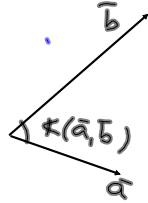


## SKALAARITULO EN PISTETULO

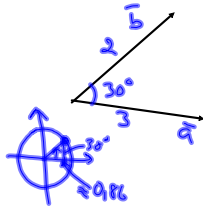
Määritelmä

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ jos jokin on } \vec{0} \text{ tai } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ kanta}$$

esim 1 lasketaan  $\vec{a}$ :n ja  $\vec{b}$ :n pistetulo, kun  $\vec{a}$ :n pituus on 3 ja  $\vec{b}$ :n pituus on 2 ja niiden välinen kulma on  $30^\circ$ .



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\approx 5,2) \end{aligned}$$

vektorin pituus

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

vektorien välinen kulma

$\vec{b}$

$\cos(\vec{a}, \vec{b})$

$\alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$\vec{a}$

esim 2 Määritä vektoreiden  $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  välinen kulma.

Skalaaritulo kannoissa ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ )

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

LASKUVAIT

1. vaihdantolaki:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. jakolaki:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. skalaaritulo rinta-ääntö  
 $(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b}) = r(\vec{a} \cdot \vec{b})$   
 $r = \text{vakio}$

MUISTIKAAVAT

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

esim Olkoon  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$  ja  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$   
 $|\vec{a} + \vec{b}| = ?$

Rattu.

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4$$

$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot |\vec{b}|^2 = 4 + 6\sqrt{2} + 9 = 13 + 6\sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

$$= 2 \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}} \quad (\approx 4,6)$$

## SOVELLUKSIA (3.2)

### Kohtisuunnusehto

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

$$(\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0})$$

oim Tutki, ovatko  
vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$   
kohtisuorassa  
toisiaan vastaan.

a)

$$\begin{array}{l} \bar{a} = 3\bar{i} - 8\bar{j} \\ \bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{j} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 4 + (-8) \cdot 2 \\ = 12 - 16 = -4 \neq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  eivät ole  $\perp$

b)

$$\begin{array}{l} \bar{a} = -\bar{i} + 7\bar{j} \\ \bar{b} = 14\bar{i} + 2\bar{j} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 14 + 7 \cdot 2 \\ = -14 + 14 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  vektorit ovat  
kohtisuorassa  
toisiaan  
vastaan

oim Millä vakion  $t$  avulla  
vektori  $\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + t\vec{k}$  on  
kohtisuoran vektorin  
 $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  vastaan?  
Kuinka pitkä vektori  $\vec{a}$   
on tällöin?

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(-3) \cdot (-2) + (-4) \cdot 3 + t \cdot (-1) = 0$$

$$-6 - t = 0$$

$$t = -6$$

$$\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{61}$$

V:

esim 3 Osoita, että kolmion  
sivunsa olevien samasta  
pisteestä alkavien  
vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$   
välinen kulma on  
tylyppä, kun

$$\vec{a} - 2\vec{b} = 13\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} \text{ ja}$$

$$3\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} + 9\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Mikä on kolmion  
päännän sivun  
pituus?