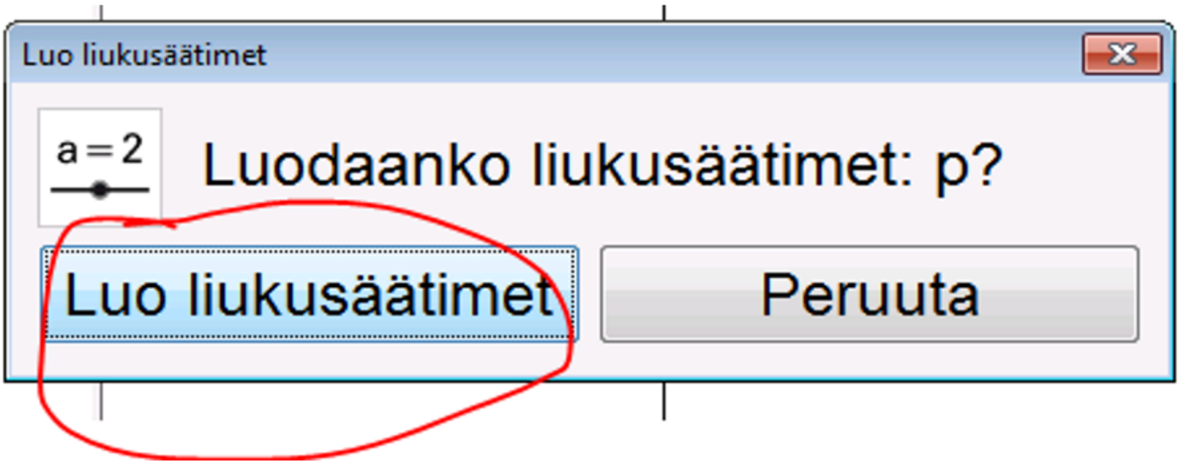
$\text{solve}(\mathbf{d}\geq 0,k) \blacktriangleright k\leq -2\cdot\sqrt{5} \text{ or } k\geq 2\cdot\sqrt{5}$

Millä vakion p arvoilla yhtälöllä $p\cdot x^2+12x+12-p=0$ **on täsmälleen yksi ratkaisu? Muodosta näitä p:n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaise ne.**

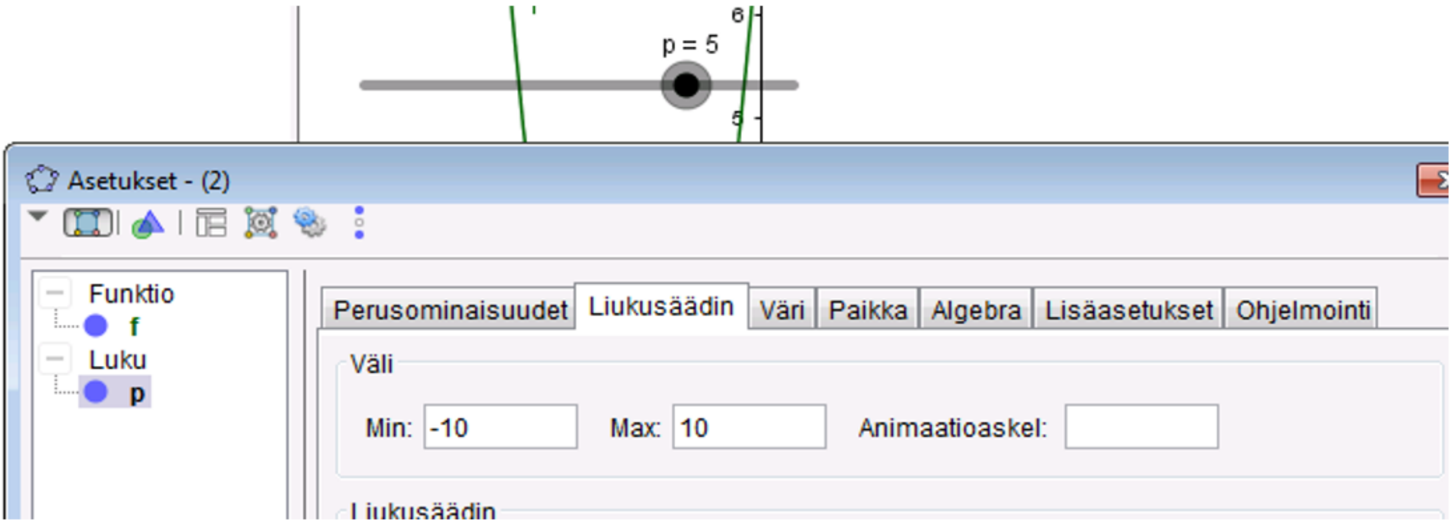
Piirrä funktio GeoGebrassa ja tutki liukusäätimellä mikä olisi oikea ratkaisu



muista p ja x väliin kertomerkki



Säädä liun ominaisuuksia eli laita väli −10 − 10



Liukua vetämällä nähdään että yksi ratkaisu on kun p=6 eli paraabeli sivuaa x−akselia ja kun p=0 niin kyseessä onkin suora joka leikkaa x−akselin yhdessä kohdassa

Haetaan nämä vastaukset analyyttisesti:

$\mathbf{f}(x):=p\cdot x^2+12\cdot x+12-p$ ▸ *Valmis*

Kun p=0, niin

$\mathbf{f}(x)|p=0 = 12\cdot x+12$

jolla on tasan yksi nollakohta

$\text{solve}(12\cdot x+12=0,x)$ ▸ $x=-1$

Kun p≠0, niin diskriminantin

$\textbf{diskriminantti}:=12^2-4\cdot p\cdot (12-p) = 4\cdot p^2-48\cdot p+144$

pitää olla nolla eli

$\text{solve}(\textbf{diskriminantti}=0,p)$ ▸ $p=6$

jolloin ratkaisu on

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=0,x)|p=6$ ▸ $x=-1$

Ja vielä yksi tehtävä

Tässä käytetään Nspiren omaa liukusäädintyökalua.

Millä vakion a arvolla funktiolla f(x)= x^2+ax+1 on nollakohtia?

Ratkaisu: Tutkitaan tilannetta ensi kuvaajan perusteella

$f(x):=x^2+a\cdot x+1$ ▸ *Valmis*

Kun liikutellaan oheista liukusäädintä (huomaa muuttujan nimi on a_, jotta ei mene sekaisin tämän ruudun muuttujan a kanssa), näyttäisi siltä, että ratkaisuja on kun a≥2 tai a≤−2

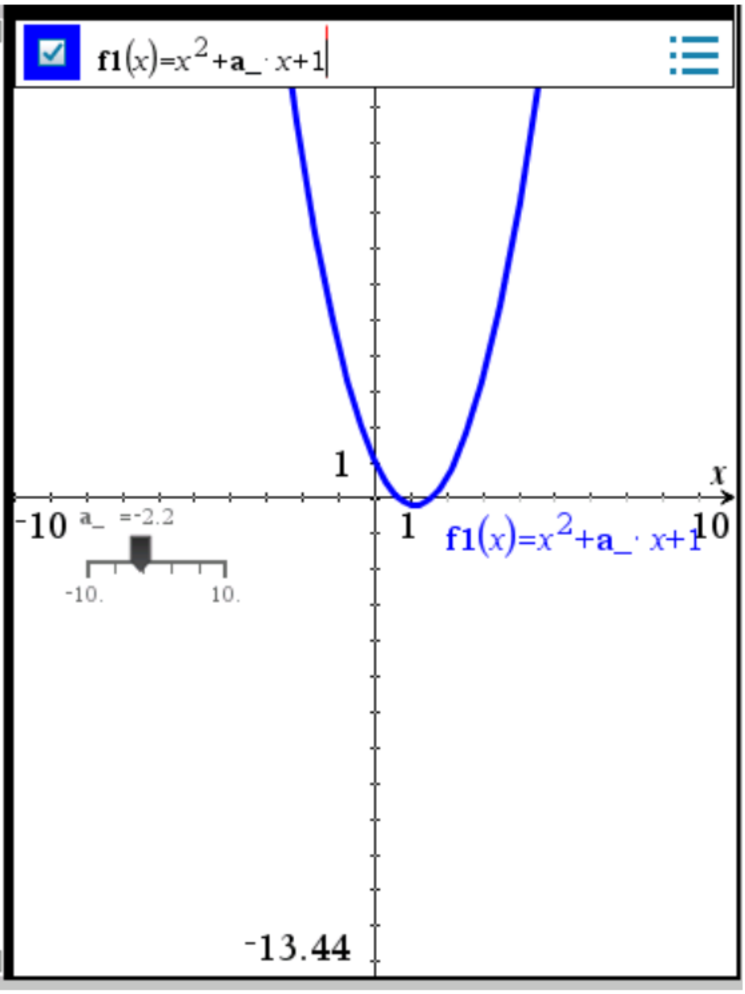
Ratkaistaan analyyttisesti diskriminantin avulla

$d:=a^2-4\cdot 1\cdot 1 = a^2-4$

Diskriminantin pitää olla suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla

$\text{solve}(d\geq 0,a)$ ▸ $a\leq -2$ or $a\geq 2$

Vastaus: $a\leq -2$ or $a\geq 2$



1 cm