

## 7. Vektoreiden summa 12 p.

Tarkastellaan vektoreita  $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$  ja  $\bar{v} = \sin(2t)\bar{i} + \cos(4t)\bar{j}$ , missä  $t \geq 0$ .

- Määritä vektori  $\bar{u} + \bar{v}$ , kun  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$  ja  $t = \frac{3\pi}{4}$ . (4 p.)
- Mikä tasokuvio muodostuu vektorin  $\bar{u} + \bar{v}$  kärkipisteestä, kun  $t$  saa arvot välillä  $[0, \pi]$ ? Anna vastaus yhtälönä muodossa  $y = f(x)$ .  
Ratkaisussa voi käyttää esimerkiksi kaavaa  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ . (8 p.)

## 5. Avaruuden vektoreita 12 p.

Tarkastellaan vektoreita

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

- Laske  $\bar{a} - \bar{b}$ . (3 p.)
- Laske  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ . (3 p.)
- Sijaitseeko piste  $(4, 6, 8)$  vektorin  $\bar{a}$  suuntaisella origon kautta kulkevalla suoralla? (6 p.)

## 11. Mitkä vektorit? 12 p.

1. Tason vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 2 \\ 2\bar{a} \cdot \bar{a} + 3\bar{b} \cdot \bar{b} = 5. \end{cases}$$

Määritä vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  pituudet. (5 p.)

2. Osatehtävän 1 vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  toteuttavat lisäksi yhtälöparin

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{\sqrt{11}}{10} \\ \bar{b} \cdot (\sqrt{3}\bar{i} - \bar{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Merkitään vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  välistä kulmaa symbolilla  $\varphi$  ja vektorien  $\sqrt{3}\bar{i} - \bar{j}$  ja  $\bar{b}$  välistä kulmaa symbolilla  $\theta$ . Määritä kulmien  $\varphi$  ja  $\theta$  suuruudet. (5 p.)

3. Määritä kaikki mahdolliset vektorit  $\bar{a}$ , jotka toteuttavat osatehtävien 1 ja 2 ehdot, kun  $\bar{b} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$ . (2 p.)

## 4. Tasokäyrä 12 p.

Tarkastellaan vektoreita  $\vec{v}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t^2}\vec{j}$ , kun  $t > 0$ .

1. Laske pistetulo  $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{v}(3)$ . **(3 p.)**
2. Määritä vektorin  $\vec{v}(3)$  pituus. **(2 p.)**
3. Millä muuttujan  $t > 0$  arvolla vektori  $\vec{v}(t)$  on mahdollisimman lyhyt? **(7 p.)**

Tällaista jatkuvaa vektoriarvoista funktiota kutsutaan *käyrän parametrisoinniksi*.

## 2. Vektoreita ja analyyttistä geometriaa

12 p.

Olkoon  $\bar{u} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$ .

1. Määritä vektorin  $\bar{u}$  pituus. (3 p.)
2. Määritä vektorin  $\bar{u}$  kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 5. (3 p.)
3. Suora  $L$  kulkee pisteiden  $A = (4, 4)$  ja  $B = (-1, -8)$  kautta. Ovatko suora  $L$  ja vektori  $\bar{u}$  yhdensuuntaisia? (3 p.)
4. Määritä suoran  $L$  yhtälö muodossa  $y = kx + b$ . (3 p.)

## 6. Vesijohto (12 p.)

Kolmiulotteinen koordinaatisto on valittu niin, että maanpinta on  $xy$ -tasossa ja pituusyksikkönä on metri. Maan alla oleva vesijohto kulkee pisteestä  $(0, 0, -2)$  vektorin  $3\bar{i} + 4\bar{j}$  suuntaan yhteensä 3 metriä. Sen jälkeen vesijohto täytyy liittää yhdysputken avulla runkoputkeen, joka kulkee pisteen  $(4, 4, -3)$  kautta vektorin  $-2\bar{i} + 3\bar{j}$  suuntaan. Kuinka pitkä yhdysputken on vähintään oltava, jotta se riittää yhdistämään tämän vesijohdon runkoputkeen?

Kevät 2020

Tehtävä 2 monivalintatehtävä

Syksy 2019

### 3. Pistetulo (12 p.)

Määritä kaikki tason vektorit  $\bar{u}$ , jotka toteuttavat ehdot

$$\left(\frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}\right) \cdot \bar{u} = 3 \quad \text{ja} \quad \bar{u} \cdot \bar{u} = 25.$$