PITKÄN MATEMATIIKAN YO SYKSY 2019

VASTAUKSET TI-NSPIRELLÄ, TEHNYT OLLI KARKKULAINEN

MAA t. 5

Ratkaistaan epäyhtälö solvella

$\text{solve}\left(x^3-2\cdot x^2-11\cdot x+12\geq 0,x\right)$

▸ $-3\leq x\leq 1$ or $x\geq 4$

Vastaus: $-3\leq x\leq 1$ tai $x\geq 4$

Sanallisessa osassa voi käyttää apuna esimerkiksi merkkikaaviota Widgetillä piirrettynä. Merkkikaaviot kehittyvät erilliseen matikan Widgetiin. Nykyinen fysiikasta

		x=a		x=b		x=c	
x−a	−		+		+		+
x−b	−		−		+		+
x−c	−		−		−		+
p(x)	−		+		−		+

MAA t.6

Olkoon paraabelit $y=(x-1)^2+c$ ja $y=-x^2$

Tutkitaan, millä c arvolla paraabelit leikkaavat ainoastaan yhdessä kohdassa, eli milloin yhtälöllä $(x-1)^2+c=-x^2$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Yhtälön kaikki ratkaisut ovat

$\text{solve}\left((x-1)^2+c=-x^2,x\right)$ ▸ $x=\dfrac{\sqrt{-2\cdot c-1}+1}{2}$ or $x=\dfrac{-\left(\sqrt{-2\cdot c-1}-1\right)}{2}$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun edelliset ratkaisut ovat samat, eli

$\text{solve}\left(\dfrac{\sqrt{-2\cdot c-1}+1}{2}=\dfrac{-\left(\sqrt{-2\cdot c-1}-1\right)}{2},c\right)$ ▸ $c=\dfrac{-1}{2}$

Paraabelien huiput ovat kohdissa 0 ja 1, joten kysessä ei ole huippujen leikkauspiste.

Vastaus: Pyydetyt paraabelit ovat esimerkiksi $y=(x-1)^2-\dfrac{1}{2}$ ja $y=-x^2$

MAA t.7

Toisen asteen polynomilla on kaksinkertainen nollakohta, mikäli diskriminantti on nolla. Kyseisten polynomien diskriminantit ovat $D = b^2 - 4ac = n^2 - 4n$ ja $m^2 - 4m$. Taulukoidaan diskriminanttien arvot noppien eri silmäluvuilla.

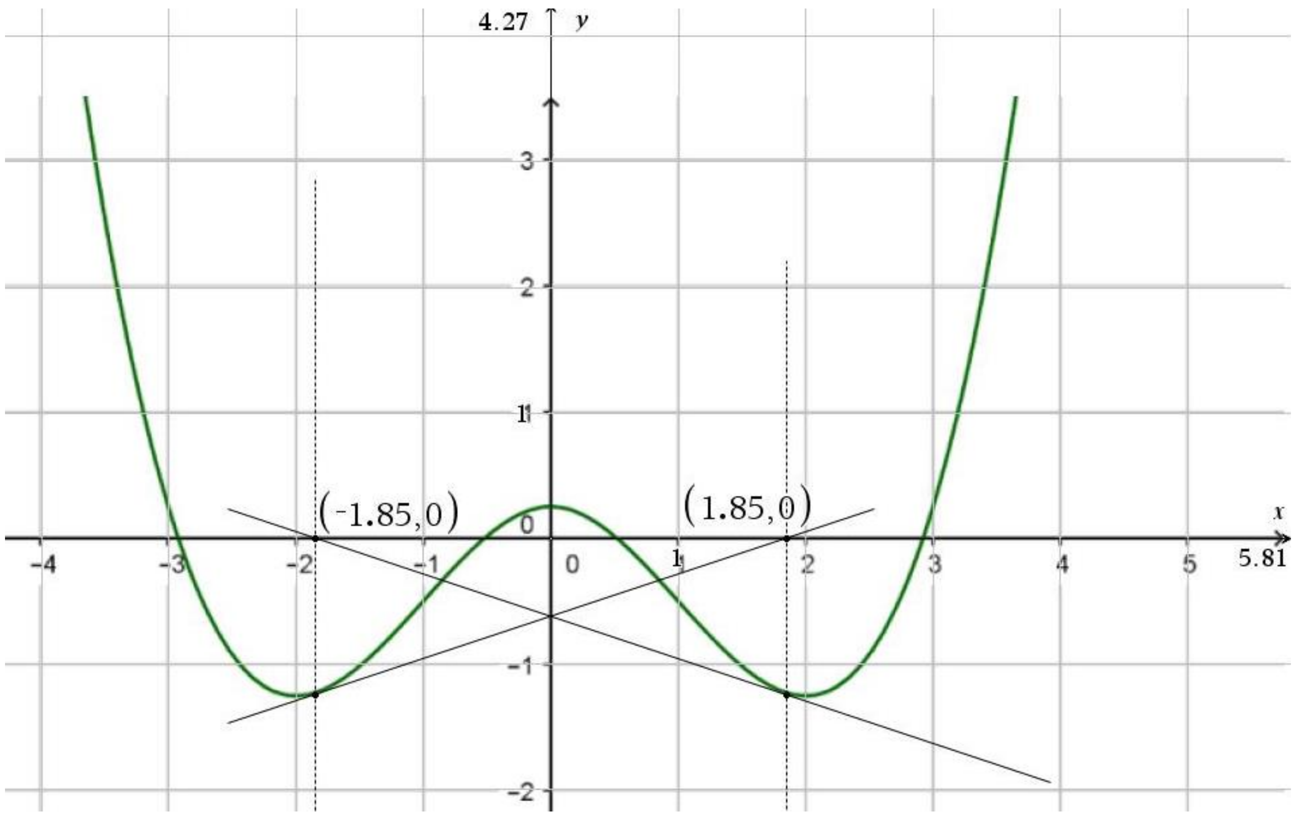
Suotuisat noppien arvot on merkitty alempaan taulukkoon keltaisella. Suotuisia tapauksia on 13 ja kaikkia vaihtoehtoja $6 \cdot 8$, joista jokainen on yhtä todennäköinen. Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{13}{48}$.

Vastaus: $\frac{13}{48}$

	A noppa1	B noppa2	C diskrim1	D diskrim2	E	F	G
=			=noppa1^:	=noppa2^:			
1	1	1	-3	-3			
2	2	2	-4	-4			
3	3	3	-3	-3			
4	4	4	0	0			
5	5	5	5	5			
6	6	6	12	12			
7		7		21			
8		8		32			
9							
10							
11							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
=											
1		1	2	3	4	5	6	7	8		
2	1										
3	2										
4	3										
5	4										
6	5										
7	6										
8											
9											

Tehtävä 8



MAA t.9. Tallennetaan funktion lauseke $\mathbf{f}(x) := \dfrac{x}{1+|x|}$. Funktio on määritelty kaikilla reaaliluvuillla.

Määrittelyjoukon voi tutkia myös $domain(f(x),x) \blacktriangleright -\infty<x<\infty$

9.1. Funktio derivaattafunktio on $\dfrac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright \dfrac{1}{(|x|+1)^2}$, joten se on positiivinen kaikilla reaaliluvuilla ja funktio f on siten aidosti kasvava.

Pyydetyt raja−arvot ovat $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright -1$ ja $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright 1$.

Edellisten raja−arvojen ja kasvavuuden perusteella arvojoukko on $]-1, 1[$.

9.2. Ratkaistaan y yhtälöstä $\mathbf{f}(x) = y$ $\quad \text{solve}(\mathbf{f}(x)=y,x) \blacktriangleright x=\dfrac{y}{y+1} \text{ and } \dfrac{y}{y+1}<0 \text{ or } x=\dfrac{-y}{y-1} \text{ and } \dfrac{y}{y-1}\le 0$

Ratkaistaan edelliset ehdot y:n suhteen $\text{solve}\left(\dfrac{y}{y+1}<0,y\right) \blacktriangleright -1<y<0$ $\quad \text{solve}\left(\dfrac{y}{y-1}\le 0,y\right) \blacktriangleright 0\le y<1$

Käänteisfunktion lausekkeeksi saadaan siis

$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{y+1}, y<0 \\ \dfrac{y}{y-1}, y\ge 0 \end{cases}$, joka voidaan kirjoittaa muotoon $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$, missä y on välillä $]-1, 1[$.