

Tilavuus $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

Integroimisrajat

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan alemmasta yhtälöstä y ylempään yhtälöön.

$$x^2 + (-x - 1)^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + 6x + 5 = 0$$

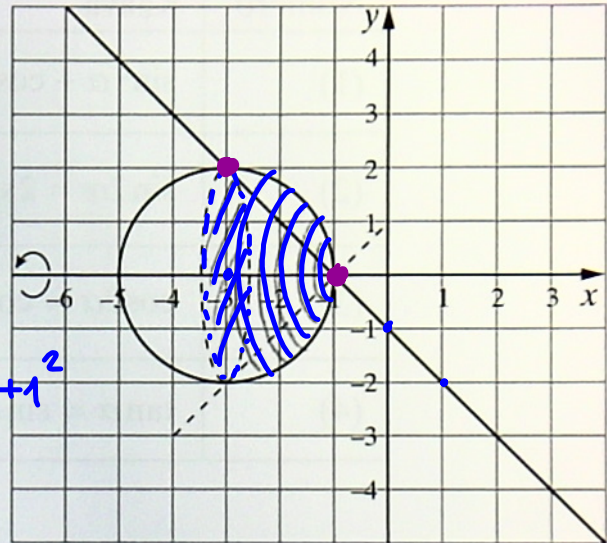
$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2} = -1$$



kp: $(-3, 0)$

$r = 2$

$y = -x - 1$

SYKSY 2004

Integroitavat funktiot

$$x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$$

$$y^2 = \underline{-x^2 - 6x - 5}$$

Tilavuus

$$V = V_{ulko} - V_{sisä}$$

$$= \pi \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 6x - 5) dx - \pi \int_{-3}^{-1} (-x - 1)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{-1} [(-x^2 - 6x - 5) - (x^2 + 2x + 1)] dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{-1} (-2x^2 - 8x - 6) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 6x \right]_{-3}^{-1}$$

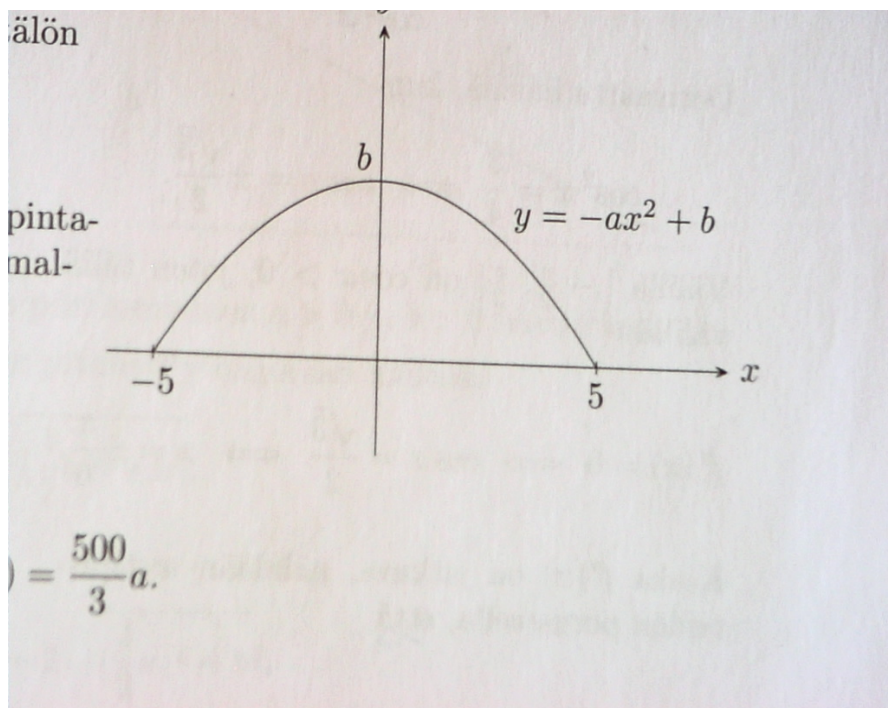
$$= \pi \left[\left(-\frac{2}{3} - 4 + 6 \right) - (18 - 36 + 18) \right]$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

Vastaus: Pyörähdysskappaleen tilavuus $\frac{8\pi}{3}$.

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$y = -x - 1$$



$$f(x) > 0, \text{ kun } 0 < x < \sqrt{2},$$

$$f'(x) < 0, \text{ kun } x > \sqrt{2}.$$

Näin ollen suorakulmion pinta-ala saa suurimman mahdollisen arvon derivaatan nollassa $x = \sqrt{2}$. Sivujen pituudet ovat tällöin $2\sqrt{2}$ ja $\frac{4}{2+2} = 1$.

Vastaus: Sivujen pituudet ovat $2\sqrt{2}$ ja 1.

8. Tietunnelin poikkileikkaus on osa alaspäin aukeavaa paraabelia. Tien leveys on 10 m ja tunnelin poikkileikkauksen pinta-ala on $25,0 \text{ m}^2$. Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu: Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon siten, että sen huippu on y -akselilla kohdassa $y = b$ ja tien poikkileikkaus on x -akselilla. Mittayksikkönä käytetään metriä. Koska tien leveys on 10 m, leikkaa paraabeli x -akselia kohdissa $x = -5$ ja $x = 5$. Alaspäin aukeavan paraabelin, jonka huippu on pisteessä $(0, b)$, yhtälö on muotoa

$$y = -ax^2 + b, \quad a > 0.$$

Tunnelin korkeus on b m. Sen määrittämiseen tarvitaan kerrointa a . Kerroimien suhde määräytyy tien leveydestä. Kun $y = 0$, on konstruktion mukaan

$$x^2 = \frac{b}{a} = 5^2,$$

joten

SMART Document Camera

$b = 5^2 a = 25a.$

Tämä yhteys sieventää paraabelin yhtälön muotoon

$$y = a(-x^2 + 25).$$

Kerroin a määräytyy poikkileikkauksen pinta-alasta A . Toisaalta A saadaan integroimalla.

$$A = \int_{-5}^5 a(-x^2 + 25) dx$$

$$= a \left[-\frac{1}{3}x^3 + 25x \right]_{-5}^5 = 2a \left(-\frac{125}{3} + 125 \right) = \frac{500}{3}a.$$

Ehdosta $A = 25$ seuraa

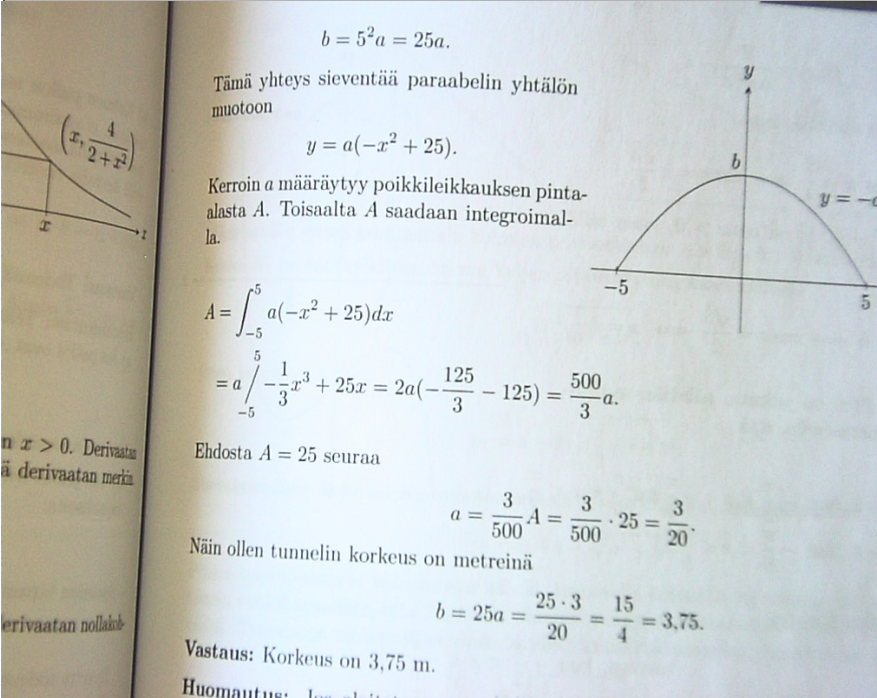
$$a = \frac{3}{500}A = \frac{3}{500} \cdot 25 = \frac{3}{20}.$$

Näin ollen tunnelin korkeus on metreinä

$$b = 25a = \frac{25 \cdot 3}{20} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

Vastaus: Korkeus on 3,75 m.

Huomautus: Jos aloitetaan paraabelin...



SMART Document Camera interface icons: camera, document, zoom in (+), zoom out (-), brightness, AF, and other controls.