Napier John

1. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

1.1 Funktion raja-arvo

Rajaton läheneminen

$e^1 = e$

esim.1. Luku e = 2,718281828… on irrationaalinen.
Löytyy mielivaltaisen tarkka rationaalinen likiarvo. Luvun e rationaaliset likiarvot lähenevät rajattomasti lukua e, kun oikeiden desimaalien lukumäärä kasvaa rajattomasti.

irrationaalinen
Neperin luku
laskin e $\boxed{2nd}$ $\boxed{\div}$ ↵
e^1 $\boxed{2nd}$ $\boxed{ln}$ ↵

$e_1 = 2,7$

$e_2 = 2,72$

$e_3 = 2,718$

$e_4 = 2,7183$

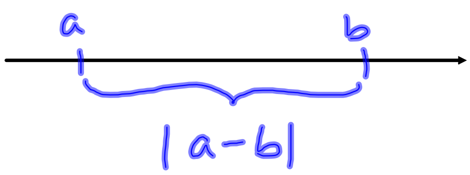
$e_1 =$
$e_2 =$
$e_3 =$
$e_4 =$

Poikkeama

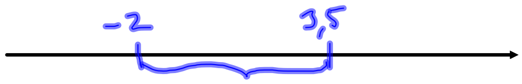
Reaalilukujen a ja b välinen poikkeama on niiden vastinpisteiden välinen etäisyys lukusuoralla eli $|a-b|$.

$|a-b|$

Lukusuora



esim Kuinka paljon luku 3,5 poikkeaa luvusta −2 ?



$|-2-3,5| = |-5,5| = 5,5$

$|3,5-(-2)| = |5,5| = 5,5$

esim.2. Kuinka paljon luku 3,5 poikkeaa luvusta -2.

$|-2-3{,}5| = |-5{,}5| = 5{,}5$

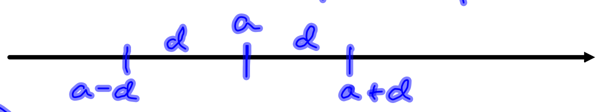
Ympäristö

Reaaliluvun a ympäristö on sellainen avoin väli, jonka keskipiste on a. Toisin sanoen (Ts.) a:n ympäristö on avoin väli]a - d , a + d[, missä d > 0. Luku d on tämän ympäristön säde. Luku x kuuluu tähän ympäristöön, jos ja vain (jos) jos se poikkeaa luvusta a vähemmän kuin d:n verran. Toisin sanoen (Ts.) x ~~∈]a -~~ d ~~, a + d[jos~~ ja vain jos $|x-a|<d$.

$x \in]a-d, a+d[$

$|x-a|<d$.

Lukusuora



esim. 3. Luvun 3 0,005-säteinen ympäristö on]3-0,005, 3+0,005[=]2,995;3,005[.

$|x-3|<0{,}005$

$|x-3|<0{,}005$

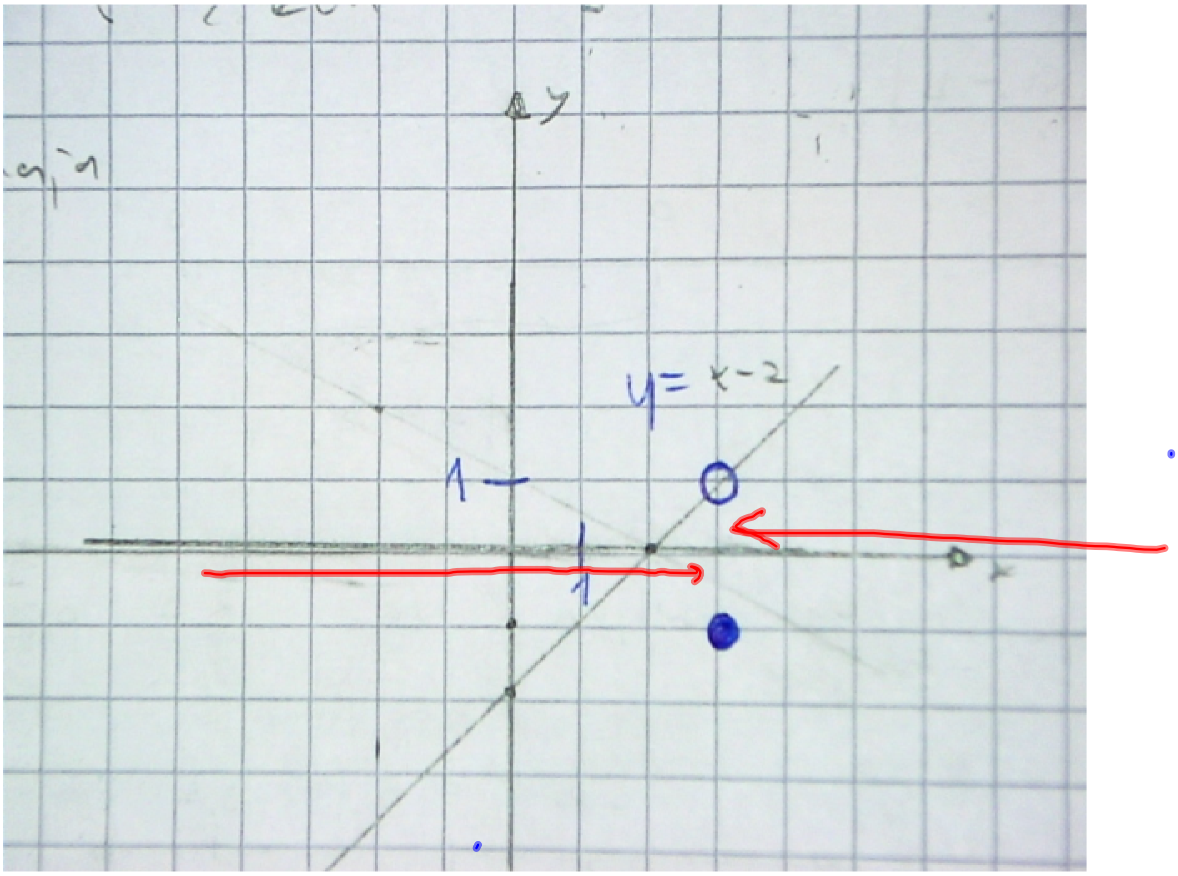
Raja-arvon tutkiminen numeerisesti ja graafisesti

esim. 4. f(x)= $\begin{cases} x-2, \text{ kun } x \neq 3 \\ -1, \text{ kun } x = 3 \end{cases}$

$f(x) \begin{cases} x-2, \text{ kun } x \neq 3 \\ -1, \text{ kun } x = 3 \end{cases}$

funktion arvot

x	f(x)	x	f(x)
2,9	0,9	3,1	
2,99	0,99	3,01	
2,999	0,999	3,001	


y
y = x - 2
1
1
x

esim. 4. f(x)= { $\begin{array}{l} x-2, \text{ kun } x \neq 3 \\ -1, \text{ kun } x = 3 \end{array}$

x	f(x)	x	f(x)
2,9	0,9	3,1	1,1
2,99	0,99	3,01	1,01
2,999	0,999	3,001	1,001

Funktion f raja-arvo kohdassa x = 3 on 1. !

Merkitsemme

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ tai $f(x) -> 1$, kun $x -> 3$

!

$$\boxed{\lim_{x \to 3} f(x) = 1 \quad \text{tai}}$$

$f(x) \to 1$, kun $x \to 3$

Funktion f raja-arvo kohdassa x = 3 on eri suuri kuin funktion arvo tässä kohdassa, sillä $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ ja f(3) = -1.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos funktion f arvot saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a aina, kun muuttujan x ($\neq$ x_0) arvot valitaan tarpeeksi läheltä lukua x_0.

Tällöin merkitään

$\cancel{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ tai } f(x) \to a, \text{ kun } x \to x_0}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

!

TAI

$f(x) \to a$, kun $x \to x_0$