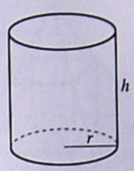
Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen kanneton litran mitta. Suunnittele lieriön mitat (pohjan halkaisija ja korkeus) niin, että peltiä tarvitaan mahdollisimman vähän.

Ratkaisu

Merkitään lieriön pohjan sädettä r ja lieriön korkeutta h. Tarvittavan pellin määrä on lieriön pohjan pinta-alan πr^2 ja vaipan pinta-alan $2\pi r \cdot h$ summa:

$A = \pi r^2 + 2\pi rh.$



Yhteys muuttujien r ja h välille saadaan lieriön tilavuudesta.
Koska $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$, valitaan yksiköksi desimetri.
Lieriön tilavuus $1\ \text{dm}^3$ on pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo, joten

$\pi r^2 h = 1.$

Valitaan muuttujaksi r. Ratkaistaan yhtälöstä h.

$$\pi r^2 h = 1 \qquad | : \pi r^2$$

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

... $A = \pi r^2 + 2\pi rh$ muuttujan r funktiona on

Yhteys muuttujien r ja h välille saadaan lieriön tilavuudesta.
Koska $1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{dm}^3$, valitaan yksiköksi desimetri.
Lieriön tilavuus $1\ \mathrm{dm}^3$ on pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo, joten

$\pi r^2 h = 1.$

Valitaan muuttujaksi r. Ratkaistaan yhtälöstä h.

$$\pi r^2 h = 1 \quad | : \pi r^2$$
$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Tarvittavan pellin määrä $A = \pi r^2 + 2\pi r h$ muuttujan r funktiona on

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

Lieriön pohjan säteen suuruus voi olla mikä tahansa positiivinen luku.
Funktion $A(r)$ määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

$$2\pi r^3 = 2$$

$$r^3 = \frac{1}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \quad (\approx 0{,}683)$$

Laaditaan derivaattafunktion $A'(r) = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $A(r)$ kulkukaavioksi. Derivaattafunktion lausekkeen nimittäjä r^2 on määrittelyjoukossa positiivinen. Derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $2\pi r^3 - 2$.

$2\pi \cdot 0{,}5^3 - 2 \approx -1{,}2 < 0$

$2\pi \cdot 1^3 - 2 \approx 4{,}3 > 0$

	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	
$A'(r) = \frac{2\pi r^3 - 2}{r^2}$		$-$		$+$
$A(r)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Kulkukaavion mukaan funktio $A(r)$ saa määrittelyjoukossaan pienimmän arvon kohdassa $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0{,}683$.

Peltiä kuluu vähiten, kun lieriön pohjan halkaisija on

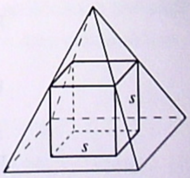
$2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 1{,}37$ (dm) ja lieriön korkeus

$h = \frac{1}{\pi r^2} \approx \frac{1}{\pi \cdot 0{,}683^2} \approx 0{,}68$ (dm).

s pohjan halkaisija 13,7 cm ja korkeus 6,8 cm

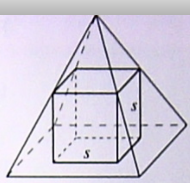
KKI 2

Kuution muotoisen säiliön suojaksi rakennetaan säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen katos. Kuution särmän pituus on s. Suunnittele katoksen mitat niin, että katoksen tilavuus on mahdollisimman pieni.



SMART Document Camera

... suojaksi rakennetaan säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen katos. Kuution särmän pituus on s. Suunnittele katoksen mitat niin, että katoksen tilavuus on mahdollisimman pieni.

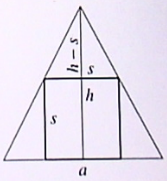


Pyramidin tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja pyramidin korkeuden tulosta. Merkitään pyramidin pohjasivun pituutta a ja pyramidin korkeutta h:

$$V = \frac{1}{3}a^2h.$$

Yhteys muuttujien a ja h välille saadaan yhdenmuotoisista kolmioista. Leikataan pyramidi tasolla, joka kulkee huipun ja kahden vastakkaisen pohjasärmän keskipisteen kautta.

Leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. Ylös muodostuva pikkukolmio on yhdenmuotoinen koko kolmion kanssa.



Kolmioiden korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin kantojen pituuksien suhde:

$$\frac{h-s}{h} = \frac{s}{a}$$ Valitaan muuttujaksi a. Ratkaistaan yhtälöstä h.

$$a(h-s) = sh$$ Yhtälö kerrottiin ristiin.

$$ah - as = sh$$

$$ah - sh = as$$

$$(a-s)h = as \qquad \Big| : (a-s)$$

$$h = \frac{as}{a-s}$$

Pyramidin tilavuus $V = \frac{1}{3}a^2h$ muuttujan a funktiona on

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{as}{a-s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{sa^3}{a-s}.$$

Pyramidin pohjasärmän pituus voi olla mikä tahansa kuution särmän pituutta s suurempi luku. Funktion V

SMART Document Camera

$$V(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{as}{a-s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{sa^3}{a-s}.$$

Pyramidin pohjasärmän pituus voi olla mikä tahansa kuution särmän pituutta s suurempi luku. Funktion V määrittelyjoukko on $]s, \infty[$.

Funktion $V(a)$ lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{1}{3}s\frac{a^3}{a-s}$.

Lausekkeessa on muuttujan a lauseke $\frac{a^3}{a-s}$ kerrottuna luvulla $\frac{1}{3}s$.

Koska kertoja $\frac{1}{3}s$ on positiivinen, funktion $V(a)$ arvo on pienin silloin, kun funktion $f(a) = \frac{a^3}{a-s}$ arvo on pienin. Määritetään välin $]s, \infty[$ kohta, jossa funktio $f(a)$ saa pienimmän arvon.

Laaditaan funktion $f(a)$ kulkukaavio.

Derivoidaan.

$$f'(a) = \frac{3a^2 \cdot (a-s) - a^3 \cdot 1}{(a-s)^2} = \frac{3a^3 - 3sa^2 - a^3}{(a-s)^2} = \frac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2a^3-3sa^2}{(a-s)^2}=0$$

$$2a^3-3sa^2=0$$

$$a^2(2a-3s)=0$$

$$a^2=0 \text{ tai } 2a-3s=0$$

$$a=0 \text{ tai } \quad a=\frac{3}{2}s$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(a)=\dfrac{2a^3-3sa^2}{(a-s)^2}$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi. Derivaattafunktion nimittäjä $(a-s)^2$ on määrittelyjoukossa positiivinen, joten derivaattafunktion merkin määrää osoittaja $2a^3-3sa^2$.

$a=2s$: $2\cdot(2s)^3-3\cdot s\cdot(2s)^2=16s^3-12s^3=4s^3>0$

$a=1{,}2s$: $2\cdot(1{,}2s)^3-3\cdot s\cdot(1{,}2s)^2=(2\cdot1{,}2^3-3\cdot1{,}2^2)s^3=-0{,}864s^3<0$

$s \quad \frac{3}{2}s$

merkin määrää osoittaja $2a^3 - 3sa^2$.

$a = 2s$: $2 \cdot (2s)^3 - 3 \cdot s \cdot (2s)^2 = 16s^3 - 12s^3 = 4s^3 > 0$

$a = 1{,}2s$: $2 \cdot (1{,}2s)^3 - 3 \cdot s \cdot (1{,}2s)^2 = (2 \cdot 1{,}2^3 - 3 \cdot 1{,}2^2)s^3 = -0{,}864s^3 < 0$

	s	$\frac{3}{2}s$	
$f'(a) = \dfrac{2a^3 - 3sa^2}{(a-s)^2}$	$-$		$+$
$f(a)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Funktion f arvo on pienin, kun $a = \frac{3}{2}s$.

Hukkatilaa jää vähiten, kun pyramidin pohjasärmän pituus on $\frac{3}{2}s$ ja pyramidin korkeus on

$$h = \frac{as}{a-s} = \frac{\frac{3}{2}s \cdot s}{\frac{3}{2}s - s} = \frac{\frac{3}{2}s^2}{\frac{1}{2}s} = 3s.$$

pohjasärmä $\frac{3}{2}s$, korkeus $3s$