K03/ 9. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x > 3$, käänteisfunktio f^{-1}. Millä välillä tämä on määritelty? Osoita laskemalla, että $f^{-1}(f(x)) = x$, kun $x > 3$.

Ratkaisu Funktio f on jatkuva ja $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3} > 1$, kun $x > 3$.

Toisaalta $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \infty$, joten funktion f arvojoukko on $]1, \infty[$.

Siis jos käänteisfunktio on olemassa, sen määrittelyjoukko on väli $]1, \infty[$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = y$, missä $y > 1$ ja $x > 3$:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-3} &= y && | \cdot (x-3) \neq 0 \\
x + 2 &= y(x-3) \\
x + 2 &= yx - 3y \\
x - yx &= -2 - 3y \\
(1-y)x &= -2 - 3y && | : (1-y) \neq 0 \\
x &= \frac{-2-3y}{1-y} = \frac{3y+2}{y-1}
\end{aligned}
$$

Yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu aina, kun $y > 1$.

Siis funktiolla f on käänteisfunktio ja saatu lauseke on käänteisfunktion lauseke:

$$x + 2 = yx - 3y$$
$$x - yx = -2 - 3y$$
$$(1 - y)x = -2 - 3y \qquad | : (1 - y) \neq 0$$
$$x = \frac{-2 - 3y}{1 - y} = \frac{3y + 2}{y - 1}$$

Yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu aina, kun $y > 1$.

Siis funktiolla f on käänteisfunktio ja saatu lauseke on käänteisfunktion lauseke:

$$f^{-1}(y) = \frac{3y + 2}{y - 1},\ y > 1 \text{ eli } f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{x - 1},\ x > 1$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x + 2}{x - 3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{x + 2}{x - 3} + \overset{x-3}{2}}{\frac{x + 2}{x - 3} - \overset{x-3}{1}} = \frac{\frac{3(x + 2) + 2(x - 3)}{x - 3}}{\frac{x + 2 - (x - 3)}{x - 3}}$$

$$= \frac{\frac{3x + 6 + 2x - 6}{x - 3}}{\frac{x + 2 - x + 3}{x - 3}} = \frac{\frac{5x}{x - 3}}{\frac{5}{x - 3}} = \frac{5x}{x - 3} : \frac{5}{x - 3}$$

$$= \frac{\cancel{5}x}{\cancel{x - 3}} \cdot \frac{\cancel{x - 3}}{\cancel{5}} = x$$

Vastaus Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Määrittelyväli on $]1, \infty[$.

K80/2 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

$$\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right)^2 = \left(\frac{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}}{(\sqrt{x} + 1)\cancel{(\sqrt{x} - 1)}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)^2$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1} + 1} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$