K87/8a

ehdot $f(\frac{\pi}{2})=\pi$, $f'(\frac{\pi}{2})=2$

$f(x)=\cos(\frac{1-x}{x})$ mj: $x\neq 0$

$D\frac{f}{g} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$

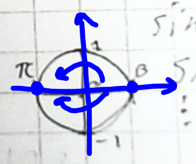
$f'(x) = -\sin(\frac{1-x}{x})\cdot\frac{-1\cdot x-1\cdot(1-x)}{x^2}$

$= -\sin(\frac{1-x}{x})\cdot\frac{\cancel{-x}+\cancel{x}-1}{x^2}$

$= \frac{\sin(\frac{1-x}{x})}{x^2}$, $x\neq 0$

$f'(x)$ hollakohdat välillä $-1<x<1$

$f'(x) = \frac{\sin(\frac{1-x}{x})}{x^2} = 0 \quad |\cdot x^2$



sin(0)=0

sin(π)=0

$\sin(\frac{1-x}{x})=0$

$\frac{1-x}{x} = \pm n\pi \quad |\cdot x, \; n\in N$

$1-x = \pm n\pi x$

$\pm n\pi x + x = 1$

$x(1\pm n\pi) = 1 \quad |:(1\pm n\pi)$

Vastaus: $\sin(\frac{1-x}{x^2}) = 0$ hollakohdat välillä $]-1,1[$ $x=\frac{1}{1\pm n\pi}$

$= \frac{\sin\left(\frac{1-x}{x}\right)}{x^2}, \quad x \neq 0$

$f'(x)$ hollakohdat välillä $-1<x<1$

$f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1-x}{x}\right)}{x^2} = 0 \quad |\cdot x^2$

$\sin\left(\frac{1-x}{x}\right) = 0$

$\frac{1-x}{x} = \pm n\pi \quad |\cdot x, \; n \in \mathbb{N}$

$1-x = \pm n\pi x$

$\pm n\pi x + x = 1$

$x(1\pm n\pi) = 1 \quad |:(1\pm n\pi)$

$x = \frac{1}{1+n\pi}$ tai $x = \frac{1}{1-n\pi}$

$\boxed{-1 < \frac{1}{1+n\pi} < 1} \quad |\cdot(1+n\pi)$ tai $-1<\frac{1}{1-n\pi}<1 \quad |\cdot(1-n\pi)$

$-(1+n\pi) < 1 < 1+n\pi$ tai $-(1-n\pi)<1<1-n\pi$

$\Rightarrow 1+n\pi>1$ tai $1-n\pi>1$

$n\pi>0$ tai $-n\pi>0$

$n>0$ tai $n<0$

$\sin(0)=0$

$\sin(\pi)=0$

Vastaus: $\frac{\sin\left(\frac{1-x}{x}\right)}{x^2} = 0$ hollakohdat välillä $]-1, 1[$

$x = \frac{1}{1\pm n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$-1 < \frac{1}{1+n\pi}$ ja $\frac{1}{1+n\pi} < 1$

$\vdots$

S98/3

$2A = 3 \quad || : 2$

$A = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} + 2B = 1 \quad || - \frac{3}{2}$

$2B = -\frac{1}{2} \quad || : 2$

$B = -\frac{1}{4}$

S98/3

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Funktio on polynomifunktiona derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Lasketaan funktioiden nollakohdat:

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x^2(x-1) + (x-1) = 0$

$(x-1)(x^2+1) = 0$

tulon ns.

$x - 1 = 0 \quad || +1$ tai $x^2 + 1 = 0 \quad || -1$

$x = 1 \in \mathbb{R}$ $\qquad x^2 = -1 \quad || \pm\sqrt{\ }$

f

$x = \pm\sqrt{-1} \quad | \notin \mathbb{R}, \ i^2 = -1$

$(x = \pm i)$

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 5 > 0$

$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 = -15 < 0$

Funktio $f(x)$ saa positiivisia arvoja, kun $x > 1$.

$3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Funktio $f'(x)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole reaalisia nollakohtia. Se saa siis vain positiivisia arvoja.

Lasketaan funktioiden nollakohdat:

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x^2(x-1) + (x-1) = 0$

$(x-1)(x^2+1) = 0$

$x - 1 = 0 \quad || +1$ tai $x^2 + 1 = 0 \quad || -1$

$x = 1 \in \mathbb{R}$ $\qquad x^2 = -1 \quad || \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{-1} \quad | \notin \mathbb{R}, \; i^2 = -1$

$(x = \pm i)$

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 5 > 0$

$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 = -15 < 0$

Funktio $f(x)$ saa positiivisia arvoja, kun $x > 1$.

Koska $f'(x) > 0$, funktio f on aid. kasv.

\+ + +

$f(1) = 0 \Rightarrow$
$f(x) > 0, \; x > 1$

$3x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$

$D < 0$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \notin \mathbb{R}$

Funktio $f'(x)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole reaalisia nollakohtia. Se saa siis vain positiivisia arvoja.

Vast. Funktio $f(x)$ ja sen derivaatta $f'(x)$ saavat yhtä aikaa posit. arvoja, kun $x > 1$.

K01/4

Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5
vasta ilmasta. Kuinka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän

Ratkaisu Ilman määrä tulee jokaisella vedolla 0,95-kertaiseksi ja n:llä vedolla $0{,}95^n$ -kertaiseksi. Ilmamäärä n vedon jälkeen on $0{,}95^n \cdot 2{,}3$ kg.

$$0{,}95^n \cdot 2{,}3 < 0{,}2 \qquad |:2{,}3\ (>0)$$

$$0{,}95^n < \frac{0{,}2}{2{,}3} \qquad |\lg$$

$$\lg 0{,}95^n < \lg \frac{0{,}2}{2{,}3} \qquad \text{Logaritmi } \lg \text{ on aidosti kasvava}$$

$$n \cdot \lg 0{,}95 < \lg \frac{0{,}2}{2{,}3} \qquad |:\lg 0{,}95 \approx -0{,}02 < 0$$

$$n > \frac{\lg \frac{0{,}2}{2{,}3}}{\lg 0{,}95} \approx 47{,}6$$

Vastaus 48 vedon jälkeen

K97/3b

$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(2-x) + \sqrt{5x+3-2x^2}$

määrittelyjoukko:

$x - 1 \neq 0 \quad \| +1$

$x \neq 1$

$2 - x > 0 \quad \| -2$

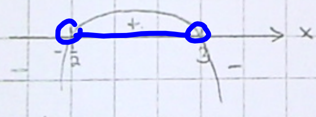
$-x > -2 \quad \| \cdot(-1)$

$x < 2$

$5x + 3 - 2x^2 > 0$

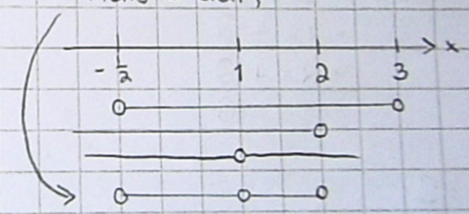
nk:t $5x + 3 - 2x^2 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ tai: $x = 3$



$-\frac{1}{2} < x < 3$

Yhdistetään



V: $-\frac{1}{2} < x < 2$ ja $x \neq 1$

$-\frac{1}{2} < x < 1$ tai $1 < x < 2$

K82/7a

Ratkaisu Alojen summa $A = 2\pi xh + 2\pi x^2$

Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset,
(k) koska $\sphericalangle C$ on yhteinen ja $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 90°$. (k)

Yhdenmuotoisista kolmioista

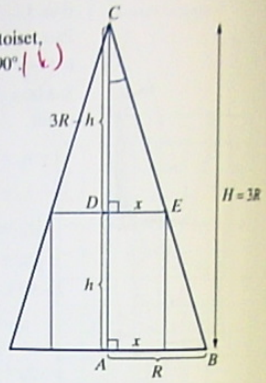
kk-lauseen nojalla

$$\frac{3R-h}{x} = \frac{3R}{R} \quad |\,\text{X}$$

$$3R^2 - Rh = 3Rx$$

$$-Rh = 3Rx - 3R^2 \quad |:(-R)$$

$$h = 3R - 3x$$



Alojen summa

$$A(x) = 2\pi xh + 2\pi x^2$$
$$= 2\pi x(3R - 3x) + 2\pi x^2$$
$$\rightarrow \quad = 6\pi Rx - 4\pi x^2, \; 0 \le x \le R$$

$A(x)$ on derivoituva, kun $0 < x < R$

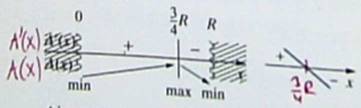
$A'(x) = 6\pi R - 8\pi x$

Derivaatan nollakohta

$$A'(x) = 0$$
$$6\pi R - 8\pi x = 0$$
$$\rightarrow \quad x = \frac{3}{4}R$$

$$\underbrace{-8\pi}_{k} x + \underbrace{6\pi R}_{\text{vakio}} = f(x)$$

Kulkukaavio



Ainoassa maksimissa sijaitsee funktion suurin arvo.

Vastaus: Ala on suurin, kun $x = \frac{3}{4}R$.