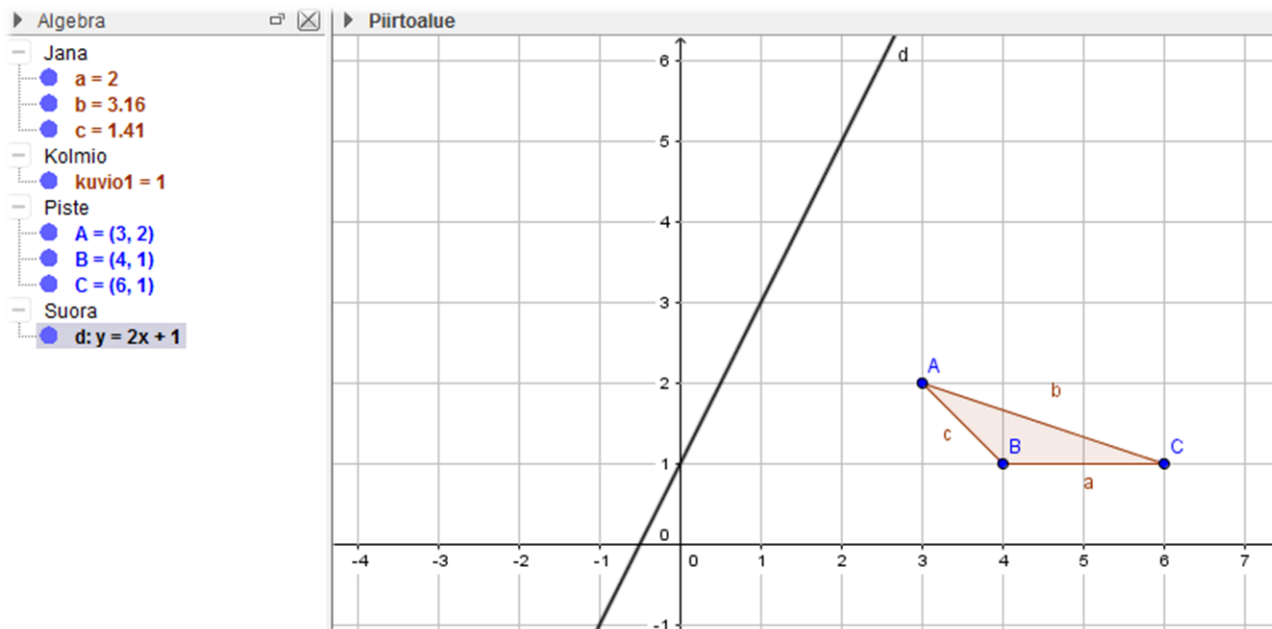


Oppimateriaali oppilaalle ja opettajalle :
GeoGebra oppilaan työkaluna ylioppilaskirjoituksissa 2016
versio 0.8

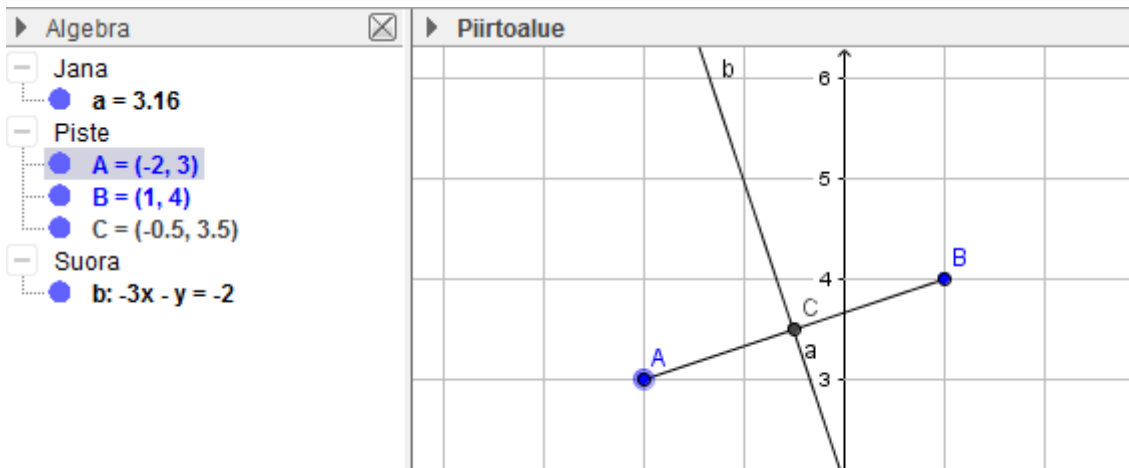
Piirtoalue ja algebraikkuna



Piirtoalueelle piirretään työvälonepalkista löytyvillä työväloneilla tai syöttökenttään annetuilla komennoilla. Piirtoalueella olevia objekteja (esimerkiksi suorat ja kolmiot) hallitaan hiiren avulla. Kustakin objektista näytetään sekä piirtoalueessa että algebraikkunassa eri esitysmuoto. Esimerkiksi yllä olevassa kuvassa piirtoalueella olevan suoran d yhtälö $y=2x+1$ näkyy algebraikkunassa. Kolmio ABC :n ala 1 löytyy algebraikkunasta ($\text{kuvio1}=1$) samoin kuin kolmion sivujen pituudet a , b ja c .

Kun objektin lauseketta muokataan algebraikkunassa, muuttuu saman tien objektin graafinen esitys piirtoalueella. Kun taas hiirellä tartutaan vaikkapa kolmion kärkeen A (kuva yllä) ja sen sijaintia muutetaan, muuttuu saman tien myös janan c pituus sekä kolmion ala algebraikkunassa.

Objekteja on kahta eri lajia: vapaita ja riippuvia. Vapaata objektia voit siirtää hiirellä vetämällä tai algebraikkunasta muokkaamalla rajoituksetta. Vapaat pisteet ovat väriltään sinisiä. Riippuvat objektit taas on määritelty muiden objektien avulla. Niitä ei tyypillisesti voi liikuttaa suoraan objektiin tarttumalla lainkaan tai korkeintaan rajoitetusti. Riippuvat pisteet ovat väriltään mustia. Esimerkkinä riippuvasta pisteestä on janan AB keskipiste C (kuva alla) ja riippuvasta suorasta annetun janan AB keskinormaali (kuva alla). Et voi siirtää janan keskipistettä C suoraan, mutta sen paikka vaihtuu automaattisesti, kun siirrät jompaakumpaa janan päätepisteistä A tai B . Et voi siirtää keskinormaalia hiirellä vetämällä mutta keskinormaali alkaa elämään kun muutat janan päätepisteitä. Kokeile itse tätä <http://ggbtu.be/m1465043> Tartu myös itse janaan AB hiirellä (vaikkapa pisteiden A ja C puolivälistä). Voitko siirtää janaa? Mitkä asiat janaassa tällöin muuttuvat ja mitkä säilyvät?



Kokeile itse seuraavaa!

<http://ggbtu.be/m1464819>

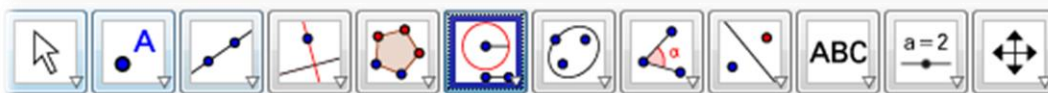
Siirrä piirto alueella hiiri pisteen A päälle ja sitten pisteen B päälle. Mitä tapahtuu algebraikkunassa? Kokeile myös siirtää hiirtä kolmion keskelle ja kolmion sivujanoille. Mitä tapahtuu algebraikkunassa, mitä arvoja näet?

Tartu pisteeseen A hiirellä ja siirrä sen paikkaa. Katso samalla algebraikkunasta miten kolmioon liittyvät lukuarvot muuttuvat. Siirrä kolmion kärkipisteitä A ja B siten, että kolmion alaksi tulee 10. Kokeile sen jälkeen kolmion kärkien vaihtamista syöttämällä algebraikkunaan uudet pisteen koordinaatit ja tarkkaile vaikutusta piirtoikkunaan.

Tartu piirtoalueella suoralla e olevaan pisteeseen D hiirellä ja vaihda sen paikkaa. Katso algebraikkunasta miten suoran e yhtälö muuttuu. Kyseinen suora e on määritelty kulkemaan aina pisteiden D ja E kautta. Vaihda pisteen E paikkaa. Tarkkaile samalla suoralla olevan pisteen F vaihtumista piirtoalueella. Mikä on pisteen F merkitys? Löydät oikean vastauksen viemällä hiiren joksikin aikaa pisteen F päälle joko piirtoalueella tai algebraikkunassa. Yritä tarttua pisteeseen F. Saatko siirrettyä sitä hiirellä vetämällä? Miksi näin? Mikä on suora f? Onko se vapaa vai riippuva?

Huom! Objekti voi olla myös osittain riippuva. Esimerkiksi suoralle lisätty piste on osittain riippuva: sen paikkaa voidaan siirtää suoralla, mutta sitä ei voi raahata suoran ulkopuolelle.

Työvälinepalkki

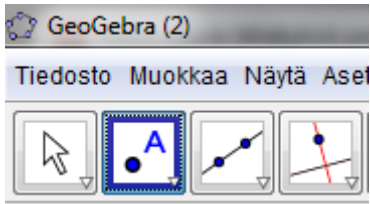


Työvälineet ovat GeoGebra-ikkunan ylälaudassa ja ne on ryhmitelty toimintansa perusteella ryhmiin. Ryhmästä on kerrallaan vain yksi työväline valittuna ja kyseinen työväline näkyy ryhmänsä päällä. Kulloinkin aktiivisen oleva työväline kehystyy sinisellä. Ryhmässään päällimmäisenä olevien työkalujen ohjeet tulevat näkyviin kun viet hiiren työkalun päälle. Kun napsautat pikkukolmiota työvälineen oikeasta alanurkasta, saat näkyville ryhmän kaikki työvälineet ja voit vaihtaa aktiivisen työvälineen toiseksi, joka nyt sitten näkyy ryhmänsä päällimmäisenä.

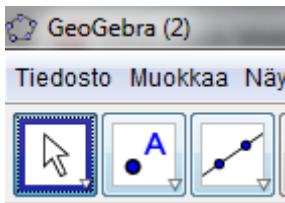
Kokeile itse!

Mene piirtoalueelle ja paina hiiren oikealla ja valitse Koordinaattiruudusto.

Valitse työväline Uusi piste (alla sinisellä kehystettynä) ja luo piste (3,2). Piste saa nimen joka näkyy pisteen vieressä. Myös algebraruutu päivittyy ja piste A näkyy siellä.

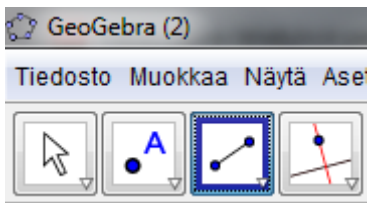


Vaihda työkaluun Siirrä (alla sinisellä kehystettynä) ja raahaa piste A kohtaan (2,3).



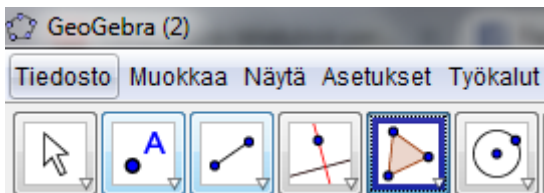
Vaihda takaisin Uusi piste työkaluun ja luo piste B haluamaasi kohtaan koordinaatistossa.

Vaihda työkaluun Kahden pisteen välinen jana (alla sinisellä kehystettynä) ja luo jana AB napsauttamalla pistettä A ja B.



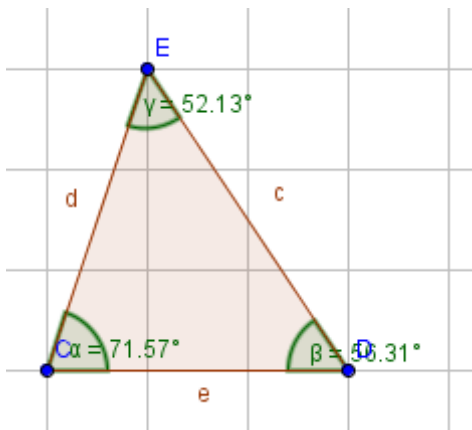
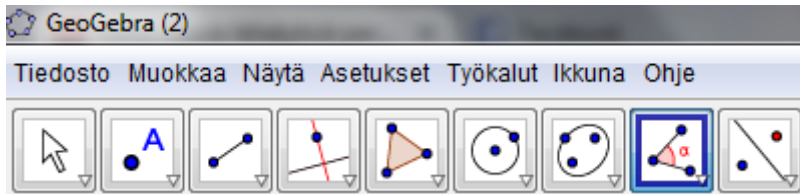
Vaihda taas Siirrä työkaluun ja raahaa piste B kohtaan (5,1). Huomaa että jana elää samalla. Janan pituus a näkyy algebraikkunassa. Mikä on janan pituus tällä hetkellä?

Valitse työkalu monikulmio (alla sinisellä kehystettynä)



Lue monikulmio-työkalun ohje ja luo kolmio haluamaasi kohtaan piirtoaluetta klikkailemalla piirtoalueelle pisteitä haluamiisi kohtiin. Pisteiden ei tarvitse olla jo luotuna vaan ne syntyvät lennossa.

Valitse kulma-työkalu (alla sinisellä kehystettynä) ja klikkaa kolmion sisällä. GeoGebra mittaa kolmion kulmien suuruudet.



Käy läpi mitä erilaisia työkaluja GeoGebrasta löytyy ja kokeile niitä vapaasti. Lue aina työkalun ohje ennen kokeilua.

Syöttökenttä

Syöttökenttä: $y=2x+1$

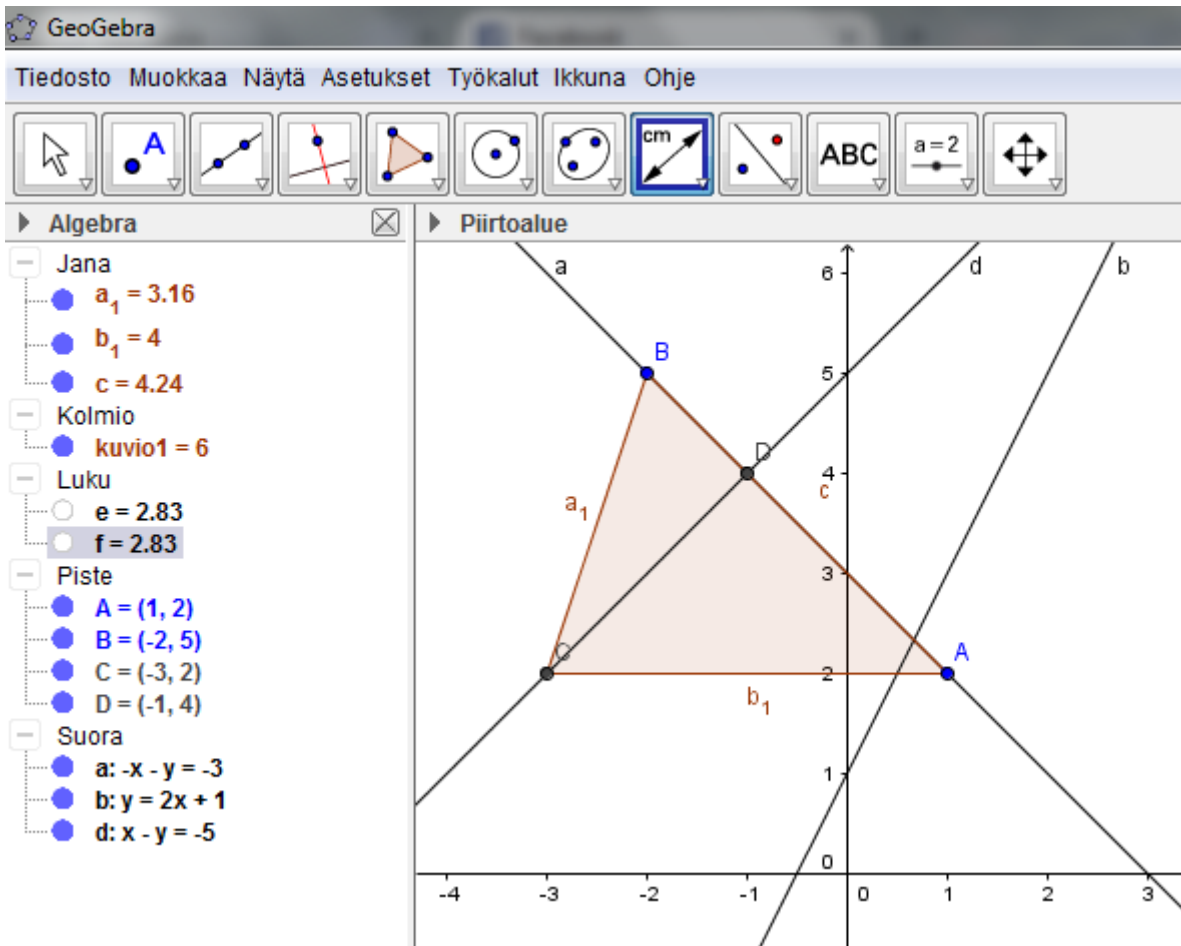
Syöttökenttä löytyy tyypillisesti GeoGebra-ikkunan alaosasta, mutta voi olla myös vasemmassa yläkulmassa. Syöttökenttään voidaan antaa komentoja, joiden vaikutus näkyy piirtoalueella ja algebraikkunassa.

Kokeile seuraavia komentoja!

Kirjoita syöttökenttään seuraavat komennot. Huomaa isot ja pienet kirjaimet.

- a) $A=(1,2)$
- b) $B=(-2,5)$
- c) $\text{suora}[A,B]$
- d) $y=2x+1$
- e) $\text{leikkauspiste}[a,b]$
(Tarkista algebraikkunasta kohdissa c ja d luotujen suorien nimet, tässä oletetaan että nimet ovat a ja b)
- f) $C=(-3,2)$
- g) $\text{monikulmio}(A,B,C)$

- h) normaali(C,a)
- i) leikkauspiste(d,a)
- j) etäisyys(C,D)
- k) etäisyys(C,a)



<http://ggbtu.be/m1463557>

Geometrian tehtävien ratkaiseminen GeoGebralla

Esimerkki

Syksy 06 tehtävä 7

Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan 70 astetta, 125 astetta ja 110 astetta; näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tontin kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella.

Ratkaisu GeoGebralla:

<http://tube.geogebra.org/student/m1401711>

jossa ideana "vain piirtää" kuvio ja mitata puuttuvat osat.

Huom! Ratkaisu ei välttämättä tuota täysiä pisteitä.

Tehtäviä

Määritä säännöllisen 5-kulmion kulman suuruus.

Piirrä kolmio. Mittaa kolmion kulmat. Luo summamuuttuja, jonka arvoksi tulee kolmion kulmien summa. Muokkaa kolmiota. Mitä havaitset? Osaatko todistaa havaintosi oikeaksi?

Piirrä nelikulmio. Mittaa nelikulmion kulmat. Luo summamuuttuja, jonka arvoksi tulee nelikulmion kulmien summa. Muokkaa nelikulmiota. Mitä havaitset? Osaatko todistaa havaintosi oikeaksi?

Piirrä suunnikas Piirrä suunnikkaan lävistäjät. Tutki väitettä ”suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa” tekemällä mittauksia nelikulmiossa ja muokkaamalla nelikulmiota.

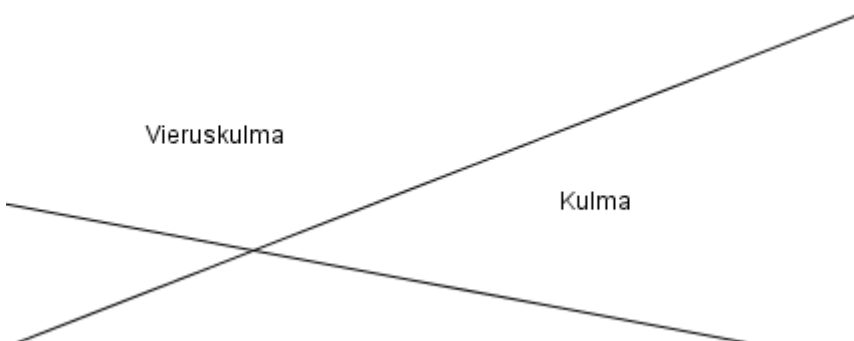
Tutki GeoGebralla väitettä ”kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan”. Osaatko todistaa väitteen?

Valitse ympyrän kehältä piste ja piirrä siitä alkaen peräkkäin säteen mittaisia jäniteitä niin monta, että olet jälleen lähtöpisteessä. Mikä kuvio näin syntyy?

Tutki GeoGebralla väitettä ”kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste”. Etsi internetistä tietoa muista ns. kolmion merkillisistä pisteistä ja tutki niitä samaan tapaan GeoGebralla.

Neliön sivun pituus on 3. Määritä neliön lävistäjän pituus.

Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 4. Määritä kolmion ala.



Kulman ja sen vieruskulman summa on 180 astetta.

3D

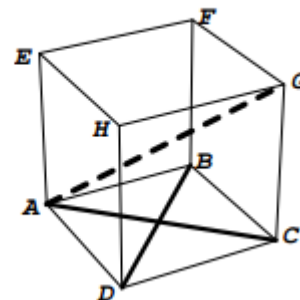
Tähän käyttöohjetta.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Esimerkki

K07 T9

Laske kuution avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän AC suuntien välinen kulma $0,1$ asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän BD suuntien välinen kulma.



Tämä ratkaisu ei välttämättä tuota täysiä pisteitä:

<http://ggbtu.be/m1421499>

Tehtäviä

Konstruoi kuutio, jonka sivun pituus on 3. Mittaa sen lävistäjän pituus. Mittaa kuution lävistäjän ja kuution sivutahkon lävistäjän välinen kulma sellaisessa tapauksessa, missä nämä lävistäjät alkavat samasta kuution kärjestä.

Piirrä kuutio. Piirrä pallo, joka mahtuu juuri ja juuri kuution sisään. Piirrä pallo, jonka sisään kuutio juuri ja juuri mahtuu.

Avaruuden suorat ja tasot

K14 T8

Lasersäteellä osoitetaan pistettä $A(1,-2,3)$ vektorin $u=2i-j-3k$ suuntaan. Toisella säteellä osoitetaan pisteestä $B(9,-1,-12)$ vektorin $v=-i-2j+3k$ suuntaan. Näytä, että säteet leikkaavat toisensa, ja määritä niiden leikkauspiste.

Ratkaisu

$$A=(1,-2,3)$$

$$B=(9,-1,-12)$$

(Loitonna näkymää kunnes myös piste B näkyy 3D-ikkunassa.)

$$u=\text{Vektori}[(2, -1, -3)]$$

$$v=\text{Vektori}[(-1, -2, 3)]$$

(valonsäteet ovat puolisuoria)

$$\text{psuoraAu}=\text{Puolisuora}[A, u]$$

$$\text{psuoraBv}=\text{Puolisuora}[B, v]$$

$$\text{vastaus}=\text{Leikkauspiste}[\text{psuoraAu}, \text{psuoraBv}]$$

jolloin algebraikkunasta näemme että suorat leikkaavat pisteessä (7,-5,-6). Koska puolisuorien leikkauspiste löytyi, säteet leikkaavat toisensa.

<http://ggbtu.be/m1463607>

K14 tehtävä 9

Taso $x+2y+3z=6$ leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä A,B ja C.

a) Määritä tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat origossa O sekä pisteissä A,B ja C.

b) Määritä kolmion ABC pinta-ala.

Ratkaisu

<http://ggbtu.be/m1463545>

Esim. antamalla seuraavat komennot syöttökenttään:

$$x+2y+3z=6$$

$$A=\text{Leikkauspiste}[a, \text{xAkseli}]$$

$$B=\text{Leikkauspiste}[a, \text{yAkseli}]$$

$$C=\text{Leikkauspiste}[a, \text{zAkseli}]$$

$$\text{Monikulmio}[A,B,C]$$

(jolloin algebraikkunasta voidaan lukea kolmion ABC pinta-alan likiarvo 11,225)

$$O=(0,0,0)$$

$$\text{Pyramidi}[O, A, B, C]$$

(jolloin algebraikkunasta voidaan lukea tetraedrin tilavuuden arvo 6)

TODO: Analyttinen geometria, derivaatta ja määrätty integraali

Harjoitustehtäviä

K01

8. Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste.

S01

10. Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee xy -koordinaatiston pisteiden $(28, 98)$, $(70, 112)$ ja $(126, 84)$ kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?

S01

7. Osoita, että pisteiden $(2, 11\frac{1}{2}, 2)$ ja $(4, \frac{1}{2}, -1)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $(5, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ ja $(4, 1, 3)$ kautta kulkevaa tasoa vastaan.

S07

5. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen $(1, 3)$ kautta.

S09

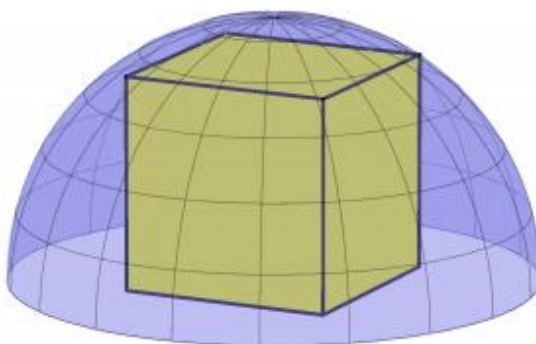
6. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(-5, 3)$, $(2, -1)$ ja $(4, 8)$.
a) Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.
b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.

K09

8. Taso T kulkee pisteiden $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ ja $C = (1, 2, 3)$ kautta. Muodosta tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

K10

4. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



K11

7. Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.
- a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.
- b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

