Lukion Calculus 4

MAA7 Derivaatta
MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot

Paavo Jäppinen Alpo Kupiainen Matti Räsänen
Otava

Opettajan aineisto

Sisällys

1. painos

Taitto: Paavo Jäppinen

Painopaikka:
Otavan Kirjapaino Oy
Keuruu 2006
ISBN-13: 978-951-1-20311-7
ISBN-10: 951-1-20311-8

Alkusanat

Tämä aineisto liittyy pitkän matematiikan oppikirjaan **Lukion Calculus 4**:ään, ja se on tarkoitettu helpottamaan opettajan työtä ja nopeuttamaan tehtäviin tutustumista. Aineisto sisältää kurssien **Derivaatta** ja **Juuri- ja logaritmifunktiot** tehtävien ratkaisuja.

Lähes kaikkien tehtävien ratkaisut on esitetty. Mukaan ei kuitenkaan ole otettu aivan kaikkein helpoimpia tehtäviä, joissa harjoitellaan vain käsitteiden käyttöä ja jotka ovat melko mekaanisia. Sitä vastoin kaikki soveltamista, analysointia tai todistamista edellyttävät tehtävät on ratkaistu.

Tehtävien ratkaisuihin on pyritty liittämään sanallista selvitystä ja havainnollistavia piirroksia. Tavoitteena on, että myös oppilaat tottuvat esittämään tarpeelliset perustelut ja laatimaan vastauksensa niin, että siitä käy ilmi, miten ratkaisu on ajateltu. Tämä edellyttää usein juuri täydentävän sanallisen selvityksen ja selkeiden piirrosten käyttöä.

Huhtikuussa 2006
Tekijät

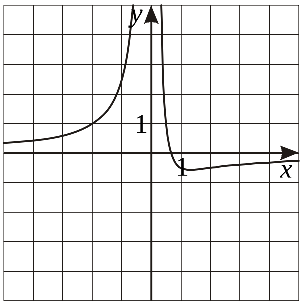
Tehtävien ratkaisuja Derivaatta

Rationaalifunktio

1 Rationaalifunktio

6. Funktio $f(x) = 1 - \dfrac{3 - x^3}{x^2 + tx + 1}$ on kaikkialla määritelty, jos nimittäjällä ei ole nollakohtia. Nollakohtia ei ole, kun diskriminantti $D = t^2 - 4 < 0$ eli kun $-2 < t < 2$.

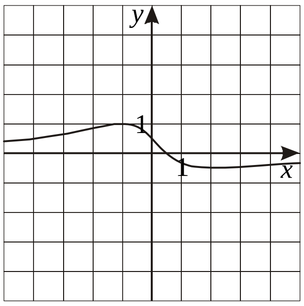
7. **a)** $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{2x^2}$



Määrittelyjoukko $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Nollakohdat $x = \dfrac{2}{3}$

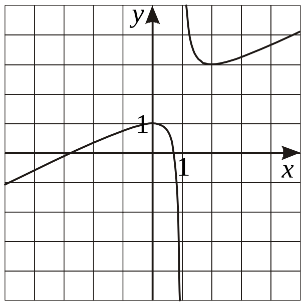
b) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x^2 + 2}$



Määrittelyjoukko $\mathbf{R}$

Nollakohdat $x = \dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{2x - 2}$



Määrittelyjoukko $\mathbf{R} \setminus \{1\}$

Nollakohdat $x = -1 \pm \sqrt{3}$

2 Rationaaliyhtälö

13. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{x - 1}$, $x \neq 0; 1$ Yhtälö sievenee muotoon $4x^2 - 9x + 2 = 0$, josta $x = 2$ tai $x = \dfrac{1}{4}$.

14. Funktion $f(x) = (2 + \dfrac{1}{x})(4 - \dfrac{3}{x})$ nollakohdat $x = -\dfrac{1}{2}$ ja $x = \dfrac{3}{4}$ ratkeavat tulon nollasäännön mukaan yhtälöistä $2 + \dfrac{1}{x} = 0$ ja $4 - \dfrac{3}{x} = 0$. Funktion arvoa koskeva ehto $(2 + \dfrac{1}{x})(4 - \dfrac{3}{x}) = 7$ ($x \neq 0$) saadaan muotoon $x^2 - 2x - 3 = 0$, josta $x = -1$ tai $x = 3$.

15. Luku 1 on yhtälön $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-a}$ juuri, kun $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1}=\frac{1}{1-a}$, $a \neq \pm 1$. Kun yhtälö kerrotaan binomilla $1 - a^2$, saadaan $1-a-1+a^2=1+a$, josta $a^2-2a-1=0$ ja $a=1\pm\sqrt{2}$.

16. Alun perin ilmoittautui x oppilasta, jolloin kustannus oli $\frac{720}{x}$ euroa oppilasta kohti. Kun neljä oppilasta jäi pois, kustannus oppilasta kohti oli ($\frac{720}{x}$ + 2) € eli $\frac{720}{x-4}$ €. Yhtälö $\frac{720}{x}+2=\frac{720}{x-4}$ sievenee muotoon $x^2-4x-1440=0$. Sen ratkaisut ovat $x=40$ tai $x=-36$. Alun perin oppilaita ilmoittautui 40.

17. Olkoon (keski)nopeus menomatkalla v (km/h) ja paluumatkalla v + 15, jolloin meno-aika oli $\frac{150}{v}$ (h) ja paluuaika $\frac{150}{v+15}$. Paluuaika oli 20 min = $\frac{1}{3}$ h lyhyempi, joten $\frac{150}{v}-\frac{1}{3}=\frac{150}{v+15}$. Yhtälö sievenee muotoon $v^2+15v-6\,750=0$, josta v = 75 tai v = –90. Nopeus paluumatkalla oli siis (75 + 15) km/h = 90 km/h.

18. Merkitään lukuja kirjaimilla x ja y. Tällöin on $x+y=15$ ja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{26}$, $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Sijoitetaan edellisestä yhtälöstä $y=15-x$ $(\neq 0)$ jälkimmäiseen, joka sitten sievenee toisen asteen yhtälöksi $x^2-15x+26=0$. Sen juuret ovat $x=2$ tai $x=13$, jolloin $y=13$ tai $y=2$. Luvut ovat 2 ja 13.

3 Rationaaliepäyhtälö

24. Funktio $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$ on määritelty, kun $\frac{2x-1}{2x+1}\geq 0$. Merkkikaaviosta saadaan ratkaisu $x<-\frac{1}{2}$ tai $x\geq\frac{1}{2}$.

$2x$ - 1	–	–	+
$2x$ + 1	–	+	+
osamäärä	+	–	+

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

25. Tutkitaan lausekkeen $\frac{x-5}{x+3}$ merkkiä. Ehto on $x+3\neq 0$ eli $x\neq -3$. Merkkikaaviosta nähdään, että $\frac{x-5}{x+3}<0$, kun $-3<x<5$, ja $\frac{x-5}{x+3}\geq 0$, kun $x<-3$ tai $x\geq 5$. Annettu yhtälö

x - 5	–	–	+
x + 3	–	+	+
osamäärä	+	–	+

-3 5

$\left|\dfrac{x-5}{x+3}\right| = \dfrac{x-5}{x+3}$ toteutuu itseisarvon määritelmän nojalla tarkalleen silloin, kun $\dfrac{x-5}{x+3} \geq 0$ eli arvoilla $x < -3$ tai $x \geq 5$.

26. **a)** $\dfrac{8-x^2}{x^2-4} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2-4} \geq 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $x^2 - 4 > 0$ tai $x^2 = 0$ eli kun $x < -2$ tai $x > 2$ tai $x = 0$.

b) $\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{2x-x^2} > 0$. Osoittajan nollakohta on $x = 1$, nimittäjän $x = 0$ ja $x = 2$. Merkkikaaviosta saadaan tulos $x < 0$ tai $1 < x < 2$.

		0		1		2	
$2x - 2$	–		–		+		+
$2x - x^2$	–		+		+		–
osamäärä	+		–		+		–

c) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+3x+9}{6x(x+3)} > 0$.

Osoittajan nollakohdat ovat $x = -1\frac{1}{2}$ ja $x = 3$, nimittäjän $x = 0$ ja $x = -3$. Merkkikaaviosta saadaan tulos $-3 < x < -1\frac{1}{2}$ tai $0 < x < 3$.

		-3		$-1\frac{1}{2}$		0		3	
$-2x^2 + 3x + 9$	–		–		+		+		–
$6x(x + 3)$	+		–		–		+		+
osamäärä	–		+		–		+		–

27. **a)** Määrittelyehto on $x \neq 0$. Kerrotaan epäyhtälö $\dfrac{1}{x^2} < 0{,}01$ arvoltaan positiivisella lausekkeella $100x^2$, jolloin saadaan yhtäpitävä epäyhtälö $x^2 > 100$. Sen ratkaisu on $x < -10$ tai $x > 10$.

b) Kerrotaan epäyhtälö $\dfrac{6x}{x^2+9} < 1$ arvoltaan positiivisella lausekkeella $x^2 + 9$, jolloin saadaan yhtäpitävä epäyhtälö $6x < x^2 + 9$ eli $(x-3)^2 > 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $x \neq 3$.

c) Määrittelyehto on $x \neq -2$. Kerrotaan epäyhtälö $\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \geq 1$ arvoltaan positiivisella lausekkeella $(x+2)^2$, jolloin saadaan yhtäpitävä epäyhtälö $x^2 \geq (x+2)^2$. Sen ratkaisu on $x \leq -1$. Vastauksessa tähän on liitettävä määrittelyehto $x \neq -2$.

28. Jos työntekijöiden määrä on x ja työn kestoaika y, niin $y = \dfrac{k}{x}$, jossa k on vakio. Työntekijämäärällä $x+2$ työn valmistumisaika on enintään $0{,}9y$. Saadaan epäyhtälö $\dfrac{k}{x+2} \leq 0{,}9 \cdot \dfrac{k}{x}$, jossa $x > 0$. Ratkaisuksi saadaan $x \leq 18$, joten työntekijöitä oli alun perin suunniteltu ottaa enintään 18.

Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

1 Funktion raja-arvo

32. **a)** $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x^2 - x}$. Alla oleva tutkimus viittaa tulokseen –3.

Lähestyminen vasemmalta

x	$f(x)$
–0,1	–2,5
–0,01	–2,941176
–0,001	–2,994012
–0,0001	–2,999400

Lähestyminen oikealta

x	$f(x)$
0,1	–3,75
0,01	–3,061224
0,001	–3,006012
0,0001	–3,000600

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. Alla oleva tutkimus viittaa tulokseen 12.

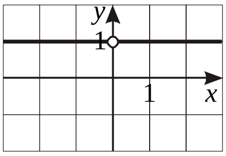
Lähestyminen vasemmalta

x	$f(x)$
1,9	11,410000
1,99	11,940100
1,999	11,994001
1,9999	11,999400

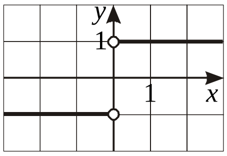
Lähestyminen oikealta

x	$f(x)$
2,1	12,610 000
2,01	12,060100
2,001	12,006001
2,0001	12,000600

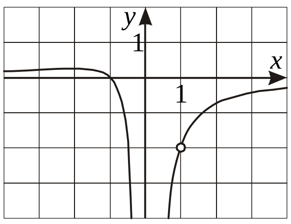
34. **a)** $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$



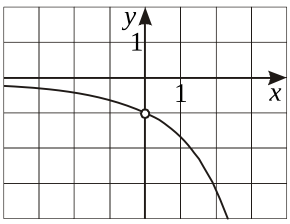
b) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ ei ole olemassa



35. **a)** $\lim_{x\to 1} (1 - \frac{1}{x^2}) : (1 - x) = -2$



b) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1$



36. **a)** $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} - 3}$. Alla oleva tutkimus viittaa tulokseen 2.

Lähestyminen vasemmalta

x	$f(x)$
2,9	1,983192
2,99	1,998332
2,999	1,999833
2,9999	1,999983

Lähestyminen oikealta

x	$f(x)$
3,1	2,016530
3,01	2,001665
3,001	2,000167
3,0001	2,000017

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{9^x - 1}$. Alla oleva tutkimus viittaa tulokseen 0,5.

Lähestyminen vasemmalta

x	$f(x)$
–0,1	0,527438
–0,01	0,502747
–0,001	0,500275
–0,0001	0,500027

Lähestyminen oikealta

x	$f(x)$
0,1	0,472562
0,01	0,497253
0,001	0,499725
0,0001	0,499973

37. **a)** $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa

c) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

2 Raja-arvon muodostamissääntöjä

38. **a)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 4x}{2x} = \dfrac{1-4}{2} = -\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{2x} = \dfrac{0}{8} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 4x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-4)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-4}{2} = -2$

39. **a)** $\lim\limits_{x\to -3} (-3x - x^2) = 9 - 9 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 2,5} \sqrt{9-2x} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

40. **a)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x(x+1) = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{8-4x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{-4(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

41. **a)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+2) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} (x+1) = 4$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{0}{4} = 0$

42. **a)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x}+3}{3}=2$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-1-x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{-1}=-2$

43. **a)** $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0+}1=1$ **b)** $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to0-}(-1)=-1$

c) Edellisten, toisistaan eroavien tulosten nojalla $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ ei ole olemassa.

44. **a)** $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ ei siis ole olemassa.

b) Funktiolla $f(x)=\begin{cases}-x+2, \text{ kun } x\le1,\\ 2x^2+t, \text{ kun } x>1,\end{cases}$ on raja-arvo kohdassa 1 tarkalleen silloin,

kun $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$ eli ehdolla 1 = 2 + *t*. Tästä *t* = –1.

45. **a)** Funktio $f(x)=\sqrt{x-2}$ on määritelty arvoilla $x\ge2$. $\lim\limits_{x\to2+}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=0$

b) Funktio $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ on määritelty välillä $-1\le x\le1$. $\lim\limits_{x\to1-}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-1}=0$

c) Funktio $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ on määritelty, kun $x\le0$ tai $x\ge3$. Kohdassa 3 ei ole vasemmanpuolista raja-arvoa, joten $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-3x}$ ei ole olemassa.

46. **a)** $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^2+6x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x(x+6)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}(x+6)=6$

b) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x^2+6x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x(x+6)}{-x}=\lim\limits_{x\to0-}((-(x+6))=-6$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+6x}{|x|}$ ei ole olemassa, koska toispuoliset raja-arvot kohdassa *x* =0 eivät ole samat.

47. **a)** $\lim\limits_{x\to0+}(x+|x|)=\lim\limits_{x\to0+}2x=0$ ja $\lim\limits_{x\to0-}(x+|x|)=\lim\limits_{x\to0-}(x-x)=\lim\limits_{x\to0-}0=0$, joten $\lim\limits_{x\to0}(x+|x|)=0$.

b) Arvoilla $x>1$ lauseke on määritelty.

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2(x+4)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sqrt{x+4}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|\sqrt{x+4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x\sqrt{x+4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}(-\sqrt{x+4})=-2$

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|\sqrt{x+4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\sqrt{x+4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x+4}=2$

Koska $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2}}{x}$, raja-arvo ei ole olemassa.

48. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{\frac{2}{x}}-1}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{\frac{2}{x}}-1)(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)}{(2-x)(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2-x}{x}}{(2-x)(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x(\sqrt{\frac{2}{x}}+1)}=\dfrac{1}{4}$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\dfrac{0}{2}=0$

50. **a)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(2+h)-2-(6-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3=3$

51. **a)** Janan kulmakerroin on $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{t^2-1}{t-1}=t+1,\ t\neq 1.$

b) Kun $t = 2$, kulmakerroin on $2+1=3$.

c) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-1}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t+1)}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}(t+1)=2$

52. Lauseke $\dfrac{x^2-x+a}{x+a}$ supistuu polynomiksi, jos $x + a$ on osoittajan tekijä. Tällöin $-a$:n tulee olla osoittajan nollakohta eli $a^2+a+a=0$. Tästä $a = 0$ tai $a = -2$. Edellisessä tapauksessa $\dfrac{x^2-x}{x}=x-1\to -1$, kun $x\to 0$. Jälkimmäisessä tapauksessa

$\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1\to 3$, kun $x\to 2$.

53. **a)** $s(2)=10\cdot 2-2^2=16$. Kappaleen sijainti on 16 m lähtökohdasta mitattuna.

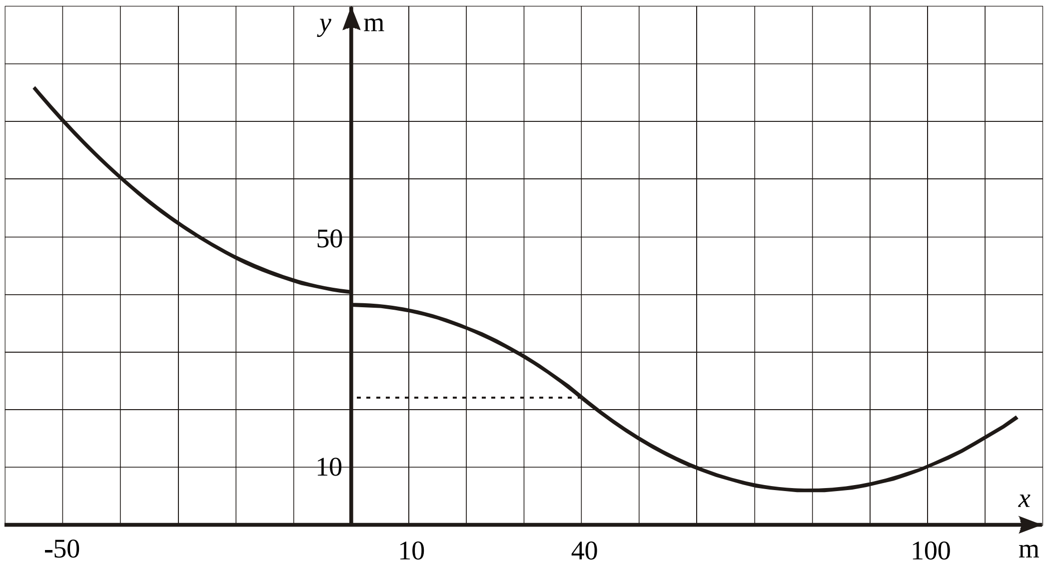
b) Keskinopeus on $v_k=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(4)-s(2)}{4-2}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}=\dfrac{24-16}{2}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}=4\ \text{m/s}$. (Kappale etenee samaan suuntaan aina hetkeen $t=5\ \text{s}$ saakka. Silloin kappaleen etäisyys alkukohdasta on suurimmillaan.)

c) $v_k=\dfrac{s(t)-s(2)}{t-2}=\dfrac{10t-t^2-16}{t-2}=\dfrac{-(t-2)(t-8)}{t-2}=8-t$

$$\lim_{t\to 2}\frac{10t-t^2-16}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{-(t-2)(t-8)}{t-2}=\lim_{t\to 2}(8-t)=6$$

Keskinopeuden raja-arvo ilmoittaa hetkellisen nopeuden. Kappaleen nopeus hetkellä $t = 2$ s on sen mukaan 6 m/s.

54. $f(x)=\begin{cases}0{,}01(x-5)^2+40, \text{ kun } -55\le x\le 0\\ -0{,}01x^2+38, \text{ kun } 0<x\le 40\\ 0{,}01(x-80)^2+6, \text{ kun } 40<x\le 115\end{cases}$



Koska $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(0{,}01(x-5)^2+40)=40{,}25$ ja
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(-0{,}01x^2+38)=38$, niin $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.
Koska $\lim\limits_{x\to 40-} f(x)=\lim\limits_{x\to 40-}(-0{,}01x^2+38)=22$ ja
$\lim\limits_{x\to 40+} f(x)=\lim\limits_{x\to 40+}(0{,}01(x-80)^2+6)=22$, niin $\lim\limits_{x\to 40} f(x)=22$.

3 Funktion jatkuvuus

57. **a)** Funktio on määritelty kohdassa $x = 4$ ja $f(4)=4+a$. Jatkuvuuden ehtona on, että raja-arvo on olemassa eli $\lim\limits_{x\to 4-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4+} f(x)$, josta saadaan yhtälö $4+a=16-11$.
Arvolla $a=1$ jatkuvuusehto kohdassa $x=4$ toteutuu, sillä silloin sekä raja-arvo että funktion arvo ovat samat.

b) Kohdassa $x=a$ tulee funktion arvon ja raja-arvon olla samoja. Funktion arvo on $1-2a$, ja raja-arvo on olemassa ehdolla $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ eli $a-1=1-2a$. Saadaan $a=\frac{2}{3}$, jolloin sekä raja-arvo että funktion arvo ovat samat eli $-\frac{1}{3}$.

c) Funktio on polynomifunktiona jatkuva, kun $x \neq a$. Kohdassa $x = a$ funktio on jatkuva, jos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eli $\frac{1}{2}a + \frac{3}{2} = a^2 - 2a - 2$. Ehdon toteuttavat $a = -1$ ja $a = 3\frac{1}{2}$. Tällöin funktio on kaikkialla jatkuva.

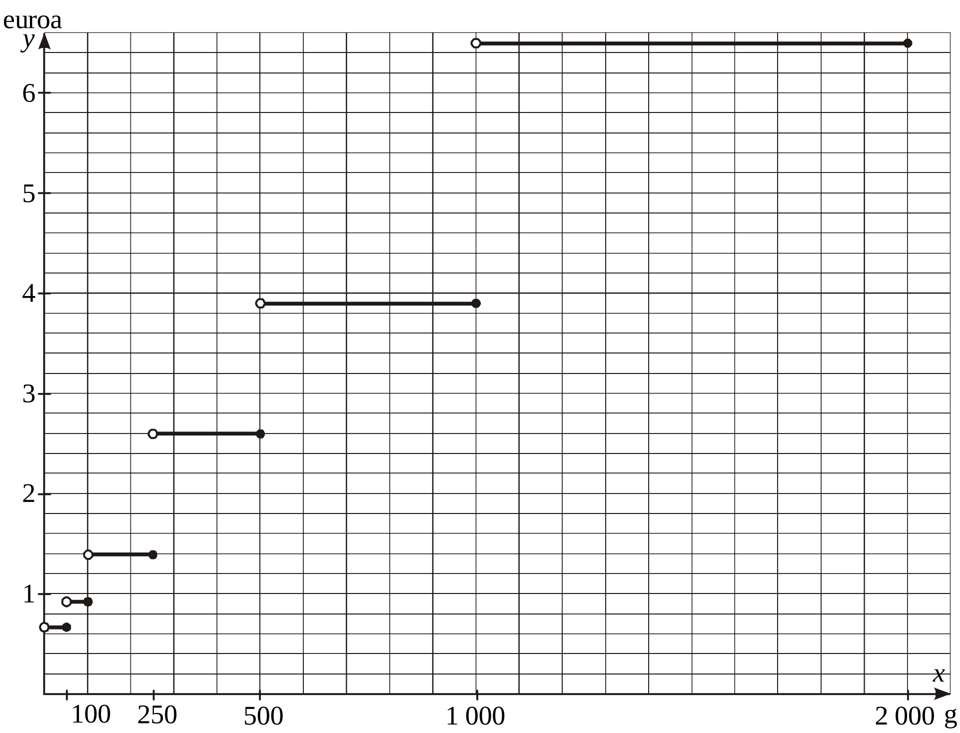
58. $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{3x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$. Jatkuvuus kohdassa $x = 2$ saavutetaan määrittelemällä $f(2) = \frac{1}{6}$.

59. **a)** $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-4)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-4}{2} = -2 \neq f(0) = 2$. Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 0$.

b) $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 3{,}25^x = 1 = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (\sqrt{x} + 1)$. Siis $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Koska myös $f(0) = 1$, funktio on jatkuva kohdassa $x = 0$.

c) $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 2^{x/2} = 2 = \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (4x)^{1/3} = 8^{1/3}$. Siis $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$. Koska myös $f(2) = 8^{1/3} = 2$, funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$.

60.



Postimaksua esittävä funktio on epäjatkuva kohdissa 50, 100, ..., 2 000. Se on näissä kohdissa vasemmalta jatkuva, sillä esimerkiksi $\lim_{x\to 50-} f(x) = f(50)$.

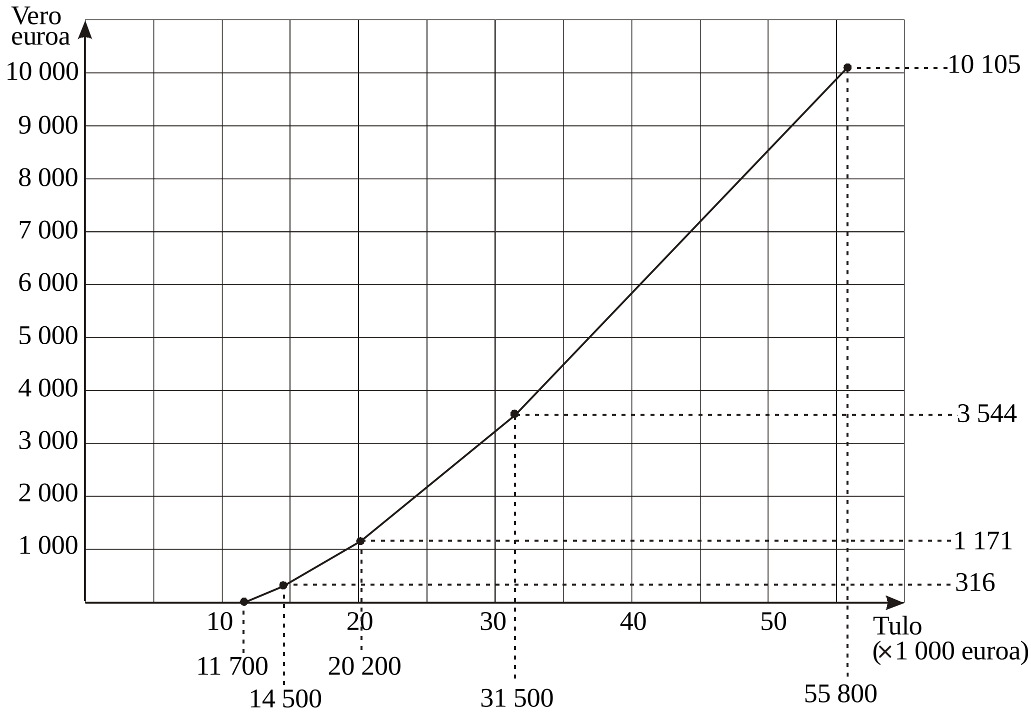
61. Ratkaisu on esitetty seuraavalla sivulla.

62. Funktio $f(x) = \frac{2x}{3x + 4a}$ on jatkuva välillä $[-2, 6]$ silloin, kun nimittäjän nollakohta $x = -\frac{4a}{3}$ ei ole tällä välillä. Näin on, kun $-\frac{4a}{3} < -2$ tai $-\frac{4a}{3} > 6$. Näistä $a > \frac{3}{2}$ tai $a < -4\frac{1}{2}$.

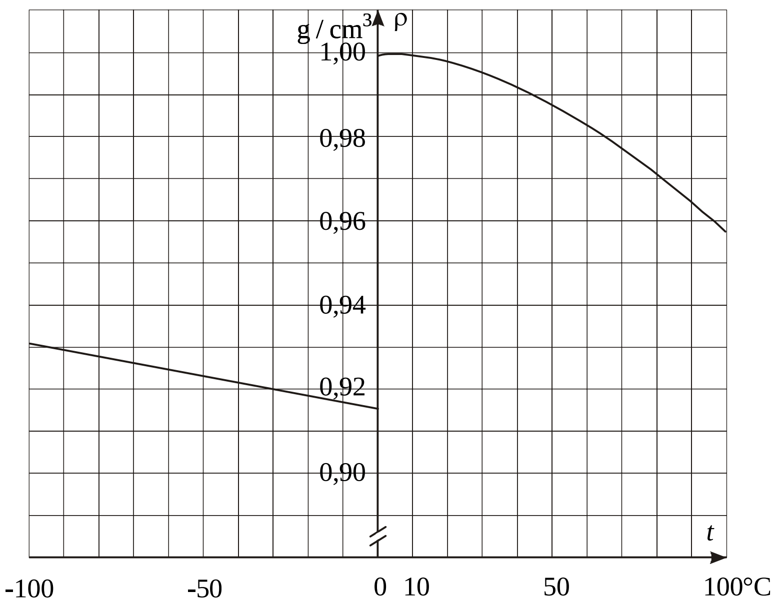
61. $x = 8 + 0{,}11 \cdot (14\,500 - 11\,700) = 316$

$1171 + 0{,}21 \cdot (y - 20\,200) = 3\,544$, josta $y = 31\,500$

$3\,544 + \dfrac{z}{100}(55\,800 - 31\,500) = 10\,105$, josta $z = 27$



***63.** Veden (ja jään) tiheyden riippuvuus lämpötilasta on esitetty graafisesti alla olevassa kuvassa. Kuvaaja katkeaa kohdassa $t = 0\,°C$. Samoin kohdassa $t = 100\,°C$ on epäjatkuvuuskohta, sillä vesihöyryn tiheys (normaalipaineessa) on hyvin pieni veden tiheyteen verrattuna.



4 Raja-arvokäsitteen laajennuksia

66. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+\frac{3}{x}}=0$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\infty$ (Osoittaja lähestyy ääretöntä, nimittäjä lukua 3.)

67. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7}{x}=0$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2}{5-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\frac{2}{x}}{\frac{5}{x}-1}=-5$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-\frac{2}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\infty$

68. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-8)=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1\,000x-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\dfrac{1\,000}{x}-1)$. Koska $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1\,000}{x}-1)=-1$, päätellään raja-arvoksi $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3+5x^2-3)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3(-2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2})$. Koska $\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty}(-2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2})=-2$, päätellään raja-arvoksi $-\infty$.

69. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+\dfrac{1}{x^2})$. Koska $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2+\dfrac{1}{x^2})=-2$, päätellään raja-arvoksi ∞.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-6x+x^4)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}+1)$. Koska $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}+1)=1$, kysytty raja-arvo on ∞.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(10x^{100}-9x^{99})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{100}(10-\dfrac{9}{x})$. Koska $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{100}=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty}(10-\dfrac{9}{x})=10$, kysytty raja-arvo on ∞.

Huomautus: Polynomien raja-arvot tehtävissä 68 ja 69 voidaan päätellä myös suoraan korkeinta astetta olevasta termistä.

70. **a)** Raja-arvossa $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{1}{x-2}$ osoittaja lähestyy arvoa 1 ja nimittäjä arvoa 0. Raja-arvokohdan lähellä murtolauseke on negatiivinen, joten kysytty raja-arvo on $-\infty$.

b) Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{x-2}$ on ∞ , koska murtolauseke on nyt positiivinen lähellä raja-arvokohtaa.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$ ei ole olemassa, koska edellä lasketut toispuoliset raja-arvot eivät ole samoja.

71. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\dfrac{x^2-3}{x+2}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+2} = 2$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(3-\dfrac{5x^2-1}{x^2+2}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+7}{x^2+2} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2-\dfrac{x^2}{x+4}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+8}{x+4} = 6$

72. Kaikissa kohdissa osoittaja lähestyy arvoa 1 ja nimittäjä arvoa 0. Murtolauseke on a-kohdassa negatiivinen ja b-kohdassa positiivinen, joten vastaavat raja-arvot ovat $-\infty$ ja ∞ . Tästä seuraa, että c-kohdan raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-1}$ ei ole olemassa.

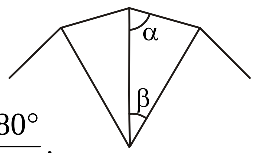
73. Raja-arvojen määrityksessä voidaan nojautua eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ ominaisuuksiin. Tehtävän kohdissa $a > 1$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$

74. Koska $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x-1} = -5$, määritellään $f(0) = -5$, jolloin funktio tulee jatkuvaksi kohdassa $x = 0$.

Tutkitaan raja-arvoa kohdassa $x = 1$. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{5x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{5}{x-1} = -\infty$. Jo tämä osoittaa, että raja-arvo kohdassa $x = 1$ ei ole äärellisenä olemassa, joten funktiota ei voi saada lisämäärityksin jatkuvaksi kohdassa $x = 1$.

75. Piirretään säännölliseen n-kulmioon keskuskolmio. Sen huippukulma on $\beta = \dfrac{360°}{n}$. Silloin n-kulmion yhden kulman puolikas $\alpha = \dfrac{180° - \beta}{2}$ $= 90° - \dfrac{180°}{n}$, joten n-kulmion kulma on $2\alpha = 180° - \dfrac{360°}{n} = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.



Sen raja-arvo sivuluvun n kasvaessa rajattomasti on $\lim\limits_{n\to\infty}(180° - \dfrac{360°}{n}) = 180°$.

76. Suoran $tx - x - ty + t = 0$ kulmakerroin on $k = \dfrac{t-1}{t}$, $t \neq 0$. Kun $t = 0$, kysymyksessä on y-akseli, jolla ei ole kulmakerrointa.

a) Kulmakertoimen raja-arvo on $\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{1}{t}) = 1$.

b) Origon etäisyys suorasta $(t-1)x - ty + t = 0$ saadaan lausekkeesta

$d = \dfrac{|(t-1)\cdot 0 - t\cdot 0 + t|}{\sqrt{(t-1)^2+(-t)^2}} = \dfrac{|t|}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$. Sen raja-arvo äärettömyydessä on

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|t|}{\sqrt{2t^2-2t+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{t\sqrt{2-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Funktion derivaatta

1 Funktion muuttumisen nopeus

77. **a)** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{6{,}0-1{,}0}{0-(-2{,}0)}=2{,}5$ **b)** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1{,}9-4{,}9}{5{,}0-1{,}0}=-0{,}75$

c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2{,}0-1{,}0}{5{,}0-(-2{,}0)}=\dfrac{1{,}0}{7{,}0}\approx 0{,}14$

80. **a)** $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}=\dfrac{30\text{ kg}-18\text{ kg}}{5{,}0\text{ a}}=2{,}4\text{ kg / a}$

b) Käyrän tangentti nousee jyrkimmin kohdassa $x=15\text{ a}$.

c) Tangentin kulmakerroin kohdassa $x=15\text{ a}$ on noin 10 kg/a.

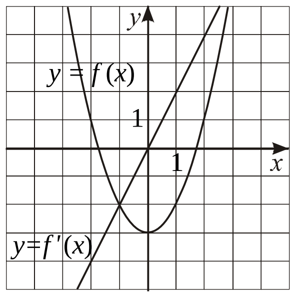
2 Derivaatan määritelmä

84. **a)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2-3-(x^2-3)}{h}$

$=\dfrac{2xh+h^2}{h}=2x+h\rightarrow 2x,$ kun $h\rightarrow 0$

Siis $f'(x)=\mathrm{D}(x^2-3)=2x$.

b)



85. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h}$

$=\dfrac{kx+kh+b-kx-b}{h}=\dfrac{kh}{h}=k$. Erotusosamäärä on vakio k, joten sen raja-arvo eli derivaatta on myös vakio k. Siis $f'(x)=\mathrm{D}(kx+b)=k$.

86. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}}{h}=\dfrac{2-2-h}{h\cdot 2(2+h)}=-\dfrac{1}{2(2+h)}\rightarrow -\dfrac{1}{4},$ kun $h\rightarrow 0$

Siis $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$.

87. **a)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=-\dfrac{-h}{hx(x+h)}$

$=-\dfrac{1}{x(x+h)}\rightarrow -\dfrac{1}{x^2},$ kun $h\rightarrow 0$. Siis $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$

$=\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2+3xh+h^2\rightarrow 3x^2,$ kun $h\rightarrow 0$. Siis $f'(x)=3x^2$.

89. Erotusosamäärä funktiolle $g(x) = x\,f(x)$ origossa on

$$\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{hf(h)-0\cdot f(0)}{h} = f(h).$$

Koska f on jatkuva origossa, on $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = f(0)$. Tämä on erotusosamäärän raja-arvo, joten funktion g derivaatta origossa on $g'(0) = f(0)$. Tätä tulosta voidaan soveltaa funktioon $f(x) = |x| + 1$, koska se on jatkuva origossa. Tässä tapauksessa saadaan $g'(0) = 0 + 1 = 1$.

90. Merkitsemällä $x = x_0 + h$ erotusosamäärä $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ saa muodon $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Kun $h \to 0$, niin $x \to x_0$. Näin ollen derivaatta kohdassa x_0 saadaan raja-arvona $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

91. Koska funktio on derivoituva kohdassa x_0, niin $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Muodostetaan funktion raja-arvo kohdassa x_0 käyttäen hyväksi identtistä yhtälöä

$$f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) - f(x_0).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) - f(x_0)\right)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) - \lim_{x\to x_0} f(x_0)\\
&= f'(x_0)\cdot 0 - f(x_0)\\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, funktio on jatkuva kohdassa x_0.

92. Oletetaan, että funktio f on epäjatkuva määrittelyvälinsä pisteessä x_0. Tiedetään, että jos funktio on derivoituva jossakin kohdassa, se on myös jatkuva tässä kohdassa. Jos f olisi derivoituva kohdassa x_0, se olisi tässä kohdassa myös jatkuva. Mutta tämä olisi vastoin oletusta, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa x_0.

3 Polynomifunktion derivaatta

98. **a)** $f(x) = 2x^2\cdot 3x^3 = 6x^5$, joten $f'(x) = 30x^4$.

b) $f(x) = (1-2x)^2 = 1-4x+4x^2$, joten $f'(x) = -4+8x = 8x-4$.

c) $f(x) = \dfrac{2(x^3-3x^2)}{3x} = \dfrac{2x^3-6x^2}{3x} = \dfrac{2}{3}x^2 - 2x$, joten $f'(x) = \dfrac{4}{3}x - 2$.

99. Funktion $f(x)=x^3+2x^2-4x+5$ derivaatta on $f'(x)=3x^2+4x-4$. Se saa arvon nolla niissä kohdissa *x*, jotka toteuttavat toisen asteen yhtälön $3x^2+4x-4=0$. Nämä ovat $x=\frac{2}{3}$ ja $x=-2$.

100. Kun $f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x+13\frac{1}{2}$, niin $f'(x)=-2x^3+3$.

$f(-1)=-\frac{1}{2}-3+13\frac{1}{2}=10$, $f'(-1)=-2\cdot(-1)+3=5$

$f'(f'(0))=f'(3)=-54+3=-51$

101. Merkitään $P(x)=ax^2+bx+c$. Jotta $P(x)-P'(x)=x^2$, tulee olla $ax^2+bx+c-(2ax+b)=x^2$ eli $ax^2+(b-2a)x+(c-b)=x^2$. Tämä toteutuu kaikilla *x*:n arvoilla, kun $a=1, b-2a=0$ ja $c-b=0$. Kun ratkaistaan *b*:n ja *c*:n arvot, saadaan kysytty polynomi $P(x)=x^2+2x+2$.

102. Lääkkeen määrän $m(t)=40-\frac{t^2}{120}$ muuttumisnopeus on $m'(t)=-\frac{1}{60}t$. Puolen tunnin kuluttua lääkkeen antamisesta muuttumisnopeus on $m'(30)=-0{,}5$ (mg/min).

103. Bakteerien määrän $n(t)=500+50t+2t^2$ kasvunopeus on $n'(t)=50+4t$. Kolmen ja puolen tunnin kuluttua seurannan alusta lukien bakteerien määrän kasvunopeus on $n'(3{,}5)=50+14=64$ (kpl/h).

104. **a)** Kun $A(r)=\pi r^2$, niin $A'(r)=2\pi r$. **b)** Kun $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$, niin $V'(r)=4\pi r^2$.

c) Kun $v(t)=v_0+at$, niin $v'(t)=a$. **d)** Kun $s(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, niin $s'(t)=v_0+at$.

105.
$$\frac{d}{dr}(2rs^2t^3-t)=2s^2t^3\frac{d}{dr}r-\frac{d}{dr}t=2s^2t^3\cdot 1-0=2s^2t^3$$
$$\frac{d}{ds}(2rs^2t^3-t)=2rt^3\frac{d}{ds}s^2-\frac{d}{ds}t=2rt^3\cdot 2s-0=4rst^3$$
$$\frac{d}{dt}(2rs^2t^3-t)=2rs^2\frac{d}{dt}t^3-\frac{d}{dt}t=2rs^2\cdot 3t^2-1=6rs^2t^2-1$$

106. Derivaatta on positiivinen nollakohtiensa –1 ja 3 välissä, joten vastaavalla välillä käyrän $y = f(x)$ tangentin tulee olla nouseva. Vain vaihtoehto 4 täyttää tämän ehdon.

107. Funktion *f* lausekkeeksi päätellään $-x^2+4$, jolloin $f'(x)=-2x$. Derivaattafunktion kuvaaja on suora $y = -2x$.

108. **a)** Kappaleen keskinopeus aikavälillä 1,5 s - 2,0 s on

$$v_k=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(2,0)-s(1,5)}{2,0-1,5}\frac{\text{m}}{\text{s}}=\frac{3{,}2-1{,}8}{0{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}}=2{,}8\ \text{m/s}.$$

b) Kappaleen nopeus $v(t)=s'(t)=1{,}6t$ (m/s), joten $v(1{,}5\,\text{s})=2{,}4$ m/s.

109. **a)** Pallon nopeus on $v(t) = h'(t) = 12 - 9{,}8t$ (m/s) ja kiihtyvyys $a(t) = v'(t) = 9{,}8$ $(\mathrm{m/s^2})$. Näin ollen $v(1\ \mathrm{s}) = 2{,}2\ \mathrm{m/s}$ ja $a(1\ \mathrm{s}) = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

b) Pallo on ilmassa kunnes $h = 0$ eli $-4{,}9t^2 + 12t + 15 = 0$, josta $t = 3{,}4$ (s).

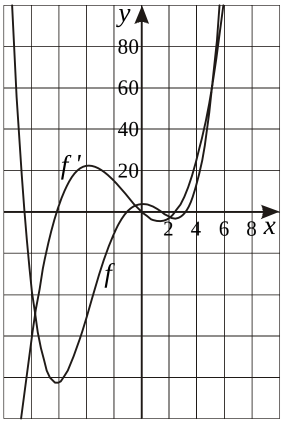
110. **a)** Kolmannen tunnin aikana pumputaan tonneina määrä $m(3) - m(2)$ $= 9(28-3) - 4(28-2) = 121$.

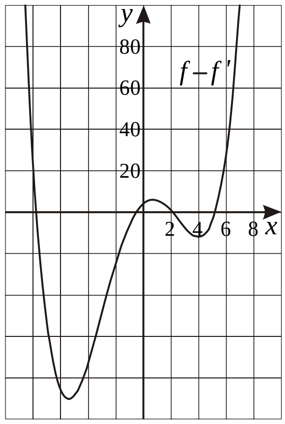
b) Pumppuamisnopeus on $m'(t) = 56t - 3t^2$ (t/h), joten $m'(3) = 141$ (t/h).

111. Funktioiden $f(x) = \dfrac{x^4}{10} + \dfrac{x^3}{2} - 3x^2 + 4$ ja $f'(x) = \dfrac{2x^3}{5} + \dfrac{3x^2}{2} - 6x$ kuvaajilla näyttää olevan neljä leikkauspistettä. Niiden x-koordinaatit ovat yhtälön $f(x) = f'(x)$ ratkaisuja. Voidaan myös muodostaa erotusfunktio

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^4}{10} + \frac{x^3}{10} - \frac{9x^2}{2} + 6x + 4$$

ja määrittää sen nollakohdat. Funktion kuvaaja on oikeanpuoleisessa kuvassa. Laskimen toiminnoilla saadaan kysytyiksi x:n arvoiksi kahdella desimaalilla –7, 73; –0,49; 2,05 ja 5,17.





112. **c)** $(z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + z^{n-3}x^2 + \ldots + zx^{n-2} + x^{n-1})$

$= z^n + \cancel{z^{n-1}x} + \cancel{z^{n-2}x^2} + \ldots + \cancel{z^2x^{n-2}} + \cancel{zx^{n-1}} - \cancel{z^{n-1}x} - \cancel{z^{n-2}x^2} - \ldots - \cancel{z^2x^{n-2}} - \cancel{zx^{n-1}} - x^n$

$= z^n - x^n$

4 Tangentti ja normaali

119. Tangentin piste $(1,-3)$ ei ole käyrällä $y = x^2$. Olkoon (x_1, y_1) sivuamispiste. Tangentin kulmakerroin on silloin $f'(x_1) = 2x_1 = \dfrac{y_1 + 3}{x_1 - 1} = \dfrac{x_1^{\,2} + 3}{x_1 - 1}$. Ratkaisuna saadaan $x_1 = -1$ tai $x_1 = 3$, joten tangentin yhtälö on $y + 3 = -2(x-1)$ tai $y + 3 = 6(x-1)$ eli sievennettynä $2x + y + 1 = 0$ tai $6x - y - 9 = 0$.

120. Tangentin piste $(\frac{1}{2}, 0)$ ei ole käyrällä $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Olkoon (x_1, y_1) sivuamispiste. Tangentin kulmakerroin on silloin

$$f'(x_1) = 2x_1 - 2 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - \frac{1}{2}} = \frac{x_1^{\,2} + 2x_1 - 3}{x_1 - \frac{1}{2}}.$$

Ratkaisuna saadaan $x_1 = -1$ tai $x_1 = 2$, joten tangentin yhtälö on $y - 0 = -4(x - \frac{1}{2})$ tai $y - 0 = 2(x - \frac{1}{2})$ eli sievennettynä $4x + y - 2 = 0$ tai $2x - y - 1 = 0$.

121. Kun tangentti leikkaa x-akselin 45°:n kulmassa, sen kulmakerroin on 1 tai –1. Koska $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$, on $y' = 3x^2 - 4x + 1$. Yhtälön $3x^2 - 4x + 1 = 1$ ratkaisut ovat $x = 0$ tai $x = \frac{4}{3}$. Sitä vastoin yhtälöllä $3x^2 - 4x + 1 = -1$ ei ole ratkaisuja. Käyrällä kohdassa $x = 0$ on $y = -1$, ja kohdassa $x = \frac{4}{3}$ on $y = -\frac{23}{27}$. Sivuamispisteet ovat $(0, -1)$ ja $(\frac{4}{3}, -\frac{23}{27})$.

122. **a)** Käyrät $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$ leikkaavat kohdissa $x = \pm 1$. Symmetrian takia riittää tarkastella vain toista leikkauskohtaa. Kohtaan $x = 1$ asetettujen tangenttien kulmakertoimet $k_1 = 2$ ja $k_2 = -2$ saadaan derivaattojen $2x$ ja $-2x$ arvoina kohdassa $x = 1$. Tangenttien ja samalla käyrien välinen kulma ratkeaa yhtälöstä

$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{2+2}{1-4}\right| = \frac{4}{3}$, josta $\alpha \approx 53{,}1°$.

b) Käyrien $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ ja $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ leikkauskohdat ovat $x = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$. Kohdassa $x = 0$ tangenttien kulmakertoimilla on sama arvo –1, joten käyrät sivuavat siinä kohdassa toisiaan. Kohdassa $x = \frac{3}{2}$ tangenttien kulmakertoimet ovat $\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{4}$, jolloin kysytyn kulman suuruudeksi saadaan likimain 24,8°.

123. Tehtävässä annetut käyrät $y = x^2 + \frac{3}{4}$ ja $y = -2x^2 + 3x$ kohtaavat kohdissa, joissa $x^2 + \frac{3}{4} = -2x^2 + 3x$. Näitä kohtia on vain $x = \frac{1}{2}$. Siinä derivaatat $2x$ ja $-4x + 3$ saavat saman arvon 1, joten käyrillä on kyseisessä kohdassa yhteinen tangentti. Näin ollen käyrät sivuavat toisiaan.

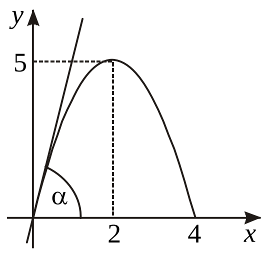
124. Käyrät $y = -x^2$ ja $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ kohtaavat toisensa niissä kohdissa, joissa $-x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$. Näitä on vain $x = -1$. Siinä derivaatat $-2x$ ja $-x + 1$ saavat saman arvon 2, joten käyrillä on kyseisessä kohdassa yhteinen tangentti. Näin ollen käyrät sivuavat toisiaan. Kohdassa $x = -1$ on $y = -1$. Tangentin yhtälö on $y + 1 = 2(x + 1)$ eli $2x - y + 1 = 0$.

125. **a)** Käyrälle $y = \sqrt{x}$ kohtaan $x = 4$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Tangentin yhtälöksi saadaan $y - \sqrt{4} = \frac{1}{4}(x - 4)$ eli $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Tangentilta laskettu arvo kohdassa $x = 4{,}1$ on $\frac{1}{4} \cdot 4{,}1 + 1 = 2{,}025$, kun taas vastaava y:n arvo käyrältä on $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}0248$. Arvot ovat samat kolmen desimaalin tarkkuudella.

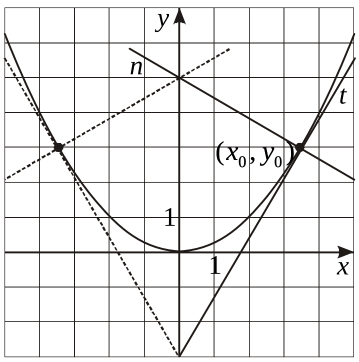
b) Koska tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 4$ on $\frac{1}{4}$, normaalin kulmakerroin samassa kohdassa on -4. Normaalin yhtälö on $y-2=-4(x-4)$ eli $y=-4x+18$. Normaali leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $(0,18)$ ja $(4\frac{1}{2},0)$. Syntyvän kolmion ala on $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 18 = 40{,}5$.

126. Asetetaan koordinaatisto kuvan osoittamalla tavalla. Paraabelin yhtälö on silloin $y=ax(x-4)=ax^2-4ax$. Huippu on pisteessä (2,5), joten $2a\cdot(-2)=5$ ja $a=-\frac{5}{4}$. Derivaatan $y'=2ax-4a$ arvo origossa on $-4a=5$, ja se ilmoittaa vastaavan tangentin kulmakertoimen. Suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha=5$, josta $\alpha\approx 78{,}7°$.



127. Olkoon yhteisen tangentin käyrällä $y=x^2$ oleva sivuamispiste (x_1, y_1) ja käyrällä $y=-x^2+4x-4$ oleva sivuamispiste (x_2, y_2). Lausutaan tangentin kulmakerroin kolmella eri tavalla, jolloin saadaan $2x_1=-2x_2+4=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, Sijoittamalla $y_1={x_1}^2$ ja $y_2=-{x_2}^2+4x_2-4$ saadaan yhtälö $2x_1=\frac{-{x_2}^2+4x_2-4-{x_1}^2}{x_2-x_1}$. Kun tähän tehdään sijoitus $x_2=2-x_1$ ja sievennetään, saadaan ${x_1}^2-2x_1=0$. Tästä $x_1=0$ tai $x_1=2$, jolloin vastaavasti $y_1=0$ tai $y_1=4$. Edellisessä tapauksessa tangentin kulmakerroin on 0, jälkimmäisessä 4. Tangenttien yhtälöt ovat $y = 0$ ja $y-4=4(x-2)$ eli $y = 0$ ja $y = 4x - 4$.

128. Olkoon kysytty paraabelin $x^2=4y$ piste (x_0, y_0). Derivaatta on $y'=\frac{1}{2}x$, joten tangentin yhtälö on $y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$ ja normaalin $y-y_0=-\frac{2}{x_0}(x-x_0)$. Sijoitetaan $x = 0$ ja $y_0=\frac{{x_0}^2}{4}$, jolloin yhtälöt ovat $y=\frac{{x_0}^2}{4}-\frac{{x_0}^2}{2}=-\frac{{x_0}^2}{4}$ ja $y=\frac{{x_0}^2}{4}+2$. Tangentin ja normaalin y-akselista erottaman janan pituus on $\frac{{x_0}^2}{4}+2-(-\frac{{x_0}^2}{4})=8$. Tästä ${x_0}^2=12$ ja $x_0=\pm 2\sqrt{3}$. Kysytyt pisteet ovat $(2\sqrt{3}, 3)$ ja $(-2\sqrt{3}, 3)$.

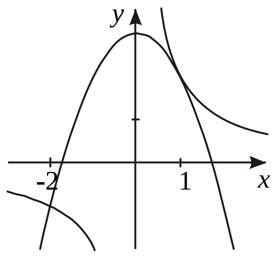


5 Tulon ja osamäärän derivaatta

140. Olkoon tangentin ja käyrän $y = 1 - \frac{1}{x}$ sivuamispiste (x_1, y_1). Tangentin kulmakerroin on $\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1{}^2}$ ja derivaattaa käyttäen $\frac{1}{x_1{}^2}$. Yhtälöstä $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1{}^2} = \frac{1}{x_1{}^2}$ saadaan $x_1 = 2$. Tangentin yhtälö on $y = \frac{1}{4}x$.

141. Piste (1, 1) on käyrällä $y = \frac{1}{x}$. Jotta se olisi myös käyrällä $y = ax^3 + b$, tulee olla $a + b = 1$. Tangenttien kohtisuoruusvaatimuksesta saadaan derivaattoja käyttäen yhtälö $3a \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{1^2}\right) = -1$, josta $a = \frac{1}{3}$. Silloin $b = \frac{2}{3}$.

142. Käyrien $y = 3 - x^2$ ja $y = \frac{2}{x}$ yhteiset pisteet ovat kohdissa $x = -2$ ja $x = 1$. Ne saadaan yhtälön $3 - x^2 = \frac{2}{x}$ ratkaisuina. Lasketaan derivaattojen $y' = -2x$ ja $y' = -\frac{2}{x^2}$ arvot ensin kohdassa $x = -2$, jolloin saadaan vastaavat tangenttien kulmakertoimet 4 ja $-\frac{1}{2}$. Erisuuret arvot merkitsevät, että käyrät leikkaavat kohdassa $x = -2$. Sitä vastoin kohtaan $x = 1$ asetettujen tangenttien kulmakertoimet ovat samat, kumpikin -2, mikä osoittaa, että käyrät sivuavat toisiaan kohdassa $x = 1$.



143. Koska $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, niin $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2}$. Sijoitetaan $x = 1$ ja käytetään tietoa $f(1) = f'(1) = 2$, jolloin saadaan $g'(1) = \frac{f'(1) \cdot 1 - f(1) \cdot 1}{1^2} = \frac{2-2}{1} = 0$.

144. Derivaatat ensimmäisestä kertaluvusta neljänteen:

a) $15x^2$ $30x$ 30 0

b) $-5(1-x)^4$ $20(1-x)^3$ $-60(1-x)^2$ $120(1-x)$

c) $-1 \cdot x^{-2}$ $2x^{-3}$ $-6x^{-4}$ $24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$

d) $(1-x)^{-2}$ $2(1-x)^{-3}$ $6(1-x)^{-4}$ $24(1-x)^{-5} = \frac{24}{(1-x)^5}$

145. Olkoon $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eli lyhyesti $h = \frac{f}{g}$. Tällöin $f = hg$ ja $f' = h'g + hg'$. Saadaan

$$h' = \frac{f' - hg'}{g} = \frac{f' - \frac{f}{g}g'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$ Siis $$\mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Funktion ääriarvot

1 Funktion monotonisuus

149. **a)** Kirjoitetaan yhtälö $x^3 + 3x = x^2 + 2$ muotoon $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ ja merkitään $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$. Funktio *f* on kaikkialla jatkuva ja saa välin [0, 1] päätepisteissä erimerkkiset arvot –2 ja 1, joten funktiolla on tällä välillä ainakin yksi nollakohta. Funktion derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$ saa vain positiivisia arvoja, koska sen kuvaajana on ylöspäin avautuva paraabeli ja diskriminantti $(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$ on negatiivinen. Funktio *f* on siis aidosti kasvava, joten sillä on vain yksi nollakohta. Siksi myös yhtälöllä $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ on vain yksi reaalijuuri.

b) ainoa juuri välillä]0, 1[**c)** ainoa juuri välillä]–1, 0[**d)** ainoa juuri välillä]2, 3[

150. Merkitään $x_1 = -1{,}666667$ ja $x_2 = -1{,}666668$. Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ derivaatan $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ nollakohdat ovat $-1\frac{2}{3}$ ja 1. Arvoilla $x \le -1\frac{2}{3}$ funktio on aidosti kasvava, sillä silloin $f'(x) \ge 0$. Koska nyt $x_2 < x_1 < -1\frac{2}{3}$, niin $f(x_1) > f(x_2)$.

151. Funktio $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ on määritelty, jatkuva ja derivoituva välillä $x > 0$. Sen derivaatta $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ saa vain positiivisia arvoja, joten funktio on määrittelyjoukossaan aidosti kasvava.

152. Funktion derivaatta on positiivinen, kun $x < -4$ tai $-1 < x < 2$ tai $x > 2$. Derivaatan nollakohdat ovat yksittäisiä. Funktio on siis aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -4]$ ja $[-1, \infty[$.

153. **a)** Kun funktio on aidosti kasvava, sen saamat arvot ja vastaavat argumentin arvot ovat samassa suuruusjärjestyksessä. Ehdosta $f(3x-1) > f(5)$ seuraa siis epäyhtälö $3x - 1 > 5$, josta $x > 2$.

b) Aidosti vähenevälle funktiolle argumentin arvot ja vastaavat funktion arvot ovat käänteisessä suuruusjärjestyksessä. Nyt saadaan epäyhtälö $3x - 1 < 5$, josta $x < 2$.

154. Yhtälöllä $(x+1)^3 = x$ on tarkalleen yksi juuri, jos funktiolla $f(x) = (x+1)^3 - x$ on tarkalleen yksi nollakohta. Funktio *f* on polynomifunktiona kaikkialla jatkuva. Derivaatan $f'(x) = 3(x+1)^2 - 1$ nollakohdat ovat

$x_1 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx -1{,}6$ ja $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}42$.

$f'(x)$	+		−		+
		$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$	

Derivaatan merkkikaavion mukaan funktio on aidosti kasvava välillä $x \le x_1$. Koska $f(-3) = -5 < 0$ ja $f(x_1) \approx 1{,}4 > 0$, funktiolla on tarkalleen yksi nollakohta välillä $x \le x_1$. Välillä $x_1 \le x \le x_2$ funktio on aidosti vähenevä, ja koska $f(x_2) \approx 0{,}62 > 0$, funktiolla ei ole sanotulla välillä nollakohtia. Niitä ei ole myöskään välillä $x \geq x_2$, koska arvo x_2:ssa on positiivinen ja funktio on aidosti kasvava x_2:sta alkaen. Nollakohtia on siis kaikkiaan vain yksi.

155. Merkitään $f(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$, jolloin $f'(x) = 6px^2 + 6x + 6$.

Jos $p = 0$, derivaatan $6x + 6$ merkki vaihtuu -1:ssä, jolloin funktio ei ole koko **R**:ssä aidosti kasvava.

Oletetaan, että p ei ole nolla. Funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ ja derivaatan nollakohdat ovat enintään yksittäisiä. Derivaatan kuvaajana olevan paraabelin tulee siis sijaita x-akselin yläpuolella tai enintään sivuta x-akselia. Silloin paraabelin tulee aueta ylöspäin eli tulee olla $p > 0$. Paraabelin sijaintiehto toteutuu, kun derivaatan lausekkeeseen liittyvä diskriminantti $D = 36 - 4 \cdot 6p \cdot 6 \leq 0$, josta $p \geq \frac{1}{4}$.

Saatu tulos on tehtävän vastaus.

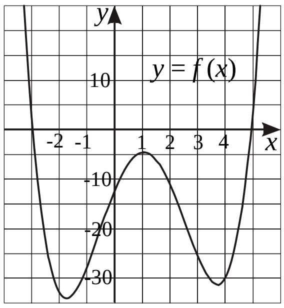
156. Ohessa nähdään sekä funktion

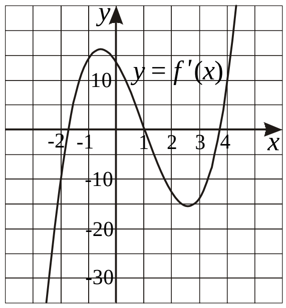
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 12$$

että sen derivaatan

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 - 9x + \frac{27}{2}$$

kuvaajat. Funktion monotonisuus vaihtuu derivaatan nollakohdissa, jotka voidaan jäljittää graafisen laskimen toiminnoilla. Saadaan seuraava tulos:





Funktio on aidosti vähenevä, kun $x \leq -1,755$ tai $1,033 \leq x \leq 3,722$.

Funktio on aidosti kasvava, kun $-1,755 \leq x \leq 1,033$ tai $x \geq 3,722$.

157. Funktio $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Kun n on parillinen, derivaatta $f'(x) = nx^{n-1}$ on pariton funktio. Derivaatta on negatiivinen negatiivisilla ja positiivinen positiivisilla x:n arvoilla. Funktio f on siis aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$.

Kun n on pariton, derivaatta $f'(x) = nx^{n-1}$ on parillinen funktio. Derivaatta on positiivinen kaikilla nollasta eroavilla x:n arvoilla. Kohta $x = 0$ on yksittäinen derivaatan nollakohta. Funktio f on siis aidosti kasvava kaikilla x:n arvoilla.

2 Funktion ääriarvot

163. **a)** $f(x)=(x^2-1)^2$

$f'(x)=2(x^2-1)\cdot 2x=4x(x^2-1)$.

Derivaatan nollakohdat $x = 0$, $x=\pm 1$

Minimit $f(\pm 1)=0$, maksimi $f(0) = 1$

$4x$	–	–	+	+
$x^2 - 1$	+	–	–	+
$f'(x)$	–	+	–	+
	-1	0	1	

b) $f(x)=(x^3-1)^2$

$f'(x)=2(x^3-1)\cdot 3x^2=6x^2(x^3-1)$

Derivaatan nollakohdat $x = 0$, $x = 1$

Minimi $f(1) = 0$

$6x^2$	+	+	+
$x^3 - 1$	–	–	+
$f'(x)$	–	–	+
	0	1	

c) $f(x)=(x^4-1)^2$

$f'(x)=2(x^4-1)\cdot 4x^3=8x^3(x^2-1)(x^2+1)$

Derivaatan nollakohdat $x = 0$, $x=\pm 1$

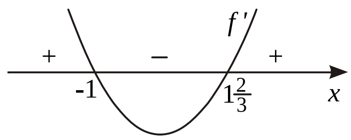
Minimit $f(\pm 1)=0$, maksimi $f(0) = 1$

$8x^3$	–	–	+	+
$x^2 - 1$	+	–	–	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+
$f'(x)$	–	+	–	+
	-1	0	1	

164. Polynomifunktion $f(x)=ax^3-x^2$ ääriarvo voi sijaita vain derivaatan $f'(x)=3ax^2-2x$ nollakohdassa, joten $f'(4)=48a-8=0$. Siitä $a=\frac{1}{6}$. Derivaatan $f'(x)=x(\frac{x}{2}-2)$ merkin vaihtumisesta päätellään ääriarvoksi minimi.

165. Tapauksessa $a=0$ on kysymyksessä funktio $f(x)=x+3$, jolla ei ole ääriarvoja. Oletetaan, että $a\neq 0$. Kaikkialla jatkuvan ja derivoituvan funktion $f(x)=ax^3+ax^2+x+3$ ääriarvot voivat sijaita vain derivaatan $f'(x)=3ax^2+2ax+1$ nollakohdissa. Niitä on tarkalleen yksi tai ei yhtään, kun $D=4a^2-12a\leq 0$ eli arvoilla $0<a\leq 3$. Kohdassa $a=3$ ei ole ääriarvoa, sillä siinä derivaatan merkki ei vaihdu. Annetulla funktiolla ei siis ole ääriarvoa, kun $0\leq a\leq 3$.

166. Polynomifunktion $f(x)=ax^3-ax^2+bx+3$ ($a,b\in\mathbf{R}$) ääriarvo voi sijaita vain derivaatan $f'(x)=3ax^2-2ax+b$ nollakohdassa, joten $f'(-1)=3a+2a+b=0$. Toisaalta $f(-1)=-a-a-b+3=6$, joten saadusta yhtälöparista $a = 1$ ja $b = -5$. Derivaatan $f'(x)=3x^2-2x-5$ nollakohdat ovat -1 ja $1\frac{2}{3}$. Derivaatan merkkikaavion mukaan funktio on kasvava, kun $x\leq -1$ tai $x\geq 1\frac{2}{3}$.

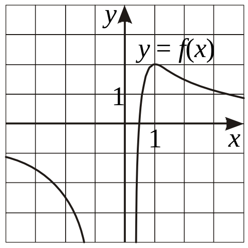


167. Polynomifunktion $f(x)=(x-a)^2(x-1)$ ääriarvo voi sijaita vain derivaatan nollakohdassa. Derivaatta on (tulon derivoimissäännöllä) $f'(x)=2(x-a)(x-1)+(x-a)^2$, joten $f'(2)=2(2-a)+(2-a)^2=0$. Tästä $a = 2$ tai $a = 4$.

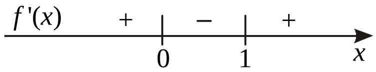
Kun $a = 2$, derivaatan $f'(x)=(x-2)(3x-4)$ merkki vaihtuu kohdan 2 ylityksessä niin, että kysymyksessä on minimikohta. Siksi a:n arvo 2 ei tule kysymykseen.

Kun $a = 4$, derivaatan $f'(x) = (x-4)(3x-6)$ merkki vaihtuu kohdan 2 ylityksessä maksimia vastaavasti. Siis kysytty a:n arvo on 4. Maksimi on arvoltaan $f(2) = (2-4)^2(2-1) = 4$. Kohdassa $x = 4$ on silloin minimi, ja sen arvo on $f(4) = (4-4)^2(4-1) = 0$.

168. Funktio $f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2}$ on määritelty nollasta eroavilla muuttujan arvoilla, ja tällöin funktio on jatkuva ja derivoituva. Ääriarvo voi esiintyä vain derivaatan $f'(x) = \dfrac{bx^2-(a+bx)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-bx-2a}{x^3}$ nollakohdassa. Siis $-b-2a = 0$. Toisaalta $f(1) = a+b = 2$, joten $a = –2$ ja $b = 4$. Derivaatta $f'(x) = \dfrac{-4x+4}{x^3}$ muuttuu nollakohdan $x = 1$ ohituksessa positiivisesta negatiiviseksi, joten kysymyksessä on maksimikohta. Oheen on piirretty funktion f kuvaaja.



***169. a)** Funktio $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, \text{ kun } x < 1, \\ x^2, \text{ kun } x \geq 1, \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva. Sen derivaatalla $f'(x) = \begin{cases} -2x, \text{ kun } x < 1, \\ 2x, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$ on nollakohta $x = 0$. Derivoituvuutta kohdassa $x = 1$ ei tarvitse tietää. Derivaatan merkkikaavion perusteella funktiolla on maksimi $f(0) = 2$ ja minimi $f(1) = 1$.



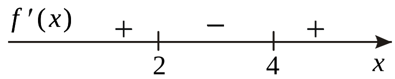
b) Funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ kun } x \leq 0, \\ x^2+1, \text{ kun } x > 0, \end{cases}$ on jatkuva muualla paitsi origossa. Derivaattaa kohdassa $x = 0$ ei siis ole. Vasemmanpuolinen raja-arvo origossa on 0, oikeanpuolinen 1. Derivaatasta $f'(x) = \begin{cases} -2x, \text{ kun } x < 0, \\ 2x, \text{ kun } x > 0, \end{cases}$ nähdään lisäksi, että funktio on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä ei ole ääriarvoja.

c) Funktio $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, \text{ kun } x \neq 0, \\ 0, \text{ kun } x = 0, \end{cases}$ on jatkuva muualla paitsi origossa, jossa funktiolla ei siis ole derivaattaa. Raja-arvo origossa on 1. Derivaatalla $f'(x) = -2x,\ x \neq 0$, ei ole nollakohtia. Lähestyttäessä origoa vasemmalta funktion arvot kasvavat kohti arvoa 1 ja alkavat origon jälkeen pienetä tähän arvoon nähden. Koska $f(0) = 0$, se on paikallinen minimi.

d) Funktio $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ kun } x \leq 1, \\ -x^2+2x, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$ on jatkuva ja derivoituva muualla paitsi kohdassa $x = 1$. Derivaatalla $f'(x) = \begin{cases} 2, \text{ kun } x < 1, \\ -2x+2, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$ ei ole nollakohtia. Kohtaan 1 asti funktio on aidosti kasvava ja sen jälkeen aidosti vähenevä. Vasemmanpuolinen raja-arvo 1:ssä on 2, oikeanpuolinen 1. Koska $f(1) = 2$, se on paikallinen maksimi.

***170.** **a)** Funktio $f(x) = x|x-4|$ on kaikilla x:n arvoilla jatkuva. Esitysmuodosta

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, \text{ kun } x < 4, \\ x^2 - 4x, \text{ kun } x \geq 4, \end{cases}$$ saadaan derivaatta

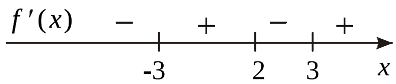


$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4, \text{ kun } x < 4, \\ 2x - 4, \text{ kun } x > 4. \end{cases}$$ Derivoituvuutta kohdassa $x = 4$ ei tarvitse tietää. Derivaatan nollakohta on $x = 2$. Merkkikaaviosta päätellään ääriarvot maksimi $f(2) = 4$ ja minimi $f(4) = 0$.

b) Funktio $f(x) = x^2 - 6|x-2|$ on kaikkialla jatkuva. Poistetaan itseisarvomerkit ja derivoidaan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 12, \text{ kun } x < 2 \\ x^2 - 6x + 12, \text{ kun } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ kun } x < 2 \\ 2x - 6, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$$



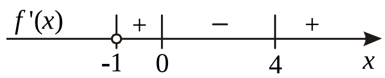
Derivoituvuutta kohdassa $x = 2$ ei tarvitse tietää. Derivaatan nollakohdat ovat 3 ja –3. Derivaatan merkkikaaviosta nähdään ääriarvokohdat. Ääriarvot ovat minimi $f(-3) = -21$, minimi $f(3) = 3$ ja maksimi $f(2) = 4$.

3 Funktion suurin ja pienin arvo

176. **a)** Funktion $f(x) = 6x^3 - 3x^4$ mahdolliset ääriarvot sijaitsevat derivaatan $f'(x) = 18x^2 - 12x^3 = 6x^2(3-2x)$ nollakohdissa $x = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$. Derivaatan merkkikaavion mukaan funktion arvot kasvavat kohtaan $1\frac{1}{2}$ asti ja alkavat sitten pienentyä. Se merkitsee, että funktion suurin arvo on $f(1\frac{1}{2}) = 5\frac{1}{16}$. Pienintä arvoa ei ole, koska $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = -\infty$.

$6x^2$	+	+	+
$3 - 2x$	+	+	–
$f'(x)$	+	+	–
		0	$1\frac{1}{2}$

b) Polynomifunktion $f(x) = \frac{x^2}{10}(x-6) = \frac{x^3}{10} - \frac{6x^2}{10}$ tutkiminen on rajattu välille $x > -1$. Derivaatan $f'(x) = \frac{3x^2}{10} - \frac{12x}{10} = \frac{3x}{10}(x-4)$ nollakohdista 0 ja 4 kumpikin kuuluu tutkimusvälille. Derivaatan merkkikaavion mukaan $f(0) = 0$ on maksimi ja $f(4) = -3\frac{1}{5}$ minimi. Tämä on samalla funktion pienin arvo, koska $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = -\frac{7}{10}$. Suurinta arvoa ei ole, sillä $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.



177. Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ derivaattafunktio $f'(x) = g(x) = 3x^2 + 6x - 2$ on jatkuva suljetulla välillä $-2 \le x \le 1$, joten se saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvon. Ne ovat ääriarvojen joukossa. Mahdolliset ääriarvot sijaitsevat derivaatan $g'(x) = 6x + 6$ nollakohdassa –1 ja välin päätepisteissä. Kulkukaaviota ei tarvita. Arvoista $f'(-2) = -2$, $f'(-1) = -5$ ja $f'(1) = 7$ on –5 pienin ja 7 suurin. Derivaatta saa siis kaikki arvot väliltä [–5, 7].

178. Funktio $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + t$ on jatkuva suljetulla välillä [–1, 3] ja saa siten pienimmän arvon tällä välillä. Se voi sijaita derivaatan $f'(x) = 12x^3 - 24x^2$ nollakohdissa 0 tai 2 tai välin päätepisteissä. Arvoista $f(-1) = 11 + t$, $f(0) = 0$, $f(2) = -16 + t$ ja $f(3) = 27 + t$ pienin on $-16 + t$. Se on –20, kun $t = -4$.

179. **a)** Funktio $f(x) = (2 - a)x - 1$ on kaikilla muuttujan x ja parametrin a arvoilla määritelty ja jatkuva lineaarinen funktio. Jos $a = 2$, funktio saa kaikkialla vakioarvon -1, joka on samalla kertaa funktion suurin ja pienin arvo. Jos $2 - a > 0$ eli $a < 2$, funktio on aidosti kasvava ja saa silloin välillä $[-3,1]$ pienimmän arvon -3:ssa ja suurimman 1:ssä. *Vastaus*: $a \le 2$

b) Jotta funktiolla $f(x) = (2 - a)x - 1$ olisi välillä $]-3,1[$ nollakohta, arvojen välin päätepisteissä tulee olla erimerkkiset. Näin on, kun $f(-3) > 0$ ja $f(1) < 0$ tai kun $f(-3) < 0$ ja $f(1) > 0$. Saadaan epäyhtälöryhmät

$$\begin{cases} (2-a)\cdot(-3) - 1 > 0 \\ (2-a)\cdot 1 - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} (2-a)\cdot(-3) - 1 < 0 \\ (2-a)\cdot 1 - 1 > 0, \end{cases}$$

joiden ratkaisut antavat kysytyt a:n arvot $a > 2\frac{1}{3}$ tai $a < 1$.

180. Kirjoitetaan epäyhtälö $4(x^3 + x^2 + 1) \ge 3 - x^4$ muotoon $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 \ge 0$ ja merkitään $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$. Funktion f ääriarvot voivat sijaita vain derivaatan $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(x^2 + 3x + 2)$ nollakohdissa –2, –1 ja 0. Merkkikaavion mukaan funktiolla on kohdissa –2 ja 0 minimi, kumpikin arvoltaan 1. Se on samalla funktion pienin arvo, joten aina $f(x) \ge 0$.

$4x$	–	–	–	+
$x^2 + 3x + 2$	+	–	+	+
$f'(x)$	–	+	–	+
	-2	-1	0	

Toisin: Koska $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x + 2)^2 \ge 0$ kaikilla x:n arvoilla, niin myös aina $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 \ge 0$.

181. **a)** Funktio $f(x) = 2 - |x + 5|$ saa suurimman arvonsa, kun vähentäjä $|x + 5|$ saa pienimmän arvonsa 0. Suurin arvo on siis 2. Pienintä arvoa ei ole, koska $|x + 5|$ voi kasvaa kuinka suureksi tahansa.

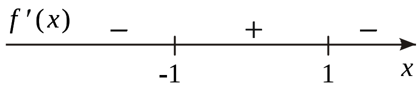
b) Funktio $g(x) = x^6 + 2x^3 + 10 = (x^3 + 1)^2 + 9$ saa pienimmän arvonsa 9, kun neliö $(x^3 + 1)^2$ saa pienimmän arvonsa 0. Suurinta arvoa ei ole, koska kyseinen neliö voi kasvaa kuinka suureksi tahansa.

182. Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ saa suurimman arvonsa, kun nimittäjällä on pienin positiivinen arvo. Tämä nimittäjän pienin arvo 1 saavutetaan välin $[-3,3]$ pisteessä –1. Funktion suurin arvo on siis $f(-1)=1$.

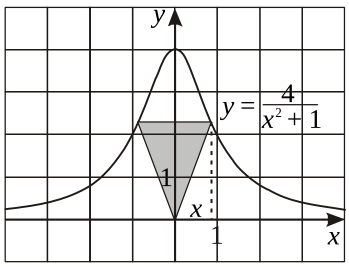
Funktion pienin arvo välillä $[-3,3]$ on $f(3)=\dfrac{1}{17}$, sillä kohdassa 3 nimittäjällä on suurin arvo 17.

183. Haetaan funktion $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x>0$, pienin arvo, joka voi sijaita vain derivaatan $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ nollakohdassa $x=1$. Derivaatan merkkitarkastelu osoittaa funktion tässä kohdassa saaman arvon 2 pienimmäksi arvoksi.

184. Funktio $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ on kaikilla x:n arvoilla määritelty ja jatkuva. Sen derivaatan $f'(x)=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ merkki määräytyy lausekkeen $1-x^2$ mukaan ja vaihtuu nollakohdissa ±1. Ääriarvot ovat minimi $f(-1)=-2$ ja maksimi $f(1)=2$. Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, funktion pienin arvo on –2 ja suurin 2. Funktio saa myös kaikki arvot näiden väliltä, joten arvojoukko on $[-2,2]$.



185. Olkoon kolmion kannan puolikas x, jolloin kolmion pinta-ala on $A(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot\dfrac{4}{x^2+1}=\dfrac{4x}{x^2+1}$, $x>0$. Edellisen tehtävän nojalla nähdään, että pinta-alafunktiolla A on maksimi kohdassa $x=1$. Se on samalla funktion suurin arvo. Suurin pinta-ala on $A(1)=\dfrac{4}{2}=2$.



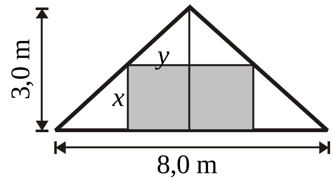
186. Lauseke $x(x+4)+y(y-2)$ kirjoitetaan toiseen muotoon:

$$x(x+4)+y(y-2)=x^2+4x+4+y^2-2y+1-5=(x+2)^2+(y-1)^2-5$$

Nähdään, että lausekkeen pienin mahdollinen arvo on -5, sillä neliöt eivät voi tulla pienemmiksi kuin 0. Lauseke saa pienimmän arvo, kun $x+2=0$ ja $y-1=0$ eli pisteessä $(-2,1)$.

4 Ääriarvosovelluksia

190. Valitaan muuttujaksi x huoneen korkeus, jolloin $0 \le x \le 3$. Yhdenmuotoisista kolmioista (kuva) saadaan verranto $\frac{3-x}{y} = \frac{3}{4}$, josta



$y = \frac{4(3-x)}{3}$. Huoneen poikkileikkauksen ala $A(x) = 2yx = \frac{8(3-x)x}{3} = 8x - \frac{8}{3}x^2$. Tällöin A on x:n jatkuva funktio välillä $[0,3]$. Derivaatan $A'(x) = 8 - \frac{16}{3}x$ nollakohta on $x = 1{,}5$. Arvoista $A(0) = 0$, $A(3) = 0$ ja $A(1{,}5) = 6$ viimeinen on suurin. Koska huoneen pituus on vakio, on myös tilavuus suurin korkeuden arvolla 1,5 m. Mutta huone on tällöin käytäntöä ajatellen liian matala.

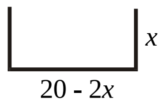
191. Jos toinen osa on x, ensimmäinen on $2x$ ja kolmas $1-3x$, jolloin $0 \le x \le \frac{1}{3}$. Merkitään $f(x) = 4x^2 + x^2 + (1-3x)^2 = 14x^2 - 6x + 1$. Funktio f on jatkuva välillä $0 \le x \le \frac{1}{3}$. Derivaatan $f'(x) = 28x - 6$ nollakohta on $x = \frac{3}{14}$. Se on ylöspäin aukeavan paraabelin huipun kohta, joten funktion pienin arvo on $f(\frac{3}{14}) = \frac{5}{14}$. Kysytyt osat ovat $\frac{6}{14}, \frac{3}{14}$ ja $\frac{5}{14}$.

192. Olkoon kilohinnan alennus x (€). Silloin myynnistä saatu nettotuotto on

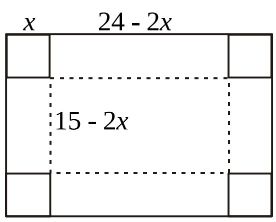
$$f(x) = (500 + 100 \cdot \frac{x}{0{,}2})(4-x) = (500 + 500x)(4-x),\ 0 \le x \le 4.$$

Funktio f on jatkuva välillä $[0,4]$. Sen derivaatan nollakohta on $x = 1\frac{1}{2}$. Arvoista $f(0) = 2\,000$, $f(4) = 0$ ja $f(1\frac{1}{2}) = 3125$ viimeksi mainittu on suurin, joten kilohinnan alennukseksi kannattaa määrätä 1,50 €. Tuottoisin kilohinta on 8,50 €.

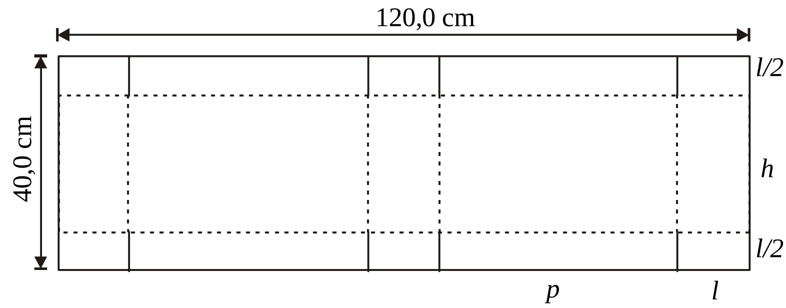
193. Olkoon x kourun korkeus (cm), $0 \le x \le 10$. Kouru kuljettaa vettä eniten silloin, kun sen poikkileikkauksen ala $A(x) = x(20-2x)$ on suurin mahdollinen. Pinta-alafunktion kuvaaja on osa alaspäin aukeavaa paraabelia, joten funktion suurin arvo on huipun kohdalla eli kohdassa $x = 5$. Kourun pitää olla 5 cm korkea ja 10 cm leveä.



194. Leikattavan neliön sivu on x (cm), $0 \le x \le 7{,}5$. Tilavuus $V(x) = x(24-2x)(15-2x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$ on x:n jatkuva funktio. Derivaatan $V'(x) = 12x^2 - 156x + 360$ nollakohdat ovat $x = 3$ ja $x = 10$, joista vain edellinen on määrittelyvälillä. Arvoista $V(0) = 0$, $V(7{,}5) = 0$ ja $V(3) = 486$ viimeksi mainittu on suurin, joten poistettavien neliöiden sivun pituus on 3 cm.

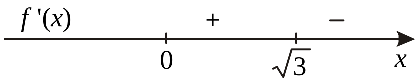


195. Laatikon tilavuus on $plh = (60 - \frac{3}{2}l)l(40 - l) = \frac{3}{2}l(l - 40)^2 = V(l), 0 \le l \le 40$. Derivaatan $V'(l) = \frac{3}{2}(l - 40)(3l - 40)$ nollakohdassa $\frac{40}{3}$ saadaan suurin tilavuus. Laatikon mitoiksi tulee 40,0 × 13,3 × 26,7 cm.



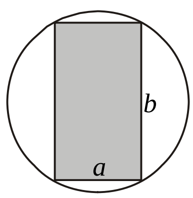
196. Olkoon kolmion kanta x (cm), $0 \le x \le 18$, jolloin korkeus $h = 18 - x$. Kolmion alaa esittää funktio $A(x) = \frac{1}{2}x(18 - x)$. Sen kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabelin kaari. Suurin arvo liittyy sen huippuun. Huippu on nollakohtien 0 ja 18 puolivälissä eli kohdassa $x = 9$, ja suurin arvo on $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9\ \text{cm}^2 = 40{,}5\ \text{cm}^2$.

197. Funktion $C(t) = \frac{5t}{t^2 + 3}$ derivaatan $C'(t) = \frac{5(3 - t^2)}{(t^2 + 3)^2}$ nollakohta määrittelyvälillä $t > 0$ on $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Koska funktio on aidosti kasvava välillä $0 < t \le \sqrt{3}$, ja aidosti vähenevä välillä $t \ge \sqrt{3}$, funktio saa suurimman arvon kohdassa $t = \sqrt{3}$. Siis pitoisuus on suurin, kun lääkkeen antamisesta on kulunut 1,73 h eli 1 h 44 min.



198. Olkoon alkuperäinen yksikköhinta 100a ja myynnin määrä 100b. Muutosten jälkeen myynti on $f(p) = (100a - pa)(100b + 1{,}1pb) = (100 - p)(100 + 1{,}1p)ab$, jossa $p > 0$. Funktion kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabelin kaari. Suurin arvo liittyy sen huippuun. Huippu on nollakohtien 100 ja $-\frac{100}{1{,}1}$ puolivälissä eli likimain kohdassa 4,5. Suurin myynnin arvo saavutetaan p:n arvolla 4,5.

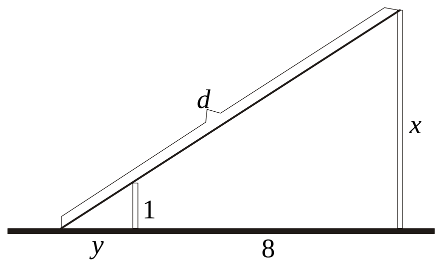
199. Koska tukin läpimitta on 54 (cm), parrun poikkileikkauksen sivu $b = \sqrt{54^2 - a^2}$ (ks. kuva). Kuormitukseen liittyvälle funktiolle $f(a) = ab^2 = a \cdot 54^2 - a^3$ on haettava suurin arvo välillä $0 \le a \le 54$. Derivaatan $f'(a) = 54^2 - 3a^2$ ainoa määrittelyvälillä oleva nollakohta on $a = 18\sqrt{3} \approx 31{,}2$. Sillä arvolla funktio saa suurimman arvonsa. Parrun mitat ovat 31 cm ja 44 cm.



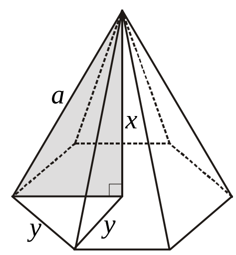
200. Kun pohjan säde on r ja korkeus h, niin $h + 2r = 20{,}0$ (cm), josta $r = 10 - \frac{h}{2}$. Tilavuus korkeuden funktiona on $V(h) = \pi r^2 h = \pi(10 - \frac{h}{2})^2 h, 0 \le h \le 20$. Funktio V on jatkuva välillä $0 \le h \le 20$, ja sen derivaatan $V'(h) = \dfrac{\pi}{4}(h-20)(3h-20)$ nollakohta on $h = \dfrac{20}{3}$. Arvoista $V(0) = 0$, $V(20) = 0$ ja $V(\dfrac{20}{3}) = \dfrac{8\,000\pi}{27} \approx 931$ viimeinen on suurin. Lieriön korkeuden pitää olla noin 6,7 cm, jolloin tilavuus on noin 931 cm^3.

201. Olkoon lieriön korkeus h ja pohjaympyrän säde r, yksikkönä 1 dm. Koska $\pi r^2 h = 1$, niin $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. Haetaan pinta-alafunktion $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{1}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{2}{r}$ pienin arvo väliltä $]0, \infty[$. Derivaatan $A'(r) = 2\pi r - \dfrac{2}{r^2}$ nollakohdaksi saadaan $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}683$, joka derivaatan merkkikaavion mukaan osoittautuu pienimmän arvon kohdaksi. Lieriön korkeus on tällöin sama kuin pohjan säde, eli noin 6,8 cm.

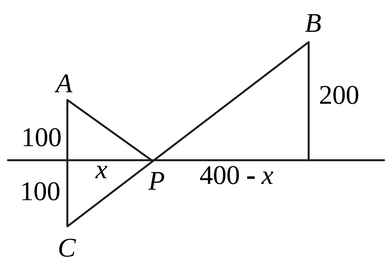
202. Oheisen kuvan yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{8+y}$, josta $y = \dfrac{8}{x-1}$. Olkoon d etäisyys lampusta lapsen varjon kauimmaiseen päähän. Silloin $d^2 = x^2 + (8+y)^2 = x^2 + (\dfrac{8x}{x-1})^2$. Etäisyys d on pienin, kun funktio $f(x) = x^2 + (\dfrac{8x}{x-1})^2$, $x >$ 1, saa pienimmän arvonsa. Derivaatan $f'(x) = 2x - \dfrac{128x}{(x-1)^3}$ ainoa kysymykseen tuleva nollakohta on $x = 5$. Derivaatan merkkikaavion perusteella kysymyksessä on pienimmän arvon kohta. Lyhtypylväs on 5 m korkea.



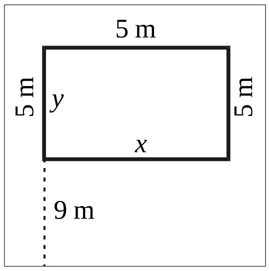
203. Olkoon pohjasärmä y ja korkeus x, $0 \le x \le a$. Silloin $x^2 + y^2 = a^2$ ja tilavuus $V(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y^2 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 x - x^3)$. Tilavuus V on x:n jatkuva funktio välillä $0 \le x \le a$. Sen derivaatan $V'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - 3x^2)$ nollakohta on $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Koska $V(0) = V(a) = 0$, niin $V(\dfrac{a}{\sqrt{3}}) = \dfrac{1}{3}a^3$ on suurin tilavuuden arvo.



204. Tuotantolaitokset sijaitsevat kohdissa A ja B. Peilataan piste A rannan suhteen ja yhdistetään saatu piste C pisteeseen B. Yhdysjana CB on pisteiden C ja B lyhin välimatka. Koska $CP = AP$, on myös murtoviiva APB lyhin mahdollinen reitti A:sta joen rannan kautta B:hen. Kuvan yhdenmuotoisista kolmioista saadaan lukuarvoyhtälö $\dfrac{100}{200} = \dfrac{x}{400-x}$, josta $x = 133\dfrac{1}{3}$. Pumppuasema tulee sijoittaa laitoksen A kohdalta 133 m pitkin joen rantaa.



205. Kuvan mukaisin merkinnöin talon pohjan pinta-ala neliömetreinä on $xy = 490$ ja tontin pinta-ala



katu

$$A(x) = (x+10)(y+14) = (x+10)(\frac{490}{x}+14)$$

$$= 14x + \frac{4\,900}{x} + 630, \quad x > 0.$$

Derivaatan $A'(x) = 14 - \frac{4\,900}{x^2}$ nollakohdaksi saadaan $x = \sqrt{350}$. Derivaatan merkkitarkastelu osoittaa sen pienimmän arvon kohdaksi. Tontin mitat ovat (x + 10) m $\approx 28{,}7$ m ja (y + 14) m $\approx 40{,}2$ m.

206. Koska polttoainekulut p (mk/h) ovat verrannolliset nopeuden v (km/h) kuutioon, niin $p = kv^3$, jossa vakion k arvo $\frac{3}{16}$ saadaan yhtälöstä $1500 = k \cdot 20^3$. Jos laiva ajaa matkan s nopeudella v, se käyttää aikaa $\frac{s}{v}$ tuntia, jolloin kokonaiskulut ovat

$$f(v) = \frac{3}{16}v^3 \cdot \frac{s}{v} + 12\,000 \cdot \frac{s}{v} = \frac{3}{16}sv^2 + 12\,000s \cdot \frac{1}{v}, \; v > 0.$$

Derivaatan $f'(v) = \frac{3}{8}sv - 12\,000s \cdot \frac{1}{v^2}$ nollakohdassa $v = \sqrt[3]{32\,000} \approx 31{,}7$ kokonaiskulut ovat pienimmillään. Nopeudella 32 km/h matka on edullisin.

207. Jos nopeus on v (km/h), bensiininkulutus on $0{,}0010v^2 - 0{,}068v + 4{,}9$ litraa tunnissa. Ajetaan matka s nopeudella v. Aikaa kuluu $t = \frac{s}{v}$ tuntia ja bensiiniä

$b(v) = \frac{s}{v}(0{,}0010v^2 - 0{,}068v + 4{,}9) = s(0{,}0010v - 0{,}068 + \frac{4{,}9}{v})$ litraa. Funktio b on jatkuva muuttujan arvoilla $v > 0$. Sen derivaatan $b'(v) = (0{,}0010 - \frac{4{,}9}{v^2})s$ ainoa nollakohta on $v = 70$. Derivaatta muuttuu sen ylityksessä negatiivisesta positiiviseksi, joten kysymyksessä on pienimmän arvon kohta. Taloudellisin ajonopeus on 70 km/h.

Lisätehtäviä

Rationaalifunktio

1.2.

Funktion *f* lauseke	Määrittelyjoukko	Nollakohdat
a) $x^2 - 1$	**R**	$x = \pm 1$
b) $x - \dfrac{1}{x}$	**R** \ {0}	$x = \pm 1$
c) $\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$	**R** \ $\{\pm\sqrt{2}\}$	ei nollakohtia
d) $\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$	**R**	$x = \pm\sqrt{2}$
e) $\dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$	**R** \ {0, –3}	$x = 3$
f) $\dfrac{x^2-9}{x^2+3x+3}$	**R**	$x = \pm 3$

3. $$f(x) = {}^{x(x+1))}1 - {}^{x+1)}\frac{1}{x} + {}^{x)}\frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x - x - 1 + x^2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x}$$

4. Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + a}$ on kaikkialla määritelty, kun nimittäjällä ei ole nollakohtia. Näin on, kun diskriminantti $1 - 4a < 0$ eli $a > \dfrac{1}{4}$.

Rationaaliyhtälö ja –epäyhtälö

1. Yhtälö $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+3} = 0$ ($x \neq 0, -3$) kirjoitetaan verrannon muotoon $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x+3}$ ja saadaan ristiin kertomalla $x + 3 = x^2$. Tämän toisen asteen yhtälön juuret $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ ovat yhtälön ratkaisut.

2. Kerrotaan yhtälö $\dfrac{x^2 - 3x}{2x+3} = x - 3$ nimittäjällä $2x + 3 \neq 0$, jolloin saadaan yhtälö $x^2 - 3x = 2x^2 - 3x - 9$ ja siitä $x^2 - 9 = 0$. Tästä $x = \pm 3$ $(\neq -\dfrac{3}{2})$

3. Yhtälön $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{2(x-1)}{x-2}$ määrittelyehto on $x \neq 2$. Poistetaan nimittäjät kertomalla lausekkeella 3(x – 2), jolloin saadaan sievennysten jälkeen $x^2-5x+6=0$. Tästä saadaan ratkaisut x = 2 tai x = 3. Vain jälkimmäinen on annetun yhtälön juuri.

4. **a)**

$$\frac{x+3}{x-3} \leq 0$$

x + 3	–	+	+
x - 3	–	–	+
osamäärä	+	–	+
	-3	3	

Ratkaisu: $-3 \leq x < 3$

b)

$$\frac{x^2+x}{x^2-4} > 0$$

$x^2 + x$	+	+	–	+	+
x^2 - 4	+	–	–	–	+
osamäärä	+	–	+	–	+
	-2	-1	0	2	

Ratkaisu: x < –2 tai –1 < x < 0 tai x > 2

c) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{-2}{x^2-1} \geq 0$

Epäyhtälö toteutuu, kun $x^2-1<0$ eli arvoilla –1 < x < 1.

d)

$$\frac{x}{x-3} < \frac{x-3}{x} \Leftrightarrow \frac{6x-9}{x(x-3)} < 0$$

6x - 9	–	–	+	+
x(x - 3)	+	–	–	+
osamäärä	–	+	–	+
	0	$\frac{3}{2}$	3	

Ratkaisu: x < 0 tai $1\frac{1}{2} < x < 3$

5. $\dfrac{4x^2+1}{x} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)^2}{x} \geq 0$ toteutuu aina, kun x > 0.

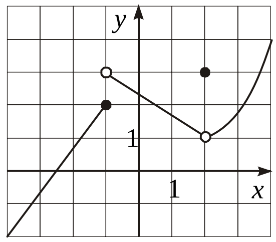
6. On ratkaistava epäyhtälö $x > \dfrac{1}{x}$ eli $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$.
Merkkikaavion nojalla –1 < x < 0 tai x > 1.

x^2 - 1	+	–	–	+
x	–	–	+	+
osamäärä	–	+	–	+
	-1	0	1	

7. Olkoon pienemmän levyn pinta-ala x (m^2), jolloin suuremman ala on x + 0,20. Lukumääristä saadaan yhtälö $\dfrac{20}{x}-5=\dfrac{20}{x+0{,}20}$, joka sievenee toisen asteen yhtälöksi $5x^2+x-4=0$. Sen juurena on x = 0,8 (tai x = –1). Pienemmän levyn ala on 0,8 m^2 ja suuremman 1,0 m^2.

8. Jos kylpyammeen tilavuus on V ja nopeampi täyttää sen x:ssä minuutissa, niin hitaampi täyttää ammeen (x + 15) minuutissa. Täyttönopeudet minuutissa ovat vastaavasti $\dfrac{V}{x}$ ja $\dfrac{V}{x+15}$. Koska samanaikainen täyttö vie aikaa 18 minuuttia, saadaan yhtälö $18(\dfrac{V}{x}+\dfrac{V}{x+15})=V$ eli $x^2-21x-270=0$. Siitä x = 30 (tai x = –9). Ammeen täyttäminen eri hanoilla kestää 30 minuuttia ja 45 minuuttia.

Raja-arvo



1. **a)** $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 3$ ja $f(-1)\ 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 1$ ja $f(2) = 3$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+3x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} 3x = -3$

b) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2-32}{3x+12} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2(x+4)(x-4)}{3(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2(x-4)}{3} = -\dfrac{16}{3} = -5\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1{,}5} \dfrac{2x^2+x-3}{2x+3} = \lim\limits_{x\to -1{,}5} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{2x+3} = \lim\limits_{x\to -1{,}5} (x-1) = -2\dfrac{1}{2}$

3. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} (2-x^2-x^3) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}-1\right) = -\infty\ \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}-1\right) = -1\right)$

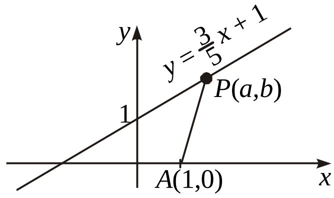
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-3)^2}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6x+9}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-4x^3}{(1+2x)^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-4x^3}{x^3(\frac{1}{x}+2)^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^3}-4}{(\frac{1}{x}+2)^3} = \dfrac{-4}{2^3} = -\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

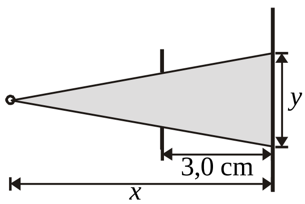
5. Funktiolla $f(x) = \begin{cases} ax^2+a^2, \text{kun } x < -1, \\ 2x^2+x, \text{kun } x > -1, \end{cases}$ on raja-arvo kohdassa $x = -1$, kun

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} f(x)$. Saadaan yhtälö $a + a^2 = 2-1$, josta $a = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



6. **a)** Janan AP kulmakerroin on $\dfrac{b-0}{a-1} = \dfrac{b}{a-1} = \dfrac{\frac{3}{5}a+1}{a-1}$.

b) $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{\frac{3}{5}a+1}{a-1} = \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} = \dfrac{3}{5}$.



7. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2{,}0}{x-3{,}0}$,

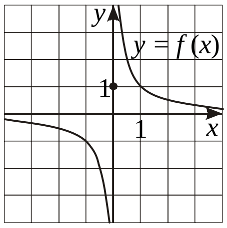
josta $y = \dfrac{2{,}0x}{x-3{,}0}$. Tämä lähestyy arvoa 2,0 (cm), kun $x \to \infty$.

8. **a)** Paraabelien $y = ax^2$ ja $y = 4a - x^2$ $(a > 0)$ leikkauskohta ensimmäisessä neljänneksessä saadaan yhtälön $ax^2 = 4a - x^2$ ratkaisuna, joka on $x = \sqrt{\dfrac{4a}{a+1}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}$. Leikkauspisteen y-koordinaatti on $\dfrac{4a^2}{a+1}$.

b) Kun $a \to 0$, niin $x \to 0$ ja $y \to 0$, joten piste P lähestyy origoa.

c) Kun $a \to \infty$, niin $x = \sqrt{\dfrac{4}{1+1/a}} \to 2$ ja $y \to \infty$, joten P lähestyy "pistettä" $(2, \infty)$.

9. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+nx}{1+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n+x}{1/n+x^2} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, kun $x \neq 0$. Kun $x = 0$, niin $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1} = 1$. Funktion kuvaaja on siis hyperbeli $y = \dfrac{1}{x}$ lisättynä erillisellä pisteellä (0, 1).



10. Jotta raja-arvo $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3 + ax - x + 2a}{x-2}$ olisi olemassa, tulee osoittajan nollakohtana olla $x = 2$. Näin syntyvästä yhtälöstä $2^3 + 2a - 2 + 2a = 0$ saadaan $a = -\dfrac{3}{2}$. Tällöin

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3 + ax - x + 2a}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{x^3 - \frac{5}{2}x - 3}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + \frac{3}{2})}{x-2} = 9\frac{1}{2}.$$

Jatkuvuus

1. Funktion $f(x) = \dfrac{x-2}{3x^2 - 6x}$ raja-arvo kohdassa $x = 2$ on $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{3x(x-2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{6}$.

Kun määritellään $f(2) = \dfrac{1}{6}$, funktio tulee jatkuvaksi kohdassa $x = 2$.

2. Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x-4}$ raja-arvo kohdassa $x = 4$ on

$$\lim_{x\to4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Kun määritellään $f(4) = \dfrac{1}{4}$, funktio tulee jatkuvaksi kohdassa $x = 4$.

3. $$f(x) = \frac{4}{x^2-4} + \frac{3-x}{2-x} = \frac{4}{x^2-4} + \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2},$$

joten $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \dfrac{3}{4}$. Kun määritellään $f(2) = \dfrac{3}{4}$, funktio f on jatkuva kohdassa $x = 2$.

4. Koska $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ kun } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$ on $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} 2^x = 2$ ja

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = 2$. Siis

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Koska myös $f(1) = 2$, on funktio f jatkuva kohdassa $x = 1$.

5. Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$ on jatkuva välillä $[-2,2]$, kun se on tällä välillä määritelty. Näin on, kun $x + a$ ei ole nolla kyseisellä välillä. Nimittäjään liittyy nouseva suora, joka ei saa leikata x-akselia välillä $[-2,2]$. Saadaan ehdot $-2 + a > 0$ tai $2 + a < 0$ ja niistä $a > 2$ tai $a < -2$.

6. **a)** $f(x)=\begin{cases} t-x, \text{ kun } x \le 1 \\ \sqrt{x}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$. Jatkuvuudelle välttämätön ehto

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ johtaa yhtälöön $t - 1 = 1$, josta $t = 2$. Tällä t:n arvolla

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, joten funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 = 1$.

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-t}{2}, \text{ kun } x < 2 \\ \dfrac{t}{x-1}, \text{ kun } x \ge 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$, Jatkuvuudelle välttämätön ehto

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} f(x)$ johtaa yhtälöön $\dfrac{2-t}{2} = \dfrac{t}{1}$, josta $t = \dfrac{2}{3}$. Tällä t:n arvolla

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \dfrac{2}{3}$, joten funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 = 2$.

Derivaatta

1. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-(2+h)-2}{h}$

$= \dfrac{4+4h+h^2-2-h-2}{h} = \dfrac{h(h+3)}{h} = h+3 \to 3, \text{ kun } h \to 0$

Siis $f'(2) = 3$.

2. Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$. Derivaatan nollakohdat ovat $\dfrac{2}{3}$ ja -2.

3. **a)** $\mathrm{D}\, x(1-2x) = \mathrm{D}(x-2x^2) = 1-4x$ **b)** $\mathrm{D}\,(1-2x)^2 = \mathrm{D}(4x^2-4x+1) = 8x-4$

c) $\mathrm{D}\,\dfrac{x^4-20x^3+8x}{4} = \mathrm{D}(\dfrac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 2x) = x^3 - 15x^2 + 2$

4. **a)** $D(x-5)^5 = 5(x-5)^4$ **b)** $D(5-x)^5 = 5(5-x)^4 \cdot (-1) = -5(5-x)^4 = -5(x-5)^4$

c) $D\,x(x-5)^5 = 1\cdot(x-5)^5 + x\cdot 5(x-5)^4 = (x-5)^4(x-5+5x) = (x-5)^4(6x-5)$

5. **a)** $D\dfrac{1}{x^3} = Dx^{-3} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

b) $D\dfrac{1}{(x+1)^3} = D(x+1)^{-3} = -3(x+1)^{-4} = -\dfrac{3}{(x+1)^4}$

c) $D\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

6. $$D\frac{fg}{f+g} = \frac{(f'g+fg')(f+g)-fg(f'+g')}{(f+g)^2}$$
$$= \frac{f'gf+f'gg+fg'f+fg'g-fgf'-fgg'}{(f+g)^2} = \frac{f'g^2+g'f^2}{(f+g)^2}$$

7. **a)** $g'(x) = f(x)+xf'(x)$, joten $g'(-1) = f(-1)+(-1)\cdot f'(-1) = 3-(-2) = 5$.

b) $h'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4}$, joten $h'(-1) = \dfrac{f'(-1)\cdot(-1)^2 - f(-1)\cdot 2\cdot(-1)}{(-1)^4}$

$= \dfrac{-2-3\cdot(-2)}{1} = 4$.

8. Kun $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, niin tulon derivoimissäännön mukaan $f'(x)$
$= (x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c)$.

Tästä $f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d)$.

9. **a)** $v(t) = s'(t) = 5{,}0t+17$ ja $a(t) = v'(t) = 5{,}0$, joten nopeus hetkellä 1,0 s on 22 m/s ja kiihtyvyys 5,0 m/s^2

b) Nopeus on 100 km/h hetkellä, jolloin 5,0t +17 = 27,8. Ajanhetkeksi tulee t = 2,2 s.

10. **a)** Tiedetään, että $f(0) = -1$ ja $f'(0) = 3$. Silloin
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)+1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) = 3$.

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3h)+1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+3h)-f(0)}{3h}\cdot 3 = f'(0)\cdot 3 = 9$.

11. Tiedetään, että $f'(a) = k$. Koska
$\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$,
niin $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = f'(a)+f'(a) = k+k = 2k$.

Tangentti ja normaali

1. Paraabelin $y = 1 + 4x - x^2$ huipussa derivaatta $y' = 4 - 2x$ on nolla, joten huippu on kohdassa $x = 2$. Silloin $y = 5$.

2. Käyrällä $y = (2x+1)^3 - 54x$ on vaakasuora tangentti kohdassa, jossa derivaatta $y' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 - 54$ on nolla. Nämä kohdat ovat $x = 1$ ja $x = -2$. Vastaavat y:n arvot ovat –27 ja 81. Kysytyt tangentit ovat $y = -27$ ja $y = 81$.

3. Käyrän $y = (x+1)^4 - 4x$ tangentti on vaakasuora kohdassa, jossa derivaatalla $y' = 4(x+1)^3 - 4$ on arvo nolla. Tällöin $(x+1)^3 = 1$ ja siitä ainoana ratkaisuna $x = 0$. Kysytty käyrän piste on (0, 1).

4. **a)** Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x - 1$ kuvaajalle piirretty tangentti on suoran $y = -x + 2$ suuntainen kohdassa, jossa derivaatta $f'(x) = x^2 - 2$ saa arvon –1. Nämä kohdat ovat $x = 1$ ja $x = -1$ ja vastaavat käyrän pisteet $(1, -2\frac{2}{3})$ ja $(-1, \frac{2}{3})$. Tangenttien yhtälöt ovat $y + 2\frac{2}{3} = -(x-1)$ ja $y - \frac{2}{3} = -(x+1)$ eli $y = -x - 1\frac{2}{3}$ ja $y = -x - \frac{1}{3}$.

b) Normaali on suoran $y = -x + 2$ suuntainen kohdassa, jolle $-\frac{1}{x^2 - 2} = -1$. Tästä $x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$. Vastaavat y:n arvot ovat $-\sqrt{3} - 1$ ja $\sqrt{3} - 1$. Kummankin käyrän pisteen kautta kulkevalle normaalille saadaan yhtälö $y = -x - 1$.

5. Paraabelille $y = x^2$ pisteeseen $(-1, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö on $y = -2x - 1$. Tämän tangentin ja suoran $y = -x$ välinen terävä kulma α saadaan yhtälöstä
$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-2+1}{1+2}\right| = \frac{1}{3}$, josta $\alpha \approx 18{,}4°$.

6. Tangentin kulmakerroin 9 on derivaatan $y' = 3x^2 - 3$ arvo kohdassa $x = 2$. Normaalin kulmakerroin on $-\frac{1}{9}$. Tangentin ja normaalin yhtälöt ovat vastaavasti

$y - 2 = 9(x-2)$ ja $y - 2 = -\frac{1}{9}(x-2)$.

a) Asetetaan $y = 0$, jolloin tangentin yhtälöstä $x = 1\frac{7}{9}$ ja normaalin yhtälöstä $x = 20$.

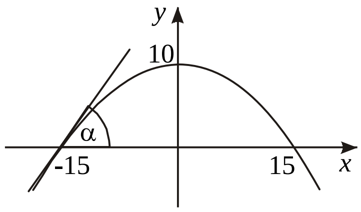
Leikkauskohtien välisen janan pituus on $20 - 1\frac{7}{9} = 18\frac{2}{9}$.

b) Asetetaan $x = 0$, jolloin tangentin yhtälöstä $y = -16$ ja normaalin yhtälöstä $y = 2\frac{2}{9}$.

Leikkauskohtien välisen janan pituus on $2\frac{2}{9} - (-16) = 18\frac{2}{9}$.

7. Käyrälle $y = \frac{2}{x}$ pisteeseen (1, 2) piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatan $y' = -\frac{2}{x^2}$ arvo kohdassa $x = 1$ eli $y'(1) = -\frac{2}{1} = -2$, joten normaalin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Normaalin yhtälö on $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$. Tämä leikkaa koordinaattiakselit kohdissa $x = -3$ ja $y = \frac{3}{2}$. Kysytty kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot |-3| \cdot \frac{3}{2} = 2\frac{1}{4}$.

8. Lentorata yhtyy paraabeliin $y = ax^2 + b$, jossa $b = 10$. Paraabelin ja x-akselin leikkauskohtien väli on 30, jolloin $a \cdot 15^2 + 10 = 0$ ja $a = -\frac{2}{45}$. Paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{2}{45}x^2 + 10$. Derivaatan $y' = -\frac{4}{45}x$ arvo kohdassa $x = -15$ antaa tähän kohtaan asetetun tangentin kulmakertoimen $\frac{4}{3}$. Yhtälöstä $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ratkeaa lähtökulmaksi 53,1°.

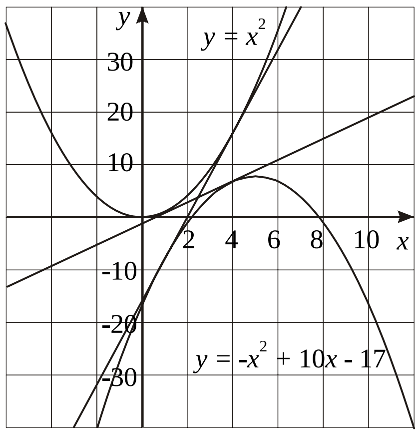


9. Valitaan paraabelin yhtälöksi $y = ax^2 + bx$, jolloin $y' = 2ax + b$ ja $y'(0) = \tan 30°$. Saadaan $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Koska $y(50) = 2500a + 50b = 0$, on $a = -\frac{b}{50} = -\frac{1}{50\sqrt{3}}$. Paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{x^2}{50\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Koska huippu on kohdalla $x = 25$, on lentoradan lakikorkeus $h = -\frac{625}{50\sqrt{3}} + \frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{25}{2\sqrt{3}} \approx 7{,}2$. Pallo käy 7,2 m:n korkeudella.

10. Yhteinen tangentti sivutkoon käyriä $y = x^2$ ja $y = -x^2 + 10x - 17$ vastaavasti pisteissä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Tangentin kulmakertoimesta saadaan yhtälöpari

$2x_1 = -2x_2 + 10 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Siihen tehdyt sijoitukset $x_2 = -x_1 + 5$, $y_1 = x_1^2$ ja $y_2 = -x_2^2 + 10x_2 - 17$ johtavat yhtälöön

$2x_1 = \frac{-2x_1^2 + 8}{-2x_1 + 5}$ eli $x_1^2 - 6x_1 + 4 = 0$. Sen juurina ovat $x_1 = 4$ tai $x_1 = 1$, jolloin vastaavasti $y_1 = 16$ tai $y_1 = 1$.



Saadaan kaksi yhteistä tangenttia. Niiden yhtälöt ovat $y - 16 = 8(x - 4)$ ja $y - 1 = 2(x - 1)$ eli $y = 8x - 16$ ja $y = 2x - 1$.

Funktion kulun tutkiminen. Ääriarvot

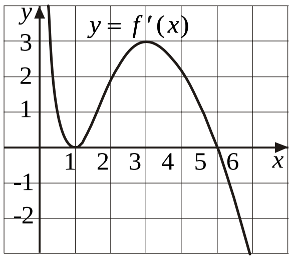
1. Olkoot x_1 ja x_2 kaksi satunnaisesti valittua muuttujan arvoa niin, että $x_1 < x_2$. Silloin $f(x_1) - f(x_2) = 5 - \frac{x_1}{2} - (5 - \frac{x_2}{2}) = \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$. Tästä nähdään, että $f(x_1) > f(x_2)$, mikä osoittaa, että funktio $f(x) = 5 - \frac{x}{2}$ on aidosti vähenevä.

2. Funktiolle $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 15$ on $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$. Derivaattaa edustaa ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa *x*-akselin kohdissa –3 ja $\frac{1}{3}$. Derivaatan merkin nojalla funktio on aidosti kasvava väleillä $\left]-\infty, -3\right]$ ja $\left[\frac{1}{3}, \infty\right[$.

3. Funktion $f(x) = (x-1)^3(x-2)$ derivaatta on $f'(x) = 3(x-1)^2(x-2) + (x-1)^3$ $= (x-1)^2(3(x-2) + (x-1) = (x-1)^2(4x-7)$. Derivaatan merkkikaavio on ohessa. Sen mukaan funktio on kasvava välillä $\left[1\frac{3}{4}, \infty\right[$ ja vähenevä välillä $\left]-\infty, 1\frac{3}{4}\right]$.

$(x-1)^2$	+	+	+
$4x-7$	–	–	+
$f'(x)$	–	–	+
		1	$1\frac{3}{4}$

4. **a)** Funktio *f* on kasvava välillä $\left]0,5\right]$, koska sillä välillä $f'(x) \geq 0$.
b) Funktiolla *f* on ääriarvo kohdassa *x* = 5. Ääriarvo on maksimi, koska kyseisen kohdan ylityksessä derivaatta muuttuu positiivisesta negatiiviseksi.



5. Funktion $P: P(x) = x^2 + 4x + a$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu ja samalla funktion pienin arvo sijaitsee derivaatan 2*x* + 4 nollakohdassa *x* = –2. Funktio *P* ei saa negatiivisia arvoja, jos $P(-2) = 4 - 8 + a \geq 0$ eli jos $a \geq 4$.

6. Olkoon *P*(*x*, *y*) käyrän $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ piste. Koordinaattien summa on silloin $s(x) = x + \frac{1}{4}x^2 - 1$. Tämän funktion *s* kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, joten pienin arvo liittyy sen huippuun. Huippu on derivaatan $s'(x) = \frac{1}{2}x + 1$ nollakohdassa $x = -2$. Koordinaattien summa on mahdollisimman pieni pisteessä $P(-2{,}0)$.

7. **a)** Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$ nollakohdat määräytyvät yhtälöstä $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4 = 0$. Merkitään $x^2 = y$, jolloin $\frac{1}{2}y^2 - 3y + 4 = 0$ ja edelleen $y = 4$ tai $y = 2$. Silloin $x = \pm 2$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.

b) Derivaatta on $f'(x) = 2x^3 - 6x$ ja se saa funktion nollakohdissa seuraavat arvot: $f'(2) = 4$, $f'(-2) = -4$, $f'(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, $f'(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

c) Funktiolla *f* voi olla ääriarvo vain derivaatan nollakohdissa, jotka ovat 0 ja $\pm\sqrt{3}$. Derivaatan merkkikaavion perusteella 0 on maksimin kohta kun taas kohdissa $\pm\sqrt{3}$ on minimi. Maksimi on $f(0) = 4$ ja minimit $f(\pm\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$.

8. Koska piste (–1, 8) on funktion $f(x) = ax^3 + bx$ kuvaajalla, on $f(-1) = 8$. Ääriarvo voi sijaita vain derivaatan $f'(x) = 3ax^2 + b$ nollakohdassa, joten $f'(-1) = 0$. Yhtälöparista $-a - b = 8$ ja $3a + b = 0$ saadaan $a = 4$ ja $b = -12$, joten $f'(x) = 12x^2 - 12$. Derivaatan nollakohdat ovat ±1. Merkkikaaviosta päätellään, että f on aidosti kasvava, kun $x \le -1$ tai $x \ge 1$, ja aidosti vähenevä, kun $-1 \le x \le 1$.

9. Funktiolla $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ voi olla ääriarvoja vain derivaatan $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ nollakohdissa. Sellaisia nollakohtia, joissa derivaatan merkki vaihtuu, saadaan asettamalla diskriminantti $D = 4a^2 - 4 \cdot 3b > 0$. Kertoimia sitoo siis ehto $a^2 > 3b$.

10. Funktio $f(x) = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Pienin arvo liittyy paraabelin huippuun. Huipun kohta löydetään asettamalla derivaatta nollaksi:

$f'(x) = -2(a - x) - 2(b - x) - 2(c - x) = 6x - 2(a + b + c) = 0$, josta $x = \dfrac{a+b+c}{3}$. Tämä on funktion pienimmän arvon kohta.

11. **a)** Funktio $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 1}$ on määritelty muualla paitsi kohdissa $x = \pm 1$. Ainoa kohta, jossa derivaatta $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$ vaihtaa merkkinsä, on $x = 0$. Ääriarvoksi saadaan maksimi $f(0) = 1$.

b) Funktio $f(x) = -x + \dfrac{1}{x^2}$ on määritelty muualla paitsi origossa. Derivaatta

$f'(x) = -1 - \dfrac{2}{x^3}$ muuttuu ainoan nollakohtansa $-\sqrt[3]{2}$ ylityksessä negatiivisesta positiiviseksi, joten kysymyksessä on minimi, arvoltaan $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2} \approx 1{,}89$.

c) Funktio $f(x) = \dfrac{10x^2 - 30}{x^3}$ on määritelty muualla paitsi origossa. Derivaatan

$f'(x) = \dfrac{-10x^2 + 90}{x^4}$ nollakohdat ovat –3 ja 3. Edellinen osoittautuu derivaatan merkkitarkastelussa minimin, jälkimmäinen maksimin kohdaksi. Funktion ääriarvot ovat minimi $f(-3) = -2\dfrac{2}{9}$ ja maksimi $f(3) = 2\dfrac{2}{9}$.

12. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+3}$ on määritelty muualla paitsi kohdassa $x=-\dfrac{3}{2}$. Derivaatta $f'(x)=\dfrac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$ on nolla kohdissa $x = –3$ ja $x = 0$. Merkkikaavion mukaan funktion arvot kasvavat –3:een asti, jossa funktiolla on maksimi $f(-3)=-3$. Tämän jälkeen arvot pienenevät. $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}-} f(x)=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}+} f(x)=\infty$. Kohdan $x=-\dfrac{3}{2}$ jälkeen arvot pienenevät kohtaan $x = 0$ asti, jossa funktiolla on minimi $f(0)=0$. Tämän jälkeen arvot kasvavat. Voidaan päätellä, että funktio ei saa välillä $]-3,0[$ olevia arvoja.

13. Funktio $f(x)=x^4-bx^2-5$ on polynomifunktiona kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Raja-arvot äärettömyyksissä ovat $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$. Jotta funktion arvojoukko olisi $[–10, \infty [$, on funktion pienimmän arvon oltava –10.

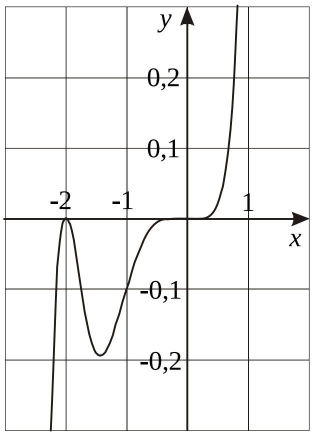
Pienimmän arvonsa funktio f voi saada vain derivaatan nollakohdassa. Derivaatta on $f'(x)=4x^3-2bx=2x(2x^2-b)$. Jos olisi $b\le 0$, funktion ainoa ääriarvokohta olisi minimikohta $x = 0$. Tällöin funktion pienin arvo olisi –5. Siis tulee olla $b > 0$. Silloin derivaatalla on kolme nollakohtaa: $-\sqrt{\dfrac{b}{2}}$, 0 ja $\sqrt{\dfrac{b}{2}}$. Näistä kohta $x = 0$ on derivaatan merkkikaavion perusteella paikallisen maksimin kohta, joten funktion pienin arvo on $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)=\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b^2}{2}-5=-10$. Tästä $b=\pm2\sqrt{5}$, joista valitaan positiivinen juuri.

14. Käyrien $y=-x^4-4x^3+3$ ja $y=3x^2+8$ yhteisten pisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälön $-x^4-4x^3+3=3x^2+8$ eli $x^4+4x^3+3x^2+5=0$ ratkaisuina. Merkitään $f(x)=x^4+4x^3+3x^2+5$, jolloin $f'(x)=4x^3+12x^2+6x = 2x(2x^2+6x+3)$. Derivaatan nollakohdat ovat $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$ ja $x_3=0$. Kohdissa x_1 ja x_3 ovat minimit, ja niiden arvot ovat $\dfrac{11-6\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}15$ ja 5. Ensin mainittu on funktion pienin arvo, joten funktiolla ei ole nollakohtia. Se todistaa tehtävän väitteen.

$2x$	–	–	–	+
$2x^2+6x+3$	+	–	+	+
$f'(x)$	–	+	–	+
	$\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$	0	

15. Käyrän $y=\dfrac{2}{x^2}$ piste on $(x, y)=(x,\dfrac{2}{x^2})$. Sen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^4}}$. Etäisyys saa pienimmän arvonsa, kun juurrettava $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^4}$, $x > 0$, on arvoltaan pienin. Derivaatan $f'(x)=2x-\dfrac{16}{x^5}$ nollakohdat $\pm\sqrt{2}$ ovat minimikohtia ja samalla funktion pienimmän arvon kohtia. Kysytyt käyrän pisteet ovat tällöin $(\pm\sqrt{2},1)$.

16. Funktion $f(x) = 0{,}1x^5(x+2)^2$ kuvaaja on ohessa. Funktiolla on maksimi $f(-2) = 0$ ja minimi kahden desimaalin tarkkuudella $f(-1{,}43) \approx -0{,}19$.

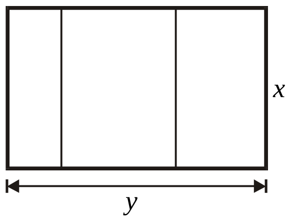


Sanallisia ääriarvosovelluksia

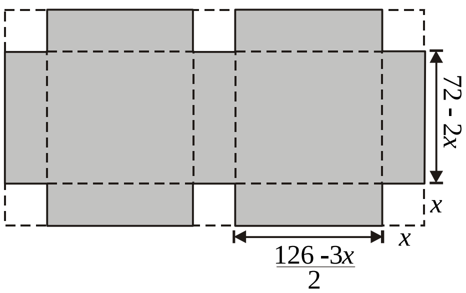
1. Olkoot luvut x ja y. Niiden erotus on 7 eli $x - y = 7$. Lukujen neliöiden summa on $s(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (x-7)^2 = 2x^2 - 14x + 49$. Summan pienin arvo liittyy kuvaajana olevan ylöspäin aukeavan paraabelin huippuun. Huippu on derivaatan $s'(x) = 4x - 14$ nollakohdassa $x = 3½$. Luvut ovat 3½ ja –3½.

2. Olkoot positiiviluvut x ja y. Niiden summa on 12 eli $x + y = 12$. Toisen luvun ja toisen kuution tulo on $t(x) = xy^3 = x(12-x)^3$, jossa $0 < x < 12$. Tämän ääriarvo voi esiintyä vain derivaatan nollakohdassa. Derivaatta on $t'(x) = (12-x)^3 - 3x(12-x)^2$ $= (12-x)^2(12 - x - 3x) = (12-x)^2(12-4x)$. Ainoa kysymykseen tuleva nollakohta on $x = 3$. Se on derivaatan merkkitarkastelun perusteella suurimman arvon kohta. Kysytyt luvut ovat 3 ja 9.

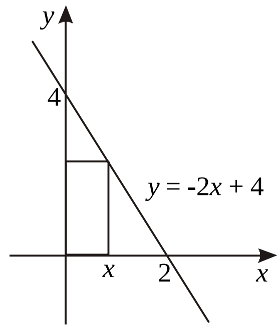
3. Olkoon leveys x ja pituus y. Saadaan yhtälö $4x + 2y = 200$, josta $y = 100 - 2x$. Altaan pinta-ala on $A(x) = x(100-2x)$, jossa $0 \le x \le 50$. Derivaatan $A'(x) = 100 - 4x$ nollakohta on $x = 25$. Luvuista $A(0) = 0$, $A(50) = 0$ ja $A(25) = 1\,250$ viimeksi mainittu on suurin. Altaan mitat ovat 50 m, 25 m ja väliaidan pituus 25 m.



4. Olkoon neliön sivun pituus x, joka on samalla laatikon korkeus. Laatikon pituus (cm) on $\frac{126-3x}{2}$ ja leveys $72 - 2x$, jolloin $0 \le x \le 36$. Laatikon tilavuus on $V(x) =$ $(63 - 1{,}5x)(72-2x)x = 3x^3 - 234x^2 + 4536x$. Derivaatta $V'(x) = 9x^2 - 468x + 4536$ saa arvon nolla kohdassa $x = 26 - 2\sqrt{43} \approx 12{,}9$. Tämä on samalla tilavuuden suurimman arvon kohta. Poistettavien neliöiden sivun pituus on noin 13 cm.

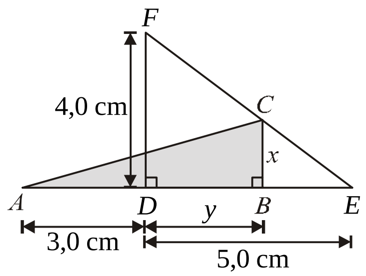


5. **a)** Olkoon suorakulmion kanta x, jolloin pinta-ala on $A(x) = x(-2x+4) = -2x^2 + 4x,\ 0 \le x \le 2$. Derivaatan $A'(x) = -4x + 4$ nollakohta on 1. Arvoista $A(0) = 0$, $A(2) = 0$ ja $A(1) = 2$ viimemainittu on suurin. Alan suurin arvo on 2.



b) Kun suorakulmio pyörähtää y-akselin ympäri, syntyy lieriö, jonka tilavuus on $V(x) = \pi x^2(-2x+4) = 2\pi(-x^3 + 2x^2)$. Sen derivaatan $V'(x) = 2\pi(-3x^2 + 4x)$ nollakohta tarkasteluvälillä on $x = \frac{4}{3}$. Arvoista $V(0) = 0$, $V(2) = 0$ ja $V(\frac{4}{3}) = \frac{64\pi}{27}$ viimemainittu on suurin.

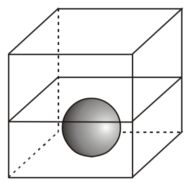
6. Kolmion ABC pinta-ala on $A(x) = \frac{1}{2}\cdot(3+y)x$, jossa y on janan DB pituus ja $0 \le x \le 4$. Yhdenmuotoisista kolmioista BEC ja DEF saadaan verranto $\frac{5-y}{x} = \frac{5}{4}$, josta $y = 5 - \frac{5}{4}x$. Sijoitetaan tämä kolmion pinta-alan lausekkeeseen, joka saa tällöin muodon $A(x) = 4x - \frac{5}{8}x^2$. Derivaatan $A'(x) = 4 - \frac{5}{4}x$ nollakohta on $x = 3{,}2$. Luvuista $A(0) = 0$, $A(4) = 6$ ja $A(3{,}2) = 6{,}4$ viimeksi mainittu on suurin. Kysytty kateetin BC pituus on 3,2 cm.



7. Olkoon pohjan sivu x (m) ja korkeus h (m). Tilavuusehdosta $x^2h = 32$ saadaan $h = \frac{32}{x^2}$.

Pohjan ja seinien yhteinen ala on $A(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{128}{x},\ x > 0$. Derivaatan nollakohdassa $x = 4$ jatkuvalla funktiolla A on ainoa ääriarvo, joka on minimi ja samalla funktion pienin arvo. Uima-altaan mitat ovat 4 × 4 × 2 m.

8. Olkoon kiven säde r, $0 \le r \le \frac{1}{2}$ (m). Kun kivi juuri ja juuri peittyy, kuutiossa on vettä määrä $f(r) = 2r - \frac{4}{3}\pi r^3$. Derivaatta $f'(r) = 2 - 4\pi r^2$ on nolla, kun $r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$. Arvoista $f(0) = 0$, $f(\frac{a}{2}) = a^3(1 - \frac{\pi}{6})$ ja $f(\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\pi}$ viimeksi mainittu on suurin. Kivi, jonka säde on $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\,\mathrm{m} \approx 40\,\mathrm{cm}$, vaatii peitetyksi tulemiseen eniten vettä, ja vettä kuluu silloin $\frac{2\sqrt{2\pi}}{3\pi}\,\mathrm{m}^3 \approx 0{,}53\,\mathrm{m}^3$.

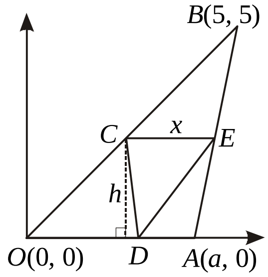


9. Olkoon suoran yhtälö $y = kx + b$. Koska suora kulkee pisteen (–1, 2) kautta, pätee $2 = -k + b$, josta $k = b - 2$. Jotta suora rajaisi toiseen neljännekseen kolmion, tulee olla $b > 2$. Suora leikkaa koordinaattiakselit kohdissa $y = b$ ja $x = -\frac{b}{k} = \frac{b}{2-b}$.

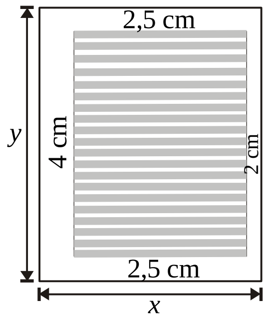
Kolmion pinta-ala on $A(b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$. Sen derivaatan $A'(b) = \frac{b(b-4)}{2(b-2)^2}$

nollakohta $b = 4$ osoittautuu pienimmän arvon kohdaksi. Kolmion pinta-alan pienin arvo on $A(4) = 4$.

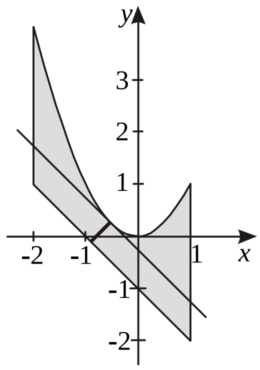
10. Olkoon h kolmion CDE korkeus. Yhdenmuotoisissa kolmioissa OAB ja CEB on korkeuksien suhde yhtä suuri kuin kantojen suhde, joten $\frac{5}{a} = \frac{5-h}{x}$. Tästä $h = 5 - \frac{5x}{a}$. Kolmion CDE pinta-ala on $A(x) = \frac{5x}{2} - \frac{5x^2}{2a}$, $0 \le x \le a$. Derivaatan $A'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5x}{a}$ nollakohta on $x = \frac{a}{2}$. Luvuista $A(\frac{a}{2}) = \frac{5a}{8}$, $A(0) = 0$ ja $A(a) = a$ ensimmäinen on suurin, joten kysytty janan CE pituus on $\frac{a}{2}$.



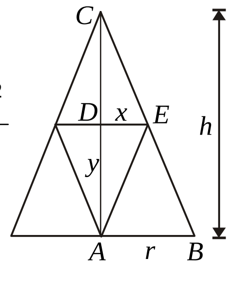
11. Olkoon arkin mitat x ja y. Ne ovat edullisimmat silloin, kun arkin ala xy on pienin. Ehtona on, että tekstialue on $(x-6)(y-5) = 360$, josta $y = \frac{360}{x-6} + 5$. Arkin ala on siis $A(x) = \frac{360x}{x-6} + 5x$, $x > 6$. Derivoidaan, jolloin saadaan $A'(x) = \frac{-2\,160}{(x-6)^2} + 5$. Derivaatan nollakohta $x = 12\sqrt{3} + 6$ osoittautuu derivaatan merkkitarkastelun perusteella pienimmän arvon kohdaksi. Tällöin $y = 10\sqrt{3} + 5$. Arkin edullisimmat mitat ovat $x \approx 26{,}8$ cm ja $y \approx 22{,}3$ cm.



12. Käyrälle $y = x^2$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = 2x = -1$, joten sivuamiskohta on $x = -\frac{1}{2}$. Vastaava y:n arvo on $\frac{1}{4}$. Pisteen $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ kautta kulkevan normaalin yhtälö on $y = x + \frac{3}{4}$. Normaali leikkaa suoran $y = -x - 1$ pisteessä $(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$.



13. Kuvassa on kartioiden halkileikkaus. Yhdenmuotoisista kolmioista CDE ja CAB saadaan verranto $\frac{h-y}{x} = \frac{h}{r}$, josta $y = \frac{h}{r}(r-x)$. Pienemmän kartion tilavuus on $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \frac{h}{r}(r-x) = \frac{\pi h}{3r}(rx^2 - x^3)$, $0 \le x \le r$. Derivaatan $V'(x) = \frac{\pi h}{3r}(2rx - 3x^2)$ nollakohdassa $\frac{2}{3}r$ tilavuus $V(\frac{2}{3}r) = \frac{4\pi hr^2}{81}$ on suurin, koska $V(0) = V(r) = 0$. Kartioiden tilavuuksien suhde on enintään $\frac{4\pi hr^2}{81} : \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{4}{27}$.



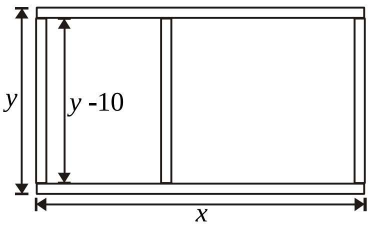
14. Olkoon säiliön korkeus h ja pohjan säde r, jolloin $V = \pi r^2 h$ ja siis $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Kun vaippamateriaalin yksikköhinta on a, on pohjamateriaalin yksikköhinta 1,4a. Materiaalikustannukset ilmaisee funktio

$$f(r) = 2\pi r^2 \cdot 1{,}4a + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \cdot a \; = 2a\left(1{,}4\pi r^2 + \frac{V}{r}\right),\ r > 0.$$

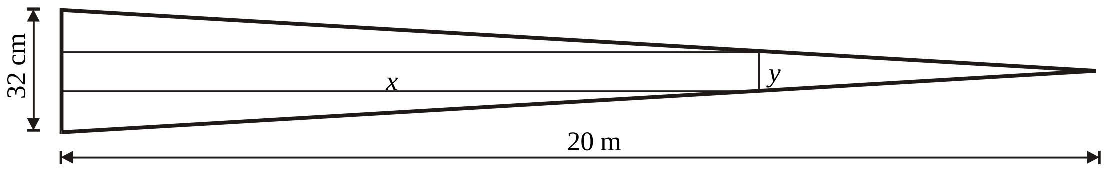
Sen derivaatan $f'(r) = 2a\left(2{,}8\pi r - \dfrac{V}{r^2}\right)$ nollakohta $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2{,}8\pi}}$ osoittautuu derivaatan merkkitarkastelussa funktion pienimmän arvon kohdaksi. Tällä säteen arvolla laskettu korkeuden ja säteen suhde on $\dfrac{h}{r} = \dfrac{V}{\pi r^3} = \dfrac{2{,}8\pi V}{\pi V} = 2{,}8$.

15. Olkoot laatikon ulkomitat x ja y cm. Käytettävän lankun määrästä saadaan yhtälö $2x + 3(y - 10) = 1\,600$, josta $y - 10 = \dfrac{1\,600 - 2x}{3}$. Maksimoidaan hiekalla täytettävä pinta-ala $A(x) = (x - 15)\dfrac{1\,600 - 2x}{3} = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1\,630}{3}x - 8\,000$, $15 \le x \le 800$. Suurin arvo liittyy kuvaajana olevan alaspäin aukeavan paraabelin huippuun. Se sijaitsee derivaatan $A'(x) = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1\,630}{3}$ nollakohdassa $x = 407{,}5$. Tällöin $y \approx 271{,}7$. Laatikon ulkomitat ovat senttimetrin tarkkuudella 408 cm ja 272 cm.

Huomautus: Samaan tulokseen (vielä hieman lyhyemmin) päästään maksimoimalla laatikon ulkomittojen määräämä pinta-ala xy, sillä lankku vie laatikon muodosta riippumatta aina saman pinta-alan $5 \cdot 1\,600\ \text{cm}^2$.



16.



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto $\dfrac{20 - x}{y} = \dfrac{20}{0{,}32}$, josta $y = 0{,}32 - 0{,}016x$. Tässä y on parrun päänä olevan neliön lävistäjä ja $0 \le x \le 20$. Parrun tilavuus on

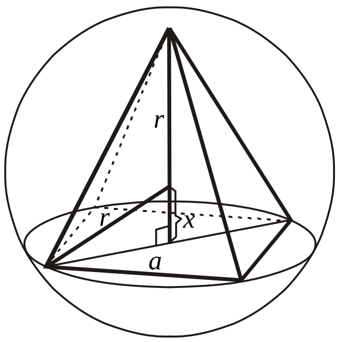
$$V(x) = \frac{y^2}{2} \cdot x = \frac{(0{,}32 - 0{,}016x)^2}{2}x = 0{,}000128x^3 - 0{,}00512x^2 + 0{,}0512x.$$

Derivaatan $V'(x) = 0{,}000384x^2 - 0{,}01024x + 0{,}0512$ nollakohtina ovat $x = 20$ ja $x = 6\dfrac{2}{3}$. Luvuista $V(0) = 0$, $V(20) = 0$ ja $V(6\dfrac{2}{3}) = 0{,}151073$ viimeksi mainittu on suurin. Puu on katkaistava tyvestä lukien kohdasta 6,7 m, jolloin parrun tilavuus on $150\ \text{dm}^3$.

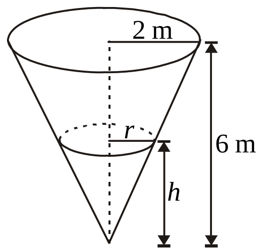
17. Olkoon pallon säde r ja keskipisteen etäisyys pyramidin pohjasta x. Riittää tarkastella tilannetta, jossa pyramidin korkeus on vähintään säteen mittainen. Jos pyramidin pohjasärmä on a, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta $r^2 = x^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}})^2$, joten $a^2 = 2(r^2 - x^2)$. Pyramidin tilavuus on

$$V(x) = \frac{1}{3}a^2 h = \frac{1}{3}\cdot 2(r^2 - x^2)(r + x) = \frac{2}{3}(r^2 x + r^3 - x^3 - rx^2),\ \ 0 \le x \le r.$$

Derivaatan $V'(x) = \frac{2}{3}(r^2 - 3x^2 - 2rx)$ nollakohta on $x = \frac{r}{3}$. Luvuista $V(0) = \frac{2}{3}r^3$, $V(r) = 0$ ja $V(\frac{r}{3}) = \frac{64}{81}r^3$ viimeksi mainittu on suurin. Kun pyramidin tilavuus on suurin, pyramidin ja pallon tilavuuksien suhde on $(\frac{64}{81}r^3) : (\frac{4}{3}\pi r^3) = \frac{16}{27\pi} \approx 0{,}19$.



***18.** Veden pinnan korkeus h on ajasta t riippuva suure. Pinnan nousunopeuden ilmaisee derivaatta $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Vettä sisältävän osan tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto $\frac{r}{h} = \frac{2}{6}$, josta $r = \frac{1}{3}h$. Kun tämä sijoitetaan tilavuuden lausekkeeseen, saadaan $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$. Koska vettä pumputaan nopeudella 50 l/min, on $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 50\,\mathrm{l/min} = 0{,}05\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Saadaan yhtälö

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0{,}05\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Kun tästä ratkaistaan $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ja sijoitetaan $h = 3{,}0$ m, saadaan $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{0{,}45\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}}{\pi\cdot 9{,}0\,\mathrm{m}^2} \approx 1{,}6\,\mathrm{cm/min}$.

Pikatesti

1. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ on määritelty muualla paitsi nimittäjän nollakohdissa 1 ja 2, joten määrittelyjoukko on **R** \ {1, 2}.

2. $\dfrac{2x-3}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow -1<x\le 1\dfrac{1}{2}$

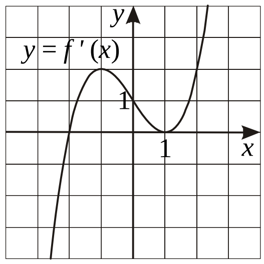
$2x - 3$	–	–	+
$x + 1$	–	+	+
osamäärä	+	–	+
		-1	$1\frac{1}{2}$

3. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} x(1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-8x^2}{2x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5}{x^2}-8}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{-8}{2}=-4$

4. Funktio $f(x)=\begin{cases}2x-3, \text{ kun } x\le 1,\\ x+a, \text{ kun } x>1,\end{cases}$ on kaikkialla jatkuva (polynomilausekkeet), jos se on jatkuva kohdassa x = 1. Tämä taas edellyttää, että $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$, eli tulee olla 2 – 3 = 1 + a. Tästä a = –2. Silloin $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=-1$.

5. **a)** $f'(x)=15x^2-\dfrac{1}{3}$ **b)** $f'(x)=4x-4x^{-3}=4x-\dfrac{4}{x^3}$

c) $f'(x)=3(x^3-3)^2\cdot 3x^2=9x^2(x^3-3)^2$



6. **a)** Funktiolla on minimi kohdassa x = –2.

b) Derivaatan merkistä voi päätellä, että funktio on kohtaan x = –2 asti aidosti vähenevä ja sen jälkeen aidosti kasvava. (Derivaatalla on vain yksittäinen nollakohta kohdassa x = 1.) Siksi funktiolla on absoluuttinen minimi eli pienin arvo kohdassa x = –2.

7. Funktion $f(x)=0{,}3x^5+0{,}2x^3$ derivaatta $f'(x)=1{,}5x^4+0{,}6x^2=0{,}3x^2(5x^2+2)$ on kaikilla x:n arvoilla ei-negatiivinen, ja sen nollakohta x = 0 on yksittäinen. Siksi funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.

8. Funktion $f(x)=3-2x-x^2$ on jatkuva suljetulla välillä $[-2,2]$, joten sen tällä välillä saamien arvojen joukossa on suuri luku ja pienin luku. Ne voivat sijaita välin päätepisteissä tai derivaatan $f'(x)=-2-2x$ nollakohdassa x = –1. Arvoista f(–2) = 3, f(–1) = 4 ja f(2) = –5 suurin on 4 ja pienin –5.

9. **a)** Käyrälle $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ pisteeseen $(0,-1)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatan $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ arvo kohdassa 0. Kulmakerroin on 2.

b) Tangentin yhtälö on y + 1 = 2(x –0) eli y = 2x – 1.

10. Olkoon tarhan pituus x (m), jolloin leveys on $40 – x$ ja ala $A(x) = x(40 – x)$. Tässä $0 \le x \le 40$. Derivaatalla $A'(x) = 40 - 2x$ on nollakohta $x = 20$. Siinä pinta-ala on suurin 400 (m^2), silla $A(0) = A(40) = 0$. Tarhan suurin pinta-ala on 4 aaria.

Kertauskoe 1

1. **a)** Kun $f(x) = \dfrac{6-5x}{x+2}$, niin $f'(x) = \dfrac{-16}{(x+2)^2}$ ja $f'(0) = –4$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{6}{x}-5}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{-5}{1} = -5$

2. Funktio $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x + 2$ on jatkuva suljetulla välillä [–1, 2], joten se saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvon. Derivaatan $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 3$ nollakohdista vain $\sqrt{2}$ kuuluu annetulle välille. Arvoista $f(–1) = 4\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$ ja $f(2) = 0$ ensimmäinen on suurin ja seuraava pienin.

3. Olkoon pojan viikkoraha x (€). Muodostetaan yhtälö pyörän hinnan hankkimiseen menevistä ajoista: $\dfrac{300}{x} - 1 = \dfrac{300}{x+1}$, sievennettynä $x^2 + 10x - 3\,000 = 0$. Ratkaisuista 50 ja –60 vain ensin mainittu sopii. Viikkoraha oli 50 €.

4. Suoran $y = 2x – 2$ ja paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ sivuamispiste on (1, 0), jolloin $y(1) = a + b - 3 = 0$ ja $y'(1) = 2a + b = 2$. Saadaan $a = –1$, $b = 4$.

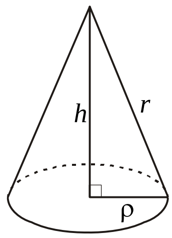
5. Funktion $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ minimikohta $x = 2$ on derivaatan $f'(x) = 2x - \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}$ nollakohta, joten $4 - \dfrac{a}{4} - \dfrac{8}{8} = 0$. Siitä $a = 12$. Minimiarvo on $f(2) = 4 + \dfrac{12}{2} + \dfrac{4}{4} = 11$.

6. Olkoon alkuperäinen hinta $100a$ ja alkuperäinen myyntimäärä $100b$. Uudet arvot ovat vastaavasti $(100 - p)a$ ja $(100 + 1{,}6p)b$. Myynnin arvon ilmoittaa funktio $f(p) = (100 - p)(100 + 1{,}6p)ab$, $0 < p < 100$. Sen kuvaaja on alaspäin aukeavan paraabelin kaari, joten funktio saa suurimman arvonsa huipun kohdalla eli kohdassa $p = 18{,}75$.

Alkuperäinen ja uusi myynnin arvo ovat samoja eli $(100 - p)(100 + 1{,}6p)ab = 10\,000ab$, kun $p = 0$ tai $p = 37{,}5$. Edelliseen p:n arvoon ei liity mitään hinnanalennusta.

7. Yhtälöt $2x^3+2x^2-2x+a=1$ ja $2x^3+2x^2-2x+a-1=0$ ovat yhtäpitäviä. Merkitään $f(x)=2x^3+2x^2-2x+a-1$. Funktio f on kaikkialla jatkuva. Sen derivaatan $f'(x)=6x^2+4x-2$ nollakohta -1 on maksimikohta ja $\frac{1}{3}$ minimikohta. Raja-arvot äärettömyyksissä ovat $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Funktiolla on tarkalleen yksi nollakohta, jos maksimi on negatiivinen tai jos minimi on positiivinen. Toisin sanoen $f(-1)=a+1<0$ tai $f(\frac{1}{3})=a-1\frac{10}{27}>0$. Tästä saadaan vastaus $a<-1$ tai $a>1\frac{10}{27}$.

8. Olkoon ρ suppilon pohjaympyrän säde ja h suppilon korkeus. Lausutaan suppilon tilavuus h:n funktiona.



$$V(h)=\frac{1}{3}\pi\rho^2h=\frac{1}{3}\pi(r^2-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(r^2h-h^3),\ 0\le h\le r$$

Derivaatan $V'(h)=\frac{\pi}{3}(r^2-3h^2)$ nollakohdaksi saadaan $h=\frac{r}{\sqrt{3}}$.

Koska $V(0)=V(r)=0$, niin $V(\frac{r}{\sqrt{3}})=\frac{2\sqrt{3}r^3}{27}$ on suurin tilavuuden arvo. Sijoittamalla $r=20$ cm saadaan suppilon korkeudelle arvo $\frac{20}{\sqrt{3}}$ cm $\approx 11{,}5$ cm ja tilavuudelle $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$ dm$^3\approx 3{,}22$ dm^3.

Kertauskoe 2

1. **a)** $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2-\frac{8}{x^2}}=\frac{1}{2}$

2. $\frac{x}{3}\ge\frac{2-x}{x-4}\Leftrightarrow\frac{x^2-x-6}{3x-12}\ge 0$

		-2		3		4	
x^2 - x - 6	+		–		+		+
3x - 12	–		–		–		+
osamäärä	–		+		–		+

Ratkaisu: $-2\le x\le 3$ tai $x>4$

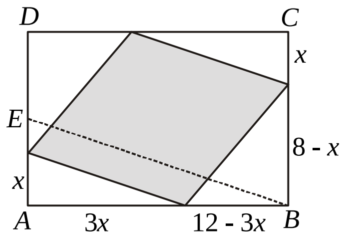
3. Funktio $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+kx+k}$ on murtofunktiona kaikilla x:n arvoilla jatkuva silloin, kun nimittäjällä ole nollakohtia. Tämä pätee, kun nimittäjään liittyvä diskriminantti $D=k^2-4k<0$ eli arvoilla $0<k<4$.

4. Olkoon alkuperäinen kilohinta x (€). Muodostetaan yhtälö 28 eurolla ostettujen mansikoiden määristä: $\frac{28}{x}+1=\frac{28}{x-0{,}5}$ eli sievennettynä $2x^2-x-28=0$. Tästä x = 4 tai x = –3,5. Alkuperäinen kilohinta oli 4 €.

5. Käyrät $y = x^2 + 1$ ja $y = \frac{1}{4}(9 - x^2)$ kohtaavat toisensa kohdassa, jossa toteutuu $x^2 + 1 = \frac{1}{4}(9 - x^2)$. Tästä $x = \pm 1$. Derivaatat $y' = 2x$ ja $y' = -\frac{1}{2}x$ saavat kummassakin kohdassa arvot, joiden tulo on –1. Se osoittaa, että ko. kohtiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

6. Valitaan polynomifunktioista $f_a(x) = x^3 + ax^2 + (a-1)x$ mielivaltaiset kaksi funktiota $f_{a_1}(x) = x^3 + a_1x^2 + (a_1 - 1)x$ ja $f_{a_2}(x) = x^3 + a_2x^2 + (a_2 - 1)x$. Niiden derivaatat saavat saman arvon, kun $3x^2 + 2a_1x + a_1 - 1 = 3x^2 + 2a_2x + a_2 - 1$ eli kohdassa $x = \frac{a_2 - a_1}{2(a_1 - a_2)} = -\frac{1}{2}$. Siinä laskettu derivaatan arvo on $-\frac{1}{4}$.

7. Suunnikkaan ala on suurin, kun neljän suorakulmaisen kolmion yhteinen ala on pienin. Vasemmassa alareunassa oleva kolmio on yhdenmuotoinen kolmion *ABE* kanssa, joten sen kateettien suhde on 4 : 12 = 1 : 3. Kolmiot ovat pareittain yhteneviä ja niiden yhteinen ala on $A(x) = 3x^2 + (12 - 3x)(8 - x) = 6x^2 - 36x + 96$, $0 < x < 4$.

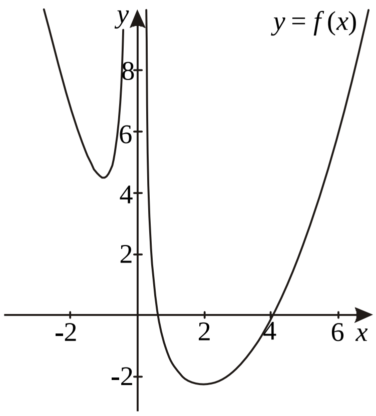


Pienin arvo tulee kuvaajana olevan ylöspäin aukeavan paraabelin huipun kohdalla eli kohdassa *x* = 3. Tällä tiedolla suurin suunnikas on piirrettävissä.

8. Funktio $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ on määritelty muualla paitsi origossa. Sen ääriarvot voivat sijaita vain derivaatan $f'(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3}$ nollakohdissa. Jaetaan osoittaja tekijöihin: $x^3(x-2) + x - 2 = (x-2)(x^3+1)$. Siitä nähdään derivaatan nollakohdat 2 ja –1. (Tekijään $x^3 + 1$ liittyy aidosti kasvava funktio, joten sillä ei ole muita nollakohtia kuin *x* = –1.) Derivaatan merkkikaavion nojalla saadaan ääriarvot minimi $f(-1) = 4\frac{1}{2}$ ja minimi $f(2) = -2\frac{1}{4}$.

$(x-2)(x^3+1)$	+	–	–	+
x^3	–	–	+	+
$f'(x)$	–	+	–	+
	-1	0	2	

Ohessa on funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ kuvaaja.



Tehtävien ratkaisuja
Juuri- ja logaritmifunktiot

Yhdistetty funktio ja käänteisfunktio

1 Yhdistetty funktio

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 3x^3 - 2$

2. **a)** $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$

3. **a)** $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-1) = 3$

b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 4 - 15 = -11$

4. **a)** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x) = 49x^2 + 7x - 9$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 7(x^2 + x - 9) = 7x^2 + 7x - 63$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + 1 = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x$

5. $(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(9) = 3$

$(g \circ f)(-3) = g(f(-3))$ ei ole määritelty, koska $f(-3)$ ei ole määritelty.

6. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = (2x+1)^2$

Sulkeiden poisto ja sievennys johtavat yhtälöön $2x^2 - 1 = 0$, josta $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1) = \sqrt{3x-1}$

Määrittelyehto on $3x - 1 \geq 0$, josta $x \geq \frac{1}{3}$.

8. **a)** $f(x) = x + 1$, **b)** $g(x) = \frac{1}{x}$

9. Eräs ratkaisu:

a) $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5^x$ **d)** $f(x) = 180° - x$, $g(x) = \sin x$

10. $(h \circ p)(x) = h(p(x)) = h(0{,}95x) = 0{,}95x - 1\,000$ ja
$(p \circ h)(x) = p(h(x)) = p(x - 1\,000) = 0{,}95(x - 1\,000) = 0{,}95x - 950$
Edullisempi hinta saadaan, kun ensin lasketaan prosentuaalinen ja sitten määräalennus.

11. Esimerkiksi sisäfunktio on $f(x) = x + 2$ ja ulkofunktio $g(x) = x^2 + x^4$.
Jos taas sisäfunktio on $f(x) = (x + 2)^2$, on ulkofunktio $g(x) = x + x^2$.

12. Jos $f(x) = 5x + 3$ ja $g(x) = 3x + k$, jossa k on vakio, on
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + k) = 15x + 5k + 3$ ja
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x + 3) = 15x + k + 9$.
$f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat sama funktio, kun $15x + 5k + 3 = 15x + k + 9$. Tämä toteutuu, kun $5k + 3 = k + 9$ eli kun $k = 1\frac{1}{2}$.

13. Kun $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$, niin $(r \circ r)(x) = r(r(x)) = r(\dfrac{1}{x-1}) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1} - 1} = \dfrac{x-1}{2-x}$. Saadun yhdistetyn funktion $r \circ r$ määrittelyjoukkoon ei kuulu luku 1, koska sisäfunktio ei ole määritelty sillä arvolla. Myöskään luku 2 ei kuulu funktion $r \circ r$ määrittelyjoukkoon, koska ulkofunktio ei ole määritelty arvolla $r(2)$. Kaikilla muilla reaaliluvuilla yhdistetty funktio on määritelty.

14. **a)** Funktio $h(x) = 1\,000 + \sqrt{2x}$ antaa haukipopulaation ja funktio $a(x) = 2\,500 + \sqrt{x}$ ahvenpopulaation koon, kun x on vesikirppupopulaation koko. Yhdistettyä funktiota $(h \circ a)(x) = h(a(x))$ käyttäen saadaan haukipopulaation koko suoraan vesikirppujen määrästä. Nyt $(h \circ a)(x) = h(a(x)) = 1\,000 + \sqrt{2 \cdot (2\,500 + \sqrt{x})} = 1\,000 + \sqrt{5\,000 + 2\sqrt{x}}$.

b) $(h \circ a)(4\,000\,000) = 1\,000 + \sqrt{5\,000 + 2\sqrt{4\,000\,000}} \approx 1\,090$. Haukia on noin 1 090.

15. $(f \circ g)(\Delta) = f(g(\Delta)) = f(-1)$ Ei ole määritelty.
$(f \circ g)(\otimes) = f(g(\otimes)) = f(4) = 15$
$(f \circ g)(↲) = f(g(↲)) = f(2) = 3$
$(f \circ g)(♉) = f(g(♉)) = f(334) = 111\,555$
$(f \circ g)(✡) = f(g(✡)) = f(2) = 3$

Yhdistetyn funktion määrittelyjoukkoon kuuluvat alkiot ⊗, ↲, ♉ ja ✡ mutta ei alkio Δ. Arvojoukko koostuu luvuista 3, 15 ja 111 555.

2 Yhdistetyn funktion derivaatta

22. **a)** $D(\sqrt{2x}+1)^4 = 4(\sqrt{2x}+1)^3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \dfrac{4(\sqrt{2x}+1)^3}{\sqrt{2x}}$

b) $D(3+\sqrt{3x})^3 = 3(3+\sqrt{3x})^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 = \dfrac{9(3+\sqrt{3x})^2}{2\sqrt{3x}}$

c) $D(\sqrt{x^2+1}+1)^3 = 3(\sqrt{x^2+1}+1)^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{3x(\sqrt{x^2+1}+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. $f'(x) = 5(x^2-9)^4 \cdot 2x = 10x(x^2-9)$

Derivaatta on nolla, kun $10x(x^2-9)=0$, josta $x=0$ tai $x^2-9=0$ eli $x=\pm 3$.

Vastaus: $x=0$ tai $x=\pm 3$

24. $f(x) = (x^2-1)^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x - 6x = 6x(x^2-1)^2 - 6x = 6x((x^2-1)^2-1)$

$f'(x)=0$, kun $6x((x^2-1)^2-1)=0$, josta $6x=0$ tai $(x^2-1)^2-1=0$

Nyt $x=0$ tai $(x^2-1)^2=1$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $x^2-1=\pm 1$, josta $x^2=2$ tai $x^2=0$ ja edelleen $x=\pm\sqrt{2}$ tai $x=0$.

Derivaatan merkkikaavion perusteella funktio on aidosti kasvava, kun $-\sqrt{2} \le x \le 0$ tai $x \ge \sqrt{2}$.

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		x
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

25. $f'(x) = 16x(2x^2-2)^3$ ja $f'(x)=0$, kun $x=0$ tai $2x^2-2=0$, josta $x=\pm 1$.

minimit $f(1)=f(-1)=0$
maksimi $f(0)=16$

		-1		0		1	
$16x$	$-$		$-$		$+$		$+$
$(2x^2-2)^3$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
		min		maks		min	

26. **a)** $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{1-x-1} = \dfrac{x-1}{x} = 1-\dfrac{1}{x}$

$(f \circ f)'(x) = D(1-\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x)^{-3}$

$(g \circ f)'(x) = D(1-x)^{-3} = -3(1-x)^{-4} \cdot (-1) = \dfrac{3}{(1-x)^4}$

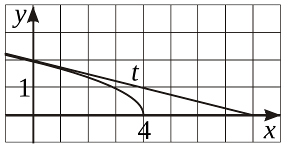
27. Funktio f on määritelty ja jatkuva reaalilukujen joukossa.

$$f\,'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \text{ sillä}$$

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{|x|}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} < 1.$$

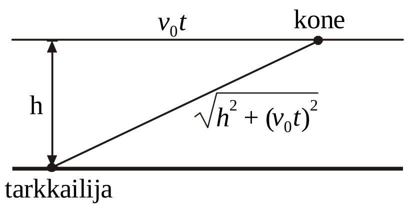
Koska $f\,'(x) > 0$, funktio f on aidosti kasvava reaalilukujen joukossa.

28. Koska $y = \sqrt{4-x}$, on $y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$, joten tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$ on $-\frac{1}{4}$. Tangentin yhtälö on $y - 2 = -\frac{1}{4}(x-0)$. Asettamalla $y = 0$ saadaan $x = 8$, jolloin kolmion pinta-alaksi tulee $\frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 2 = 8$.



29. Ajassa t (h) lentokone lentää nopeudella v_0 vaakasuoraan matkan $v_0 t$ (km). Aika lasketaan siitä hetkestä, jolloin korkeudella $h = 1$ km lentävä kone ylittää tarkkailijan. Koneen etäisyys tarkkailijasta on $s(t) = \sqrt{h^2 + (v_0 t)^2}$, joten loittonemisnopeus hänestä on $v(t) = s'(t) = \frac{2{v_0}^2 t}{2\sqrt{1+(v_0 t)^2}}$.

Määritetään se ajanhetki, jolloin koneen etäisyys tarkkailijasta on d =1,5 km.



$$\sqrt{h^2 + (v_0 t)^2} = d$$

$$(v_0 t)^2 = d^2 - h^2$$

$$t = \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{v_0} = \frac{\sqrt{(1{,}50\text{ km})^2 - (1{,}00\text{ km})^2}}{500\text{ km/h}} = 0{,}00224\text{ h}$$

Loittonemisnopeus saadulla hetkellä on $v(0{,}00224\text{h}) = 373\text{ km/h}$.

Vastaus: 370 km/h.

30. Tiedetään, että $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 50\,\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$. Koska pallon tilavuus $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, niin $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$.

Ketjusäännöllä $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, josta $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}}$. Tällöin $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_{r=5{,}0\text{ cm}} = \frac{50\text{ cm}^3/\text{s}}{4\pi(5{,}0\text{ cm})^2}$

$= \frac{1}{2\pi}$ cm/s $\approx$ 1,6 mm/s.

Vastaus: Pallon säteen kasvunopeus kysytyllä hetkellä on 1,6 mm/s.

3 Käänteisfunktio

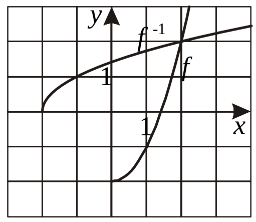
36. $f(x) = 4 - x$. Merkitään $y = 4 - x$, josta $x = 4 - y$. Vaihtamalla merkinnät saadaan $y = f^{-1}(x) = 4 - x$. Huomataan, että $f = f^{-1}$.

$g(x) = \frac{1}{x}$. Merkitään $y = \frac{1}{x}$, josta $x = \frac{1}{y}$. Vaihtamalla merkinnät saadaan

$y = g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. Huomataan, että $g = g^{-1}$.

37. $y = x^2 - 2$, josta $x = \sqrt{y + 2}$, kun $x \geq 0$ ja $y \geq -2$

Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$. Sen määrittelyjoukko on $[-2, \infty[$ ja arvojoukko $[0, \infty[$.

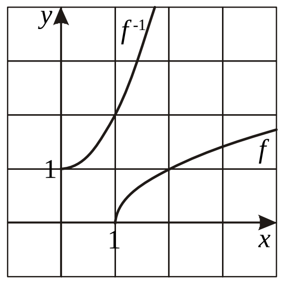


$f(x) = x^2 - 2$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

38. $y = \sqrt{x - 1} \geq 0$ ja kun $x \to \infty$, niin $y \to \infty$. Siis funktion f arvojoukko on $[0, \infty[$.

Ratkaistaan x, jolloin saadaan $x - 1 = y^2$ eli $x = y^2 + 1$. Tämän jälkeen vaihdetaan merkinnät x ja y.

Vastaus: $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, määrittelyjoukko $[0, \infty[$ ja arvojoukko $[1, \infty[$



$f(x) = \sqrt{x - 1}$
$f^{-1}(x) = x^2 + 1$

39. Merkitään $y = f(x)$ ja vaihdetaan merkinnät x ja y heti alkuperäisessä yhtälössä.

a) $x = 5y$, josta $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

b) $x = y - 7$, josta $y = f^{-1}(x) = x + 7$

c) $x = y^5$, josta $y = f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$

d) $x = y^3$, josta $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

41. Muuttujan x funktion määrittelee yhtälö $y = 3x - 2$. Funktio on aidosti kasvava, joten käänteisfunktio f^{-1} on olemassa. Vaihdetaan f:n yhtälössä x ja y, jolloin saadaan yhtälö $x = 3y - 2$ ja siitä $y = f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Nyt

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}) = 3(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}) - 2 = x.$$

Vastaavasti

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{2}{3} = x.$$

Tässä tehtävässä molemmat yhdistetyt funktiot ovat identtisiä kuvauksia.

42. Funktio *f* on määritelty arvoilla $x \geq 0$. Derivaatta on $f\,'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 1 > 0$, kun $x > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava. Siis käänteisfunktio on olemassa.

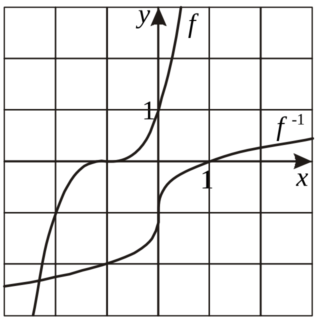
Funktion ja käänteisfunktion välillä vallitsee yhtäpitävyys $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Merkitään $f(x) = 6$ eli $x + \sqrt{x} = 6$, jolloin $x = 4$. Siis $f^{-1}(6) = 4$.

43. Derivaatta on $f\,'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} > 1 > 0$, kun $x > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava. Siis käänteisfunktio on olemassa. Funktion *f* määrittelyjoukko $]0, \infty[$ on käänteisfunktion arvojoukko.

Ratkaistaan yhtälöstä $x - \dfrac{2}{x} = 1$ muuttuja *x*. Saadaan $\dfrac{x^2 - 2}{x} = 1$, josta $x^2 - x - 2 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön juurista $x = -1$ tai $x = 2$ vain $x = 2$ kelpaa. Siis $f^{-1}(1) = 2$.

44. Derivaatta on $f\,'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava. Siis käänteisfunktio on olemassa. Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajan leikkauspiste on suoralla $y = x$. Siis $x^3 + x - 27 = x$, josta $x^3 = 27$, ja edelleen $x = 3$, jolloin myös $y = 3$. *Vastaus*: Leikkauspiste on (3, 3).

45. Funktion derivaatta on $f\,'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa *x*-akselia kohdassa $x = -1$. Siis $f\,'(x) \geq 0$ ja $f\,'(x) = 0$ vain, kun $x = -1$, joten *f* on aidosti kasvava.
Havaitaan, että $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Ratkaistaan yhtälöstä $y = (x+1)^3$ muuttuja *x*. Saadaan $x + 1 = \sqrt[3]{y}$, josta $x = \sqrt[3]{y} - 1$. Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.



46. Ratkaistaan *x* yhtälöstä $y = \dfrac{x+2}{x-3}$, kun $x > 3$.

$xy - 3y = x + 2$, josta $(y-1)x = 3y + 2$ ja edelleen $x = \dfrac{3y+2}{y-1}$.

Kun $x > 3$, on $y = \dfrac{x+2}{x-3} = 1 + \dfrac{5}{x-3} > 1$, sillä $\dfrac{5}{x-3} > 0$.

Siis käänteisfunktion yhtälö on $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, kun $x > 1$.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{x+2}{x-3} + 2}{\frac{x+2}{x-3} - 1} = \frac{3(x+2) + 2(x-3)}{x + 2 - (x-3)} = \frac{5x}{5} = x, \text{ kun } x > 3.$$

Vastaus: Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, ja se on määritelty, kun $x > 1$.

4 Käänteisfunktion derivaatta

47. Funktio $f(x) = 6x + 1$ on aidosti monotoninen, joten käänteisfunktio f^{-1} on olemassa. Yhtälöstä $y = 6x + 1$ ratkeaa $x = \frac{y-1}{6} = \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}$. Siis $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$.

Derivaattafunktiot ovat $f'(x) = 6$ ja $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{6}$.

48. Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ derivaatta on $f'(x) = 2x + 2$. Koska $f'(x) = 2x + 2 \geq 0$, kun $x \geq -1$, on funktio aidosti kasvava, joten käänteisfunktio f^{-1} on olemassa.

Ratkaistaan yhtälö $y = x^2 + 2x$ x:n suhteen. Täydennetään neliöksi, jolloin saadaan $y + 1 = x^2 + 2x + 1$ eli $y + 1 = (x+1)^2$, josta $x + 1 = \sqrt{y+1}$, kun $x \geq -1$ ja $y \geq -1$. Vaihdetaan merkinnät ja annetaan vastaus.

Käänteisfunktio on $(f^{-1})(x) = -1 + \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$.

Derivaattafunktio on $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $x > -1$.

49. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 4 \geq 4 > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava, ja siksi käänteisfunktio on olemassa. Käänteisfunktion derivaatta on laskettava kohdassa $y = 1$. Sitä vastaava x:n arvo -1 saadaan yhtälöstä $x^3 + 4x + 6 = 1$. Tällöin

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2 + 4} = \frac{1}{7}.$$

50. Derivaatta $f'(x) = 7x^6 + 7 \geq 7 > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava, ja siksi käänteisfunktio on olemassa. Käänteisfunktion derivaatta on laskettava kohdassa $y = 3$. Vastaava x:n arvo 1 saadaan kokeilemalla yhtälöstä $x^7 + 7x - 5 = 3$. Tällöin

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7\cdot 1^6 + 7} = \frac{1}{14}.$$

51. Funktion *f* derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 1$.

$y = 1$ eli $x^3 + x + 1 = 1$, josta $x^3 + x = 0$ ja edelleen $x = 0$.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3\cdot 0^2 + 1} = 1$$

$y = 3$ eli $x^3 + x + 1 = 3$, josta $x^3 + x - 2 = 0$ ja edelleen $x = 1$.

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$y = 11$ eli $x^3 + x + 1 = 11$, josta $x^3 + x - 10 = 0$ ja edelleen $x = 2$.

$$(f^{-1})'(11) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3\cdot 2^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

52. Funktion $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$, $x>0$, derivaatta $f'(x)=\dfrac{x(x^3+3x+2)}{(x^2+1)^2}$ on positiivinen arvoilla $x>0$. Funktio f on siis aidosti kasvava, ja siksi käänteisfunktio f^{-1} on olemassa.

Käänteisfunktion derivaatta on laskettava kohdassa $y=0$. Sitä vastaava x:n arvo 1 saadaan yhtälöstä $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=0$. Nyt $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3/2}=\dfrac{2}{3}$.

53. Yhtälöstä $y=x^2-1$ saadaan $x=\sqrt{y+1}$ $(x>0)$, joten käänteisfunktion derivaatta $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}$. Vaihdetaan yhtälössä $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}$ merkinnät x ja y eli muuttujaa merkitään x:llä ja funktion arvoa y:llä, jolloin $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

54. Derivaatta $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$, ja $f'(x)=0$ vain, kun $x=-1$. Siis funktio f on aidosti kasvava, ja siksi käänteisfunktio on olemassa. Havaitaan, että $y=f(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. Silloin $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$.

a) Yhtälön $3x^2+6x+3=27$ ratkaisu on $x=2$, joten $f^{-1}(27)=2$.

Toinen suoritustapa: $f^{-1}(27)=\sqrt[3]{27}-1=3-1=2$.

b) Koska $f(x)=(x+1)^3$, niin $f'(x)=3(x+1)^2$ ja

$$(f^{-1})'(27)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3\cdot(2+1)^2}=\frac{1}{27}.$$

Toinen suoritustapa: Koska $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$, niin $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, jolloin

$$(f^{-1})'(27)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{27}.$$

55. **a)** Kun $y=\sqrt{x}$, niin $x=y^2$. Käänteisfunktion derivoimissäännöllä saadaan $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x>0$.

b) Kun $y=\sqrt{2x+1}$, niin $y^2=2x+1$ ja $x=\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}$. Käänteisfunktion derivoimissäännöllä saadaan $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2y}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, kun $x>-\dfrac{1}{2}$.

Vastaus: **a)** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x>0$ **b)** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, kun $x>-\dfrac{1}{2}$

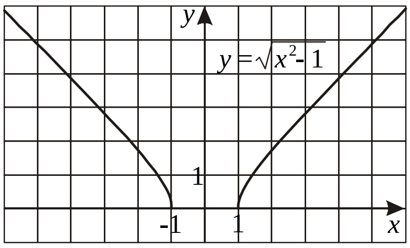
Juurifunktio

1 Juurifunktio

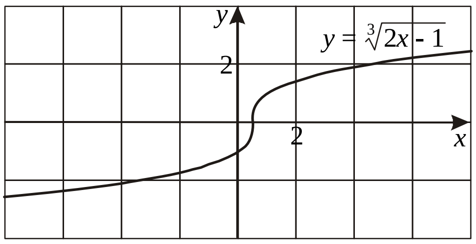
56. **a)** Funktioiden $f(x)=\sqrt{x}$ ja $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$ kuvaajat ovat muuten samat, mutta edelliseen kuuluu origo, jälkimmäiseen ei.

b) Funktioiden $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ja $g(x)=x^{-\frac{1}{3}}$ kuvaajat yhtyvät *g*:n määrittelyarvoilla $x>0$. Funktion *f* määrittelyjoukko on $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

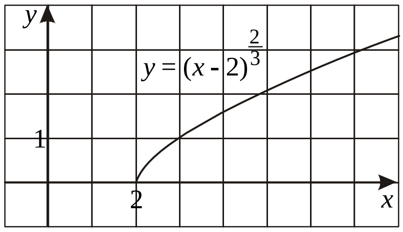
58. **a)** Määrittelyehto on $x^2-1\geq 0$, josta $x\leq -1$ tai $x\geq 1$.
Vastaus: $]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$



b) Määrittelyjoukko on *R*.



c) Määrittelyehto on $x-2>0$, josta $x>2$
Vastaus: $]2,\infty[$



59. **a)** Funktio $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ on määritelty kaikilla *x*:n arvoilla.

b) Funktion $f(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ määrittelyehto on $1-x^2>0$, josta $-1<x<1$.

c) Funktion $f(x)=\sqrt[4]{4x-x^2}$ määrittelyehto on $4x-x^2\geq 0$, josta $0\leq x\leq 4$.

60. Funktio $f(x)=\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+4}$ on määritelty, kun $x^2-9\geq 0$ ja $x+4\geq 0$, joista ($x\leq -3$ tai $x\geq 3$) ja $x\geq -4$. Ehdot yhdessä $-4\leq x\leq -3$ tai $x\geq 3$.
Määrittelyjoukko on $[-4,-3]\cup[3,\infty[$.

61. **a)** Funktion $f(x)=\sqrt{2x+1}$ määrittelyehto on $2x+1\geq 0$, josta tulee $x\geq -\dfrac{1}{2}$. Sisäfunktio $g(x)=2x+1$ on aidosti kasvava, ja yhdistetty funktio $f(x)=\sqrt{2x+1}$ on myös aidosti kasvava. $f(-\dfrac{1}{2})=0$ ja $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x+1}=\infty$, joten arvojoukko on $[0,\infty[$.

Vastaus: Määrittelyjoukko on $[-\dfrac{1}{2},\infty[$ ja arvojoukko on $[0,\infty[$.

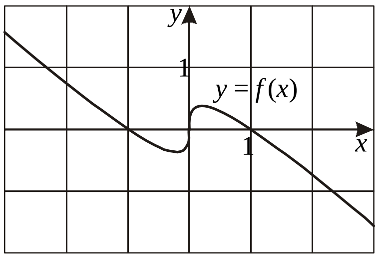
b) Funktio $f(x)=\sqrt[7]{x^3-2x}$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla.
Koska $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-2x)=\infty$, myös lausekkeen pariton juuri lähestyy ääretöntä.
Koska $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)=-\infty$, myös lausekkeen pariton juuri lähestyy miinus ääretöntä. Näistä seuraa, että sekä määrittelyjoukko että arvojoukko on **R**.

c) Funktion $f(x)=\sqrt[6]{x^2-4}$ määrittelyehto on $x^2-4\geq 0$, josta $x\leq -2$ tai $x\geq 2$.
$f(\pm 2)=0$ ja $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[6]{x^2-4}=\infty$. Arvojoukko on $[0,\infty[$.

Vastaus: Määrittelyjoukko on $]-\infty,-2]\cup[2,\infty[$ ja arvojoukko $[0,\infty[$.

62. **a)** Juurifunktio $f(x)=\sqrt[7]{x}$ on aidosti kasvava.
b) Juurifunktio $f(x)=\sqrt[8]{x}$ on aidosti kasvava.
c) Koska eksponentti on > 0, murtopotenssifunktio $f(x)=x^{\frac{7}{4}}$ on aidosti kasvava.
d) Koska eksponentti on < 0, murtopotenssifunktio $f(x)=x^{-\frac{5}{11}}$ on aidosti vähenevä.

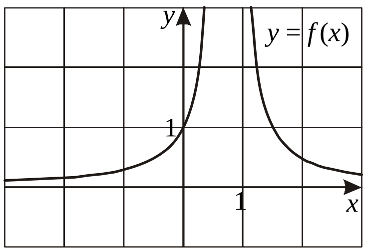
63. Kuvion perusteella funktion $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$ nollakohdat ovat $x\approx -1$, $x\approx 0$ tai $x\approx 1$. Sijoitus funktion lausekkeeseen osoittaa, että ko. arvot ovat tarkkoja arvoja.



Vastaus: $x=-1$, $x=0$ tai $x=1$

64. **a)** $t(75)=\sqrt{\dfrac{2\cdot 75}{9{,}81}}\approx 3{,}9$ s **b)** $t(321)=\sqrt{\dfrac{2\cdot 321}{9{,}81}}\approx 8{,}1$ s

65. Funktion $f(x)=(2x^2-3x+1)^{-\frac{2}{3}}$ määrittelyehto on
$2x^2-3x+1>0$, josta $x<\dfrac{1}{2}$ tai $x>1$.



66. Juurifunktio on aidosti kasvava, joten suurin arvo $f(243)=3$ ja pienin $f(-32)=-2$.

2 Juuriyhtälö

67. **a)** Yhtälön $\sqrt[4]{x}=5$ ratkaisu on $x=5^4=625$.
b) Yhtälöllä $\sqrt[4]{x}=-5$ ei ole ratkaisua, sillä $\sqrt[4]{x}\geq 0$.
c) Yhtälön $\sqrt[3]{x}=-5$ ratkaisu on $x=(-5)^3=-125$.

68. **a)** Yhtälön $x^{\frac{3}{4}} = 3$ ratkaisu saadaan suoraan: $x = 3^{\frac{4}{3}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

b) Yhtälön $x^{\frac{4}{3}} = 5$ ratkaisu saadaan suoraan: $x = 5^{\frac{3}{4}}$.

c) Yhtälöllä $x^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt{2}$ ei ole ratkaisua, sillä murtopotenssi on määritelty vain positiivisille kantaluvun arvoille, ja jokaisen positiivisen luvun potenssi on positiivinen.

69. **a)** Yhtälöstä $x^{-\frac{1}{5}} = 2$ ratkeaa $x = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.

b) Yhtälön $(x-1)^{\frac{1}{4}} = 3$ määrittelyehto on $x - 1 > 0$ eli $x > 1$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan aluksi $x - 1 = 3^4$, josta $x = 82$.

c) Yhtälön $(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} = 2$ määrittelyehto on $x^2 - 4 > 0$, josta $x < -2$ tai $x > 2$. Saadaan aluksi $x^2 - 4 = 2^2$ ja edelleen $x = \pm 2\sqrt{2}$.

70. **a)** Yhtälön $x\sqrt[4]{x} = 3$ määrittelyehto on $x \geq 0$. Yhtälön muodosta $\sqrt[4]{x^5} = 3$ ratkeaa $x = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$.

b) Yhtälön $x \cdot x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ määrittelyehto on $x > 0$. Aluksi kirjoitetaan $x^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$, josta $x = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

c) Yhtälön $x^2 \cdot \sqrt[5]{x} - 4\sqrt[5]{x} = 0$ vasen puoli kirjoitetaan tuloksi, minkä jälkeen käytetään tulon nollasääntöä: $(x^2 - 4)\sqrt[5]{x} = 0$, ratkaisut ovat $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 2$

71. **a)** Yhtälön $\sqrt{4 - x} = x$ ratkaisuun liittyvät ehdot ovat $4 - x \geq 0$ ja $x \geq 0$, joista saadaan $0 \leq x \leq 4$.
$\sqrt{4 - x} = x$, josta $4 - x = x^2$ ja edelleen $x^2 + x - 4 = 0$.

Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Näistä vain juuri

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1{,}6$ toteuttaa ehdot. *Vastaus*: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1{,}6$

b) Yhtälön $\sqrt{x + 11} + 1 = x$ eli $\sqrt{x + 11} = x - 1$ ratkaisuun liittyvät ehdot ovat $x + 11 \geq 0$ ja $x - 1 \geq 0$. Siis pitää olla $x \geq 1$.

$\sqrt{x + 11} = x - 1$, josta $x + 11 = (x - 1)^2$ eli $x^2 - 3x - 10 = 0$. Juuret ovat $x = -2$ ja $x = 5$. Vastaukseksi tulee $x = 5$.

c) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$, josta $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

Ehdot: $2x + 1 \geq 0$ ja $x^2 - 1 \geq 0$ eli $x \geq -\dfrac{1}{2}$ ja ($x \leq -1$ tai $x \geq 1$).

Siis yhtälön yhdistettynä määrittelyehtona on $x \geq 1$.

Yhtälöstä saadaan $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2-1}$, josta $2x+1 = x^2-1$ ja edelleen $x^2-2x-2=0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$.

Näistä juurista vain $x = 1+\sqrt{3}$ toteuttaa ehdon $x \ge 1$.

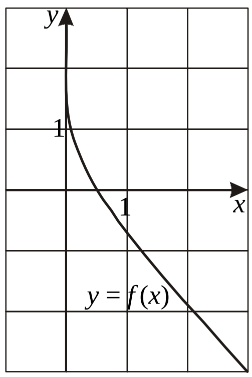
Vastaus: $x = 1+\sqrt{3}$

72. **a)** Koska neliöjuuri ≥ 0, rajoitutaan arvoihin $x \ge 0$.
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt{x^2}$, josta $x = |x|$ ja edelleen $x = x$, joka on identtisesti tosi, kun $x \ge 0$.

b) Korotetaan yhtälö $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x^2}$ puolittain potenssiin 4.
$x^2 = x^4$, josta $x^2(x^2-1)=0$. Yhtälön ratkaisut ovat $x=0$ tai $x=\pm 1$.

c) $\sqrt[4]{(x-2)^2} = 3$. Korotetaan toiseen potenssiin, jolloin tulokseksi saadun sievennetyn yhtälön $|x-2| = 3^2$ ratkaisuksi tulee $x=-7$ tai $x=11$.

73. Funktion $f(x) = \sqrt{3x+3} - \sqrt{2x^2+8x}$ määrittelyehdot ovat $3x+3 \ge 0$ ja $2x^2+8x \ge 0$, ratkaistuina $x \ge -1$ ja ($x \le -4$ tai $x \ge 0$). Ehdot yhdessä: $x \ge 0$
$f(x)=0$, kun $\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x^2+8x} = 0$, josta
$\sqrt{3x+3} = \sqrt{2x^2+8x}$. Korotetaan yhtälö toiseen potenssiin:
$3x+3 = 2x^2+8x$, josta $2x^2+5x-3=0$. Tämän toisen asteen yhtälön juuret ovat $x=-3$ tai $x = \dfrac{1}{2}$. Juurista vain $x = \dfrac{1}{2}$ toteuttaa ehdot. Ohessa on funktion kuvaaja.



Vastaus: $x = \dfrac{1}{2}$

74. **a)** $(\sqrt[7]{x}-1)(\sqrt[5]{x}+1)=0$, josta $\sqrt[7]{x}-1=0$ tai $\sqrt[5]{x}+1=0$. Näiden yhtälöiden ratkaisut ovat $x=1$ tai $x=-1$.

b)) Yhtälön $(x^{\frac{1}{6}}-1)(x^{\frac{1}{7}}+1)=0$ määrittelyehto on $x>0$. Tulon nollasäännön mukaan $x^{\frac{1}{6}}-1=0$ tai $x^{\frac{1}{7}}+1=0$. Yhtälön $x^{\frac{1}{6}}-1=0$ ratkaisu on $x=1$, ja yhtälö $x^{\frac{1}{7}}+1=0$ on identtisesti epätosi. *Vastaus*: $x=1$

75. **a)** $y = \sqrt[4]{x},\ x \ge 0$, josta $x = y^4,\ y \ge 0$. Siis $f^{-1}(x) = x^4,\ x \ge 0$.

b) $y = \sqrt[5]{x}$, josta $x = y^5$. Siis $f^{-1}(x) = x^5$

c) $y = \sqrt{3x-1},\ x \ge \dfrac{1}{3}$, josta $y^2 = 3x-1$ ja edelleen $x = \dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{1}{3}$.
$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3},\ x \ge 0$

76. **a)** Yhtälön $\sqrt[12]{1-x} = \sqrt[4]{2}$ määrittelyehto on $x \le 1$. Saadaan $1-x = 2^3$, josta $x = -7$.

b) Yhtälön $(2x-4)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{3}$ määrittelyehto on $x \ge 2$. Potenssiin 8 korottamalla saadaan yhtäpitävästi $2x-4 = 3^2$ ja edelleen $x = 6\frac{1}{2}$.

77. **a)** $\sqrt[3]{6x^2-5x} = x$, josta $6x^2 - 5x = x^3$ ja edelleen $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$. Otetaan yhteinen tekijä ja käytetään tulon nollasääntöä: $x(x^2 - 6x + 5) = 0$, josta $x = 0$ tai $x^2 - 6x + 5 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $x = 1$ tai $x = 5$.

Vastaus: Juuret ovat $x = 0$, $x = 1$ tai $x = 5$.

b) Yhtälön $\sqrt[4]{5x^2-6} = x$ ratkaisuun liittyvät ehdot $5x^2 - 6 \ge 0$ ja $x \ge 0$, joista tulee ($x \le -\sqrt{\frac{6}{5}}$ tai $x \ge \sqrt{\frac{6}{5}}$) ja $x \ge 0$ eli ehdot kaikkiaan $x \ge \sqrt{\frac{6}{5}}$.

$\sqrt[4]{5x^2-6} = x$, josta $5x^2 - 6 = x^4$ ja edelleen $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Tämän bikvadraattisen yhtälön ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm\sqrt{3}$. Kun alkuehdot otetaan huomioon, vastaukseksi saadaan $x = \sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{3}$.

78. **a)** $\sqrt[3]{3x-1} = x-1$, josta $3x - 1 = (x-1)^3$. Yhtälö sievenee kolmannen asteen yhtälöksi $x^3 - 3x^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = 0$ tai $x = 3$.

b) $\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x - 1 = 0$, josta $\sqrt[3]{x^3+3x^2} = x+1$ ja edelleen $x^3 + 3x^2 = (x+1)^3$.
Yhtälö sievenee ensimmäisen asteen yhtälöksi $3x + 1 = 0$, jonka juuri on $x = -\frac{1}{3}$.

79. Käyrän $y = \sqrt{x}$ osalta on asetettava ehto $x \ge 0$. Yhtälöstä $\sqrt{x} = \sqrt[3]{3x}$ saadaan $x^3 = (3x)^2$ ja edelleen $x^3 - 9x^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = 0$ tai $x = 9$.
Haetut pisteet ovat (0, 0) ja (9, 3).

80. Havaitaan, että yhtälö $x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}} - 1 = 0$ voidaan muokata muotoon $(x^{\frac{1}{4}})^2 + 2x^{\frac{1}{4}} - 1 = 0$. Ratkaistaan tästä $x^{\frac{1}{4}}$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla, jolloin saadaan $x^{\frac{1}{4}} = -1 \pm \sqrt{2}$. Näistä juurista vain $x^{\frac{1}{4}} = -1 + \sqrt{2}$ käy, joten vastaus on $x = (\sqrt{2} - 1)^4$.

81. Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$ ja sen käänteisfunktion kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen. Jos kuvaajat leikkaavat, ne leikkaavat tällä suoralla. Leikkauskohta ratkeaa nyt yhtälöstä $\sqrt[3]{x+6} = x$, josta $x + 6 = x^3$. Ratkaisuksi havaitaan $x = 2$. Kysytty piste on (2, 2).

3 Juurifunktion derivaatta

84. **a)** Sovelletaan tulon ja neliöjuuren derivoimissääntöjä:

$$\mathrm{D}(2x+2)\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + (2x+2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) Muunnetaan juurilauseke derivointia varten murtopotenssimuotoon:

$$\mathrm{D}(x + \sqrt[3]{x}) = \mathrm{D}(x + x^{\frac{1}{3}}) = 1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{3x^{2/3}} = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

c) Sovelletaan osamäärän derivoimissääntöä. Neljäs juuri muunnetaan derivointia varten murtopotenssiksi:

$4x^{3/4})$

$$\mathrm{D}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x}} = \mathrm{D}\frac{x+1}{x^{1/4}} = \frac{x^{1/4} - (x+1)\cdot\frac{1}{4}x^{-3/4}}{x^{2/4}} = \frac{4x^{4/4} - x - 1}{4x^{5/4}} = \frac{4x - x - 1}{4x \cdot x^{1/4}} = \frac{3x-1}{4x\sqrt[4]{x}}$$

85. Funktio $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ on jatkuva kaikkialla ja derivoituva, kun $x \neq 0$.

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, ja $f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$ = tangentin kulmakerroin. Tangentin yhtälö on $y - 3 = \frac{1}{27}(x - 27)$, josta $y = \frac{1}{27}x + 2$.

86. Funktion $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \le x \le 2$, derivaatan $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ nollakohta on yhtälön $\sqrt{4 - x^2} = x$ ainoa juuri $x = \sqrt{2}$.

87. Koska $f'(x) = \mathrm{D}(x-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x-1)^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$ < 0, niin funktio f on määrittelyvälillään aidosti vähenevä. Käänteisfunktio on siis olemassa.

$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ > 0, josta $x = \frac{1}{y^2} + 1$. *Vastaus*: $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, $x > 0$

88. Kirjoitetaan yhtälö $f(x) = \sqrt[n]{x}$ muotoon $f(x)^n = x$ ja derivoidaan tämä yhtälö puolittain: D $f(x)^n$ = Dx, josta $nf(x)^{n-1}f'(x) = 1$ ja edelleen $f'(x) = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}}$.

Koska $f(x) = \sqrt[n]{x}$, on $f'(x) = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.

89. Funktion $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ määrittelyehto on $-x^2 + 4x - 1 \ge 0$, jolloin $2 - \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{3}$. Tällä välillä funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa samoissa kohdissa kuin juurrettava $g(x) = -x^2 + 4x - 1$. Ääriarvot löytyvät suljetun välin päätepisteistä tai derivaatan g' nollakohdista. Juurrettavan derivaatta on $g'(x) = -2x + 4$ ja $g'(x) = 0$, kun $x = 2$. Derivaatan nollakohdassa $f(2) = \sqrt{3}$.
Välin päätepisteissä $f(2 - \sqrt{3}) = f(2 + \sqrt{3}) = 0$.
Vastaus: Suurin arvo on $f(2) = \sqrt{3}$ ja pienin $f(2 - \sqrt{3}) = f(2 + \sqrt{3}) = 0$.

90. **a)** Funktio $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ on arvoilla $x>0$ määritelty ja jatkuva. Sen derivaatan $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ainoa nollakohta ja myös funktion ainoa ääriarvokohta on minimikohta $x=\sqrt[3]{4}$. Silloin funktion pienin arvo on $f(\sqrt[3]{4})=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\approx 1{,}890$.

b) Arvoilla $x>0$ funktio $g(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}=x+x^{-\frac{1}{2}}$ on määritelty ja jatkuva. Sen derivaatan $g'(x)=1-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ainoa nollakohta ja myös funktion ainoa ääriarvokohta on minimikohta $x=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Silloin funktion pienin arvo on

$f(\frac{\sqrt[3]{2}}{2})=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\approx 1{,}890$.

91. Yhtälö $x\sqrt{x}-\sqrt{x}=-0{,}3$ on määritelty ehdolla $x\geq 0$. Muodostetaan funktio $f(x)=x\sqrt{x}-\sqrt{x}+0{,}3$, joka on jatkuva välillä $[0,\ \infty[$ ja derivoituva välillä $]0,\ \infty[$.
$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Derivaatta on nolla, kun $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ =0, josta $3x-1=0$ ja edelleen $x=\frac{1}{3}$.

	0		$\frac{1}{3}$		x
$f'(x)$		$-$		$+$	

$f(0)=0{,}3>0$, $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}+0{,}3\approx -0{,}08<0$ ja funktio *f* on aidosti vähenevä välillä $[0,\ \frac{1}{3}]$, joten funktiolla on tarkalleen yksi nollakohta välillä $]0,\ \frac{1}{3}[$.
$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}+0{,}3\approx -0{,}08<0$, $f(1)=0{,}3>0$ ja funktio *f* on aidosti kasvava välillä $[\frac{1}{3},\ \infty[$, joten funktiolla on tarkalleen yksi nollakohta myös välillä $]\frac{1}{3},\ \infty[$.

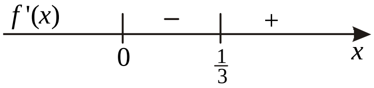
Siis funktiolla $f(x)=x\sqrt{x}-x+0{,}3$ on täsmälleen kaksi nollakohtaa ja yhtälöllä $x\sqrt{x}-\sqrt{x}=-0{,}3$ näin ollen täsmälleen kaksi juurta.

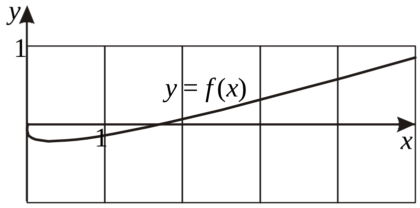
92. Käyrillä $y=-\frac{1}{x}$ ja $y=2\sqrt{x+2}-1$ on yhteinen piste kohdassa $x=-1$, koska siinä *y*-arvot ovat samat. Derivaatoilla $y'=\frac{1}{x^2}$ ja $y'=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ on myös sama arvo 1 kohdassa $x=-1$, mikä osoittaa käyrien sivuavan toisiaan mainitussa kohdassa.

93. Funktion $f(x)=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{\frac{x}{9}}$, $x\geq 0$, nollakohdassa on $\frac{x}{3}=\sqrt[3]{\frac{x}{9}}$ eli $\frac{x^3}{27}-\frac{x}{9}=0$. Nollakohdat ovat 0 ja $\sqrt{3}$. Derivaatta $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{9\sqrt[3]{x^2}}$ tulee nollaksi vain kohdassa

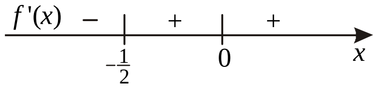
$x = \frac{1}{3}$. Siinä funktiolla on derivaatan merkkikaavion mukaan minimi, ja se on arvoltaan $-\frac{2}{9}$. Merkkikaavion perusteella voidaan myös päätellä, että $f(0)$ on maksimi.

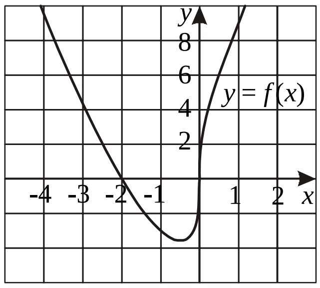
Ohessa on derivaatan merkkikaavio ja funktion kuvaaja.





94. Funktio $f(x) = 3\sqrt[3]{x}\,(x+2)$ on määritelty ja jatkuva kaikilla x:n arvoilla. Sen derivaatan $f'(x) = \dfrac{2(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$ ainoa nollakohta on minimikohta $x = -\frac{1}{2}$. Funktio saa siinä pienimmän arvonsa $-\dfrac{9}{2\sqrt[3]{2}} \approx -3{,}572$.

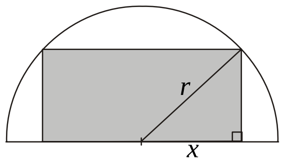




Arvoilla $x \le -\frac{1}{2}$ funktio on aidosti vähenevä ja arvoilla $x \ge -\frac{1}{2}$ aidosti kasvava. Funktiolla ei ole derivaattaa kohdassa $x = 0$.

95. Olkoon puoliympyrän säde r ja halkaisijalla oleva sivu $2x$, $0 \le x \le r$. Toisen sivun pituus on silloin $\sqrt{r^2 - x^2}$. Piirin pituus on $p(x) = 4x + 2\sqrt{r^2 - x^2}$, jossa p on jatkuva funktio suljetulla välillä $[0, r]$. Muodostetaan p:n derivaatta.

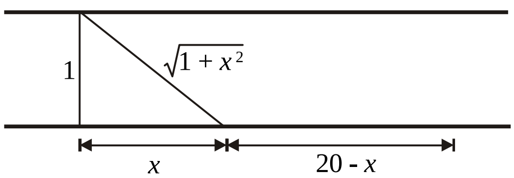
$$p'(x) = 4 + 2\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 0 < x < r$$



Derivaatan ainoa nollakohta on $x = \dfrac{2r}{\sqrt{5}}$. Koska $p(0) = 2r$, $p(r) = 4r$ ja $p(\frac{2r}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{5}r$, piiri on pisin arvolla $x = \dfrac{2r}{\sqrt{5}}$. Silloin kanta on $\dfrac{4r}{\sqrt{5}}$ ja korkeus $\dfrac{r}{\sqrt{5}}$, joten niiden suhde on 4 : 1.

96. Vesiasennusmatkan pituus on $\sqrt{1+x^2}$ (km), $0 \le x \le 20$. Jos maahan asentamisen yksikkökustannus on a (€/km), niin kokonaiskustannus määräytyy jatkuvan funktion $f(x) = 2a\sqrt{1+x^2} + a(20-x)$ arvona.

Derivaatan $f'(x) = \dfrac{2ax}{\sqrt{1+x^2}} - a$ nollakohta on $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Arvoista $f(0)=22a$, $f(20)=2a\sqrt{401}\approx 40{,}0a$ ja $f(\frac{1}{\sqrt{3}})=(20+\sqrt{3})a\approx 21{,}7a$ viimeinen on pienin, joten piste P pitää valita niin, että $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577$ km = 577 m.

97. Valitaan muuttujaksi kolmion toisen kateetin pituus x (cm), $0\le x\le 20$. Toinen kateetti on silloin $\sqrt{400-x^2}$ ja kolmion ala $A(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{400-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{400x^2-x^4}$. Tämän arvo on suurin, kun funktiolla $f(x)=400x^2-x^4$ on suurin arvo. Se saavutetaan derivaatan $f'(x)=4x(200-x^2)$ nollakohdassa $x=10\sqrt{2}$. Suorakulmainen kolmio on silloin tasakylkinen. Kaksi kolmiota muodostaa $10\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}$ cm neliön. Niitä voi leikata levystä $14\cdot 4=56$ kappaletta ja kolmioita näin ollen 112 kappaletta.

Logaritmifunktio

1 Logaritmifunktion määritelmä

105. Merkitään $y=\log_a a$. Kirjoittamalla yhtälö eksponenttimuotoon $a^y=a$ nähdään y:n arvoksi 1.

108. $\log_2 y=-2$, josta $y=2^{-2}=\frac{1}{4}$. Koska $y=\log_2 x=\frac{1}{4}$, niin $x=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$.

109. Merkitään dB(I) = äänen voimakkuus desibeleinä, kun intensiteetin I yksikkö on $\mathrm{W/m^2}$.

a) $\mathrm{dB}(0{,}1)=120+10\lg 0{,}1=110$ dB

b) $\mathrm{dB}(0{,}01)=120+10\lg 0{,}01=100$ dB

c) $\mathrm{dB}(0{,}001)=120+10\lg 0{,}001=90$ dB

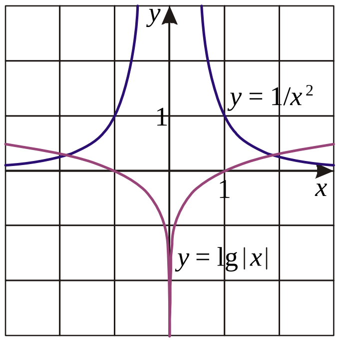
110. $12^{345}=(10^{\lg 12})^{345}=10^{345\cdot\lg 12}\approx 10^{372{,}3}$. Luvussa 12^{345} on siis 373 numeroa. Koska luvussa 10^{373} on 374 numeroa, se on lukua 12^{345} suurempi.

111. **a)** Happamuus saadaan pH-lukuna yhtälöstä $\mathrm{pH}=-\lg\left[H_3O^+\right]$. Nyt pH = 2, joten $\lg\left[H_3O^+\right]=-2$ ja $H_3O^+=10^{-2}$. Oksoniumkonsentraatio on 10^{-2} mol / dm^3.

b) Happamuuden pH-luvun ollessa 11,3 on $\lg\left[H_3O^+\right]=-11{,}3$ ja $H_3O^+=10^{-11{,}3}\approx 5{,}0\cdot 10^{-12}$ mol / dm^3.

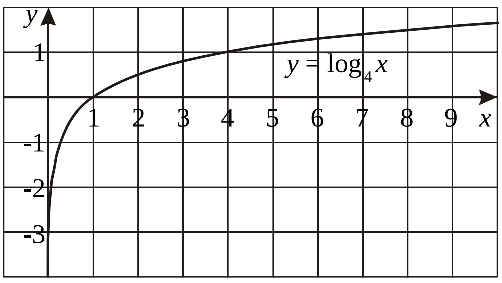
112. Funktioiden $\lg|x|$ ja $1/x^2$ kuvaajat ovat symmetrisiä y-akselin suhteen, joten voidaan rajoittua tarkastelemaan arvoja $x > 0$. Tällöin $\lg|x|$ kasvaa rajatta ja $1/x^2$ vähenee kohti nollaa. Siis kuvaajilla on yksi positiivinen leikkauskohta x_0. Koska $\lg|1{,}895| < 1{,}895^{-2}$ ja $\lg|1{,}90| > 1{,}90^{-2}$, on $x_0 \approx 1{,}90$.

Vastaus: $\lg|x| \geq x^{-2}$, kun $|x| \geq 1{,}90$.



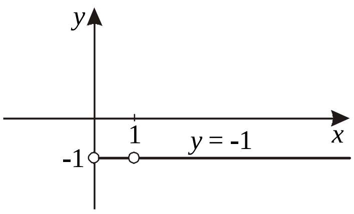
2 Logaritmien laskulait

113. $f(x) = \log_4 x$.
Ohessa on funktion kuvaaja.



118. $\lg 0{,}125 = \lg \frac{1}{8} = \lg 2^{-3} = -3\lg 2 = -3a$

119. $\dfrac{\lg x^2 - \lg x^3}{\lg x} = \dfrac{\lg \frac{x^2}{x^3}}{\lg x} = \dfrac{\lg x^{-1}}{\lg x} = \dfrac{-\lg x}{\lg x} = -1$,
kun $x > 0$ ja $x \neq 1$ ($\log x \neq 0$).

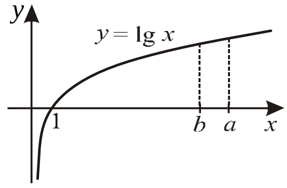


120. Funktio $f(x) = \log_3 x$ on aidosti kasvava, joten funktion suurin arvo on välin $[\frac{1}{9}, 9]$ loppupisteessä ja pienin arvo välin $[\frac{1}{9}, 9]$ alkupisteessä. Siis pienin arvo on

$f(\frac{1}{9}) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$ ja suurin arvo $f(9) = \log_3 9 = 2$.

121. $\dfrac{\lg x^2 + \lg x}{\lg x^4 - \lg x^3} = \dfrac{\lg x^3}{\lg \frac{x^4}{x^3}} = \dfrac{3\lg x}{\lg x} = 3$, joten lausekkeen arvo ei riipu muuttujan x arvosta.

122. Koska $a = 999^{1000}$, niin $\lg a = 1\,000 \cdot \lg 999 \approx 2\,999{,}6$. Vastaavasti $\lg b = 999 \cdot \lg 1\,000 = 999 \cdot 3 = 2\,997$. Logaritmifunktio on käytetyllä kantaluvun arvolla aidosti kasvava, joten suurempaa logaritmin arvoa vastaa suurempi muuttujan arvo. Tästä syystä $a > b$.



123. **a)** Sijoitetaan äänitason määrittely-yhtälöön $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ arvot $I = 10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}$ ja $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Saadaan $L = 10 \cdot \lg \frac{10^{-2}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} = 10 \cdot \lg 10^{10} = 100 \lg 10 = 100.$

Lentokoneen melun äänitaso on 100 dB.

b) $L = 10 \cdot \lg \frac{5{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} = 10 \cdot \lg 5\,000 \approx 37$. Musiikin äänitaso on 37 dB.

c) Koska intensiteetti voimistuu satakertaiseksi, uusi arvo on $5{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$.

$L = 10 \cdot \lg \frac{5{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} = 10 \cdot \lg 500\,000 \approx 57$. Äänitaso on 57 dB.

124. Käyrien $y = \ln(1 + e^x)$ ja $y = x$ välinen y-koordinaattien erotus on $\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln e^x = \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln(e^{-x} + 1)$. Saatu erotus lähestyy nollaa, kun $x \to \infty$, sillä $e^{-x} \to 0$, jolloin $\ln(e^{-x} + 1) \to \ln 1 = 0$.

3 Neperin luku

125. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1 + \frac{1}{x/3})^{x/3}\right)^3 = e^3$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1 + \frac{1}{x})^x\right)^3 = e^3$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left((1 + \frac{1}{3x})^{3x}\right)^{1/3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$

126. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x/3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^6 = e^6$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

127. **a)** Korko lisätään pääomaan vuosittain, joten loppupääoma on $(1 + \frac{1{,}5}{100})^{10} \cdot 10\,000$ €

$= 1{,}015^{10} \cdot 10\,000$ € $\approx$ 11 605,41 €.

b) Korkotekijä β on $1 + \frac{1{,}5}{100 \cdot 12}$ = 1,00125, joten loppupääoma on

$1{,}00125^{12 \cdot 10} \cdot 10\,000$ € $\approx$ 11 617,25 €.

c) Loppupääoma on $e^{\frac{1{,}5 \cdot 10}{100}} \cdot 10\,000$ € $\approx$ 11 618,34 €.

128. $e^{\frac{4,0\cdot 0,5}{100}}\cdot 800 \approx 816$. Tilavuus lisääntyy noin 16 litraa.

129. Auton arvo väheni joka vuosi p prosenttia, joten $\alpha = 1-\dfrac{p}{100}$. Auton arvo 10 vuoden kuluttua oli $\alpha^{10}\cdot 30\ 000 = 3\,500$, josta $\alpha^{10} = \dfrac{3\ 500}{30\ 000} = \dfrac{7}{60}$ ja positiivinen juuri $\alpha = \sqrt[10]{\dfrac{7}{60}} \approx 0,807$. Auton arvo vähenee $1 - 0,807 = 0,193$ eli 19,3 %.

130. Pääoma k kasvaa vuodessa arvoon $k+\dfrac{p}{100}k = (1+\dfrac{p}{100})k$.
Olkoon korkokanta q, kun korko lisätään pääomaan puolivuosittain. Tällöin vuoden aikana pääoma kasvaa arvoon $(1+\dfrac{q}{100\cdot 2})k + \dfrac{q}{100\cdot 2}(1+\dfrac{q}{100\cdot 2})k = (1+\dfrac{q}{100\cdot 2})^2 k$.

Tulos pysyy samana, jos $(1+\dfrac{p}{100})k = (1+\dfrac{q}{100\cdot 2})^2 k$.

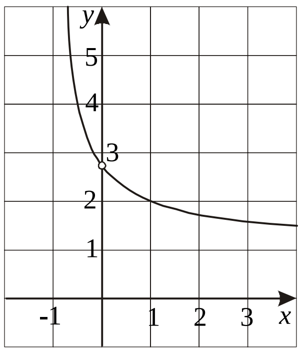
$1+\dfrac{p}{100} = (1+\dfrac{q}{100\cdot 2})^2$, josta vain positiivinen juuri kelpaa, joten $1+\dfrac{\frac{q}{2}}{100}$ $= \sqrt{1+\dfrac{p}{100}}$, josta $\dfrac{q}{2} = 100\left(\sqrt{1+\dfrac{p}{100}}-1\right)$ ja edelleen $q = 200\left(\sqrt{1+\dfrac{p}{100}}-1\right)$.

131. Merkitään korkokantaa kirjaimella p ja lähdeverotettua korkotekijää kirjaimella $q = 1+\dfrac{0,71p}{100}$. Tilin saldo on toisen vuoden alussa 5 000q + 4 500 ja kolmannen vuoden alussa q(5 000q + 4 500). Tulee olla $5\,000q^2 + 4\,500q = 9\ 894,85$ eli $50q^2 + 45q - 98,9485 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön positiivinen ratkaisu on $q = 0,01(-45+\sqrt{21\,814,7}) \approx 1,0269800$. Tällöin $p = \dfrac{100(q-1)}{0,71} \approx 3,800$.

Vastaus: Korkokanta oli 3,80.

Huomautus: Talletusten lähdevero oli vuoden 2004 loppuun saakka 29 %, ja vuoden 2005 alusta alkaen se on ollut 28 %.

133. Funktio $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$ eikä arvoilla $x \le -1$. Muilla arvoilla funktio on määritelty. Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ saadaan graafisesti esimerkiksi trace-toiminnolla. Koska $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ ja $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to -\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$, niin $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$.



4 Logaritmiyhtälö

134. **a)** Ehto: $x > 0$. $\ln x = 2$ eli $\ln x = \ln e^2$, josta $x = e^2$

b) Ehto: $x > -1$. $\lg(x+1) = 0$, kun $x + 1 = 1$ ja edelleen $x = 0$

c) Ehto: $x > 0$. $\log_3 \frac{x}{3} = 3$ eli $\log_3 \frac{x}{3} = \log_3 3^3$, josta $\frac{x}{3} = 27$ ja edelleen $x = 81$.

d) Ehto: $x > 0$. $2\lg x = 1$ eli $\lg x^2 = 1$, josta $\lg x^2 = \lg 10$ ja edelleen $x^2 = 10$.
Juurista vain $x = \sqrt{10}$ toteuttaa yhtälön.

135. **a)** Ehto: $x > 0$

$\lg x = 4\lg 2$

$\lg x = \lg 2^4 = \lg 16$

$x = 16$

b) Ehto: $x > 0$

$\ln 12 - \ln x = \ln 3$

$\ln \frac{12}{x} = \ln 3$

$\frac{12}{x} = 3$

$x = 4$

c) Ehto: $x > 0$

$\log_2 x = \log_2 5 + 1$

$\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 2$

$\log_2 x = \log_2 10$

$x = 10$

d) Ehdot: $x + 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$

yhdessä: $x > 1$

$\ln(x+1) + \ln(x-1) = 1$

$\ln(x+1)(x-1) = \ln e$

$(x+1)(x-1) = e$

$x^2 - 1 = e$

$x = \pm\sqrt{e+1}$

Vastaus: $x = \sqrt{e+1}$

136. **a)** Ehdot $x \geq 0$ ja $\sqrt{x} > 0$, joista yhdistettyinä tulee $x > 0$.
$2\ln\sqrt{x} = 1$, josta $\ln(\sqrt{x})^2 = 1$ eli $\ln x = \ln e$ ja edelleen $x = e$.

b) Ehdot: $x^2 - x > 0$ ja $x > 0$, joista yhdessä tulee $x > 1$.
$\lg(x^2 - x) - \lg x = 0$ eli $\lg(x^2 - x) = \lg x$. Siitä $x^2 - x = x$ ja sievennettynä $x^2 - 2x = 0$. Juurista $x = 0$ tai $x = 2$ vain $x = 2$ käy vastaukseksi.

c) Ehdot: $2 - x > 0$ ja $2 + x > 0$. Ehdot yhdessä: $-2 < x < 2$
$\lg(2-x) + \lg(2+x) = 2$, josta $\lg(4 - x^2) = \lg 10^2$. Yhtälöllä $4 - x^2 = 100$ eli $x^2 = -96$ ei ole reaalijuuria. *Vastaus*: ei ratkaisua

d) Ehto: $x > 0$
$\log_5 x^3 = 6$, josta $\log_5 x^3 = \log_5 5^6$.
Yhtälön $x^3 = 5^6$ juuri on $x = 5^2 = 25$.

137. **a)** Yhtälöön $\lg x - \lg(10 - x) = 0$ liittyvät ehdot ovat $x > 0$ ja $10 - x > 0$ eli $0 < x < 10$.
$\lg x - \lg(10 - x) = 0$, josta $x = 10 - x$ ja edelleen $x = 5$.

b) Yhtälöön $\lg x - \lg(10 - x) = 1$ liittyvät ehdot ovat $x > 0$ ja $10 - x > 0$ eli $0 < x < 10$. Esitysmuodosta $\lg \dfrac{x}{10 - x} = \lg 10$ seuraa $\dfrac{x}{10 - x} = 10$ ja siitä ratkaisu $x = 9\frac{1}{11}$.

138. **a)** Yhtälöön $\ln(x + 1) - \ln(x - 1)^2 = 0$ liittyvät ehdot ovat $x > -1$ ja $x \neq 1$.
$\ln(x + 1) - \ln(x - 1)^2 = 0$, josta $\ln(x + 1) = \ln(x - 1)^2$ ja edelleen $x + 1 = (x - 1)^2$.
Tämä yhtälö sievenee toisen asteen yhtälöksi $x^2 - 3x = 0$. Sen juuret $x = 0$ ja $x = 3$ ovat annetun yhtälön ratkaisut.

b) $\ln(x + 1) - 2\ln(x - 1) = 0$. Määrittelyehdot ovat $x + 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$ eli $x > 1$.
$\ln(x + 1) - 2\ln(x - 1) = 0$, jolloin $\ln(x + 1) - \ln(x - 1)^2 = 0$, josta $\ln(x + 1) = \ln(x - 1)^2$ ja edelleen $x + 1 = (x - 1)^2$. Tämä yhtälö sievenee toisen asteen yhtälöksi $x^2 - 3x = 0$. Sen juuret ovat $x = 0$ tai $x = 3$. *Vastaus*: $x = 3$

139. **a)** Ehto on $x > 0$.
Saatetaan epäyhtälö $\ln x \leq 3$ muotoon $\ln x \leq \ln e^3$, josta aidosti kasvavuuden perusteella $x \leq e^3$. Yhdessä määrittelyehdon kanssa: *Vastaus*: $0 < x \leq e^3$

b) Ehto on $x > 0$.
$\lg x \geq 4$, josta $\lg x \geq \lg 10^4$ ja edelleen $x \geq 10\,000$. *Vastaus*: $x \geq 10\,000$

c) Ehto on $x > 0$. $\log_2 x < 5$, josta $\log_2 x < \log_2 2^5$
ja edelleen $x < 32$. Määrittelyehdon kanssa: *Vastaus*: $0 < x < 32$

d) Ehto on $x > 0$. $\log_{0,1} x > 1$, josta $\log_{0,1} x > \log_{0,1} 0{,}1$.
Kantaluku 0,1 < 1, joten logaritmifunktio on aidosti vähenevä.
Siis $x < 0{,}1$. Liitetään tähän mukaan määrittelyehto. *Vastaus*: $0 < x < 0{,}1$

140. **a)** Ehto on $x > 0$. Funktio $f(x) = \ln x$ on aidosti kasvava.
$\ln x \leq \ln 13$, josta $x \leq 13$. *Vastaus*: $0 < x \leq 13$

b) Ehto on $x > 0$. Funktio $f(x) = \lg x$ on aidosti kasvava.
$\lg x \neq 0$, josta $x \neq 1$. *Vastaus*: $x > 0$ ja $x \neq 1$

c) Ehto on $x > -1$. Funktio $f(x) = \log_3 x$ on aidosti kasvava.
$\log_3(x + 1) > 2$, josta $\log_3(x + 1) > \log_3 3^2$. *Vastaus*: $x > 8$

d) Ehto on $x > -1$. Funktio $f(x) = \log_4 x$ on aidosti kasvava.
$\log_4(x + 1) < \log_4 2$, josta $x + 1 < 2$ ja edelleen $x < 1$. *Vastaus*: $-1 < x < 1$

141. **a)** $\log_3 700 = \dfrac{\lg 700}{\lg 3} \approx 5{,}9631$ **b)** $\log_2 22 = \dfrac{\lg 22}{\lg 2} \approx 4{,}4594$

c) $\log_5 \sqrt{3} = \dfrac{\lg \sqrt{3}}{\lg 5} \approx 0{,}3413$

142. Ehdot $x > 0$ ja $x - 1 > 0$ yhdessä: $x > 1$

$\lg(x-1) = \lg x - 1$, josta $\lg(x-1) = \lg x - \lg 10$ ja edelleen $\lg(x-1) = \lg \frac{x}{10}$

Yhtälön $x - 1 = \frac{x}{10}$ ratkaisu on $x = 1\frac{1}{9}$.

143. Yhtälön määrittelyehdot: $x > 0$

$\lg x - 10 = 0$ tai $\lg x^2 - 1 = 0$, joista $\lg x = 10$ tai $\lg x^2 = 1$ eli $\lg x^2 = \lg 10$.

$\lg x = \lg 10^{10}$ tai $x^2 = 10$, joista $x = 10^{10}$ tai $x = \pm\sqrt{10}$.

Vastaus: $x = \sqrt{10}$ tai $x = 10^{10}$

144. Merkitään kysyttyjä lukuja kirjaimilla x ja y. Yhtälöparin $\begin{cases} xy = 490 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases}$ muuttujiin liittyvät ehdot ovat $x > 0$ ja $y > 0$.

Alemmasta yhtälöstä tulee $\lg \frac{x}{y} = \lg 10$, josta $\frac{x}{y} = 10$ ja edelleen $x = 10y$. Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön, jolloin saadaan $10y \cdot y = 490$ ja edelleen $y^2 = 49$, josta $y = \pm 7$. Vain arvo $y = 7$ käy, jolloin $x = 70$.

Vastaus: Luvut ovat 7 ja 70.

145. Funktio $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-2)}$ on määritelty ehdoilla $x - 2 > 0$ ja $1 - \ln(x-2) \geq 0$ eli $x > 2$ ja $\ln(x-2) \leq 1$. Jälkimmäinen ehto edellyttää, että $0 < x - 2 \leq e$, josta $2 < x \leq e + 2$. Ehdot yhdistämällä saadaan vastaus $2 < x \leq e + 2$.

146. Yhtälöstä $\log_2 i = -3$ saadaan $i = 2^{-3} = 0{,}125$. Virta on 125 mA.

147. Kirjoitetaan yhtälö $\log_2 128 = t$ muotoon $2^t = 128 = 2^7$. Siitä nähdään, että kysytty aika on 7 tuntia.

148. **a)** Helsingin väkiluku on 559 000 (1.1.2005). Kävelynopeudeksi (m/s) tulee $0{,}258 \ln 559 + 0{,}012 \approx 1{,}6$. New Yorkin väkiluku on 8,2 miljoonaa (vuonna 2004), joten siellä kävelynopeudeksi tulee $0{,}258 \ln 8\,200 + 0{,}012 \approx 2{,}3$.

b) Ratkaistaan t yhtälöstä $1 = 0{,}258 \ln t + 0{,}012$. Saadaan $0{,}258 \ln t = 0{,}988$, josta $\ln t = \frac{0{,}988}{0{,}258}$ ja $t \approx 46$. Suomen kaupungeista lähinnä 46 000 asukkaan kaupunkeja ovat Mikkeli ja Porvoo (1.1.2005).

149. $9{,}0 = \frac{2}{3} \lg E_1 - 7{,}9$, josta $\frac{2}{3} \lg E_1 = 16{,}9$ ja edelleen $\lg E_1 = \frac{3}{2} \cdot 16{,}9 \approx 25{,}35$, jolloin $E_1 \approx 10^{25{,}35}$. Vastaavasti $6{,}4 = \frac{2}{3} \lg E_2 - 7{,}9$, josta tulee $E_2 \approx 10^{21{,}45}$.

$E_1 : E_2 = 10^{25{,}35} : 10^{21{,}45} = 10^{3{,}90} \approx 7\,943$. *Vastaus*: 7 900 -kertainen

150. Kun Richterin asteikon lukema on 6,8 ja järistyksessä vapautuva seisminen energia E_1, niiden välillä on yhtälö $\lg E_1 = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6{,}8$ eli $\lg E_1 = 22{,}0$, josta $E_1 = 10^{22}$. Kun seisminen energia on 50 % suurempi, niin $\lg 1{,}5 \cdot 10^{22} = 11{,}8 + 1{,}5 M_2$, jossa M_2 on vastaava Richterin asteikon lukema. Saadaan $M_2 = \dfrac{1}{1{,}5}((\lg 1{,}5 \cdot 10^{22}) - 11{,}8) =$

$\dfrac{1}{1{,}5}(\lg 1{,}5 + 10{,}2) \approx 6{,}917.$ *Vastaus*: 6,9

5 Logaritmifunktion derivaatta

157. Funktio $f(x) = 3x - x\ln x$ on määritelty, kun $x > 0$. Sen derivaatta on $f'(x) = 3 - (\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}) = 3 - \ln x - 1 = 2 - \ln x$. Derivaatan ainoa nollakohta on $x = e^2$. Merkkikaavion mukaan funktio on aidosti kasvava välillä $0 < x \le e^2$.

$f'(x)$		+		−
	0		e^2	x

158. Funktio $f(x) = \ln x - x^2$ on määritelty annetulla välillä $0 < x \le 2$. Sen derivaatan $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x$ ainoa nollakohta on $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Funktio on aidosti kasvava, kun $0 < x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ja aidosti vähenevä, kun $x \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, joten funktion suurin arvo on

$f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} = \ln 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\ln 2 + 1}{2} \approx -0{,}847$. Koska $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$, funktio saa suurimman arvonsa ohella myös kaikki sitä pienemmät arvot.

159. Funktio f on määritelty, kun $x^3 - x > 0$ eli $x(x^2 - 1) > 0$. Oheisen merkkikaavion perusteella $x^3 - x > 0$, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

x	−	−	+	+
$x^2 - 1$	+	−	−	+
$x^3 - x$	−	+	−	+
	-1	0	1	

Derivaatta on $f'(x) = (x^3 - x)^{-1}(3x^2 - 1)$. Derivaatan nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $(x^3 - x)^{-1}(3x^2 - 1) = 0$, josta tulee $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}58$. Vain $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}58$ kuuluu määrittelyalueeseen. Derivaatan merkkikaavion nojalla ääriarvokohta on maksimikohta.

$(x^3 - x)^{-1}$	+	+		+
$3x^2 - 1$	+	−		+
$f'(x)$	+	−		+
	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	1

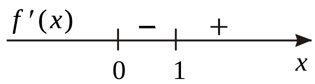
Maksimi on $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \ln\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}95$.
Vastaus: Määrittelyalue on $-1 < x < 0$ tai $x > 1$ ja maksimi $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \ln\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}95$.

160. **a)** $D\log_3 x = \dfrac{1}{x\ln 3}$ **b)** $D\lg x = \dfrac{1}{x\ln 10}$ **c)** $D\lg\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x\ln 10}$

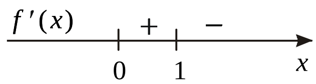
161. **a)** $\mathrm{D}\lg(x^2+1) = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 10}$ **b)** $\mathrm{D}\log_2 3x = \dfrac{3}{3x\ln 2} = \dfrac{1}{x\ln 2}$

c) $\mathrm{D}\log_2 x^2 = \dfrac{2x}{x^2\ln 2} = \dfrac{2}{x\ln 2}$

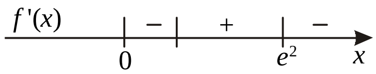
162. Kirjoitetaan epäyhtälö $\ln x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$ muotoon $\ln x + \dfrac{1}{x} - 1 \geq 0$ ja merkitään $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1,\ x > 0$. Derivaatta $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ saa arvon nolla vain kohdassa $x = 1$. Se on funktion pienimmän arvon kohta. Pienin arvo on 0, joten $f(x) \geq 0$ kaikilla $x > 0$. Näin ollen $\ln x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$ aina, kun $x > 0$.

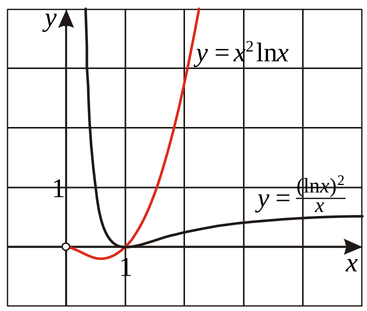


163. Epäyhtälöt $\ln x \leq x - 1$ ja $\ln x - x + 1 \leq 0$ ovat yhtäpitäviä. Merkitään $f(x) = \ln x - x + 1$, jolloin funktio f on arvoilla $x > 0$ määritelty ja jatkuva. Derivaatan $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ merkki vaihtuu sen ainoassa nollakohdassa $x = 1$ kuvan osoittamalla tavalla, joten kyseisessä kohdassa funktio saa suurimman arvonsa $f(1) = 0$. Silloin $f(x) \leq 0$ kaikilla $x > 0$, joten epäyhtälö $\ln x - x + 1 \leq 0$ toteutuu identtisesti.



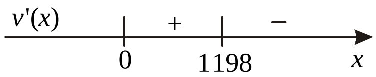
164. **a)** Funktio $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ on määritelty ja jatkuva arvoilla $x > 0$. Sen derivaatan $f'(x) = \dfrac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$ nollakohdat ovat 1 ja e^2. Derivaatan merkkikaaviosta päätellään, että $f(1) = 0$ on minimi ja $f(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$ on maksimi. Näin määräytyvät käyrän ääriarvopisteet.





b) Funktio $f(x) = x^2 \ln x$ on arvoilla $x > 0$ määritelty ja jatkuva. Derivaatan $f'(x) = x(2\ln x + 1)$ ainoa nollakohta $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ on minimikohta, jossa funktio saa samalla pienimmän arvonsa $-\dfrac{1}{2e}$. Kuvaajan minimipiste $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, -\dfrac{1}{2e}\right)$ on ainoa ääriarvopiste.

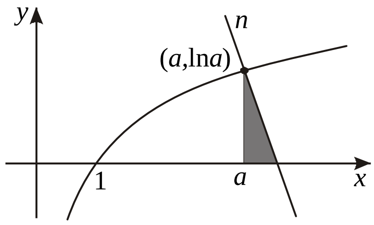
165. Olkoon voitto $v(x) = 400\ln(5x + 10) - \dfrac{x}{3},\ x > 0$. Derivaatan $v'(x) = \dfrac{400}{x+2} - \dfrac{1}{3}$ ainoa nollakohta on 1 198. Merkinvaihto osoittaa sen maksimikohdaksi, jossa funktio v samalla saavuttaa suurimman arvonsa.



166. Muodostetaan funktion $f(x) = \ln x$ erotusosamäärä kohdassa $x = 6$. Sen raja-arvona on derivaatta vastaavassa kohdassa eli $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\ln x - \ln 6}{x - 6} = f'(6) = \dfrac{1}{6}$.

167. Funktion $f(x) = x + \ln x - \frac{1}{x}$ derivaatta $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ on määrittelyvälillä $x > 0$ positiivinen. Funktio f on siis aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio f^{-1}. Käänteisfunktion derivaatta on laskettava kohdassa $y = 0$, jota vastaava x:n arvo 1 saadaan yhtälön $x + \ln x - \frac{1}{x} = 0$ juurena. Silloin $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$.

168. Käyrälle $y = \ln x$ kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{a}$, joten pisteeseen $(a, \ln a)$ asetetun normaalin kulmakerroin on $-a$ ja yhtälö $y - \ln a = -a(x - a)$. Normaali leikkaa x-akselin kohdassa $a + \frac{\ln a}{a}$. Tehtävässä mainitun kolmion ala on



$A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln a}{a} \cdot \ln a = \frac{(\ln a)^2}{2a}$. Derivaatan $A'(a) = \frac{\ln a(2 - \ln a)}{2a^2}$ ainoa nollakohta on e^2. Se on maksimikohta, jossa funktio saa samalla suurimman arvonsa $A(e^2) = \frac{2}{e^2}$.

169. Logaritmin määrittelyehto $x > 0$. Muodostetaan funktio $f(x) = x - 2\ln x$, joka on jatkuva ja derivoituva arvoilla $x > 0$.

$f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, ja $f'(x) = 0$, kun $x = 2$.

Arvoilla $0 < x < 2$ on $f'(x) < 0$, ja kun $x > 2$, on $f'(x) > 0$, joten funktiolla on minimiarvo ja samalla pienin arvo kohdassa $x = 2$. Tämä pienin arvo on $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}614 > 0$, joten $x - 2\ln x > 0$. Siis yhtälöllä $x - 2\ln x = 0$ ei ole reaalijuuria.

170. Käyrien $y = f(x) = \frac{2\ln x}{x}$ ja $y = g(x) = 2x\ln x$ yhteisten pisteiden x-koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälö $\frac{2\ln x}{x} = 2x\ln x$, $x > 0$. Yhtälö sievenee yhtälöksi $\frac{1}{x} = x$, jonka ratkaisuista $x = \pm 1$ vain $x = 1$ kelpaa.

$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 2\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$ ja $g'(x) = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2$.

Koska käyrien kulmakertoimet $f'(1) = 2$ ja $g'(1) = 2$ kohdassa $x = 1$ ovat samat, käyrät sivuavat toisiaan.

171. Käyrillä $y = x^2$ ja $y = -\frac{\ln x}{2}$ on yhteinen piste, jos yhtälöllä $x^2 = -\frac{\ln x}{2}$, $x > 0$, on ratkaisu. Yhtälö kirjoitetaan muotoon $x^2 + \frac{\ln x}{2} = 0$ ja merkitään $f(x) = x^2 + \frac{\ln x}{2}$.

Funktio f on jatkuva ja sen derivaatta $f\,'(x) = 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} > 0$, sillä $x > 0$, joten funktio f on aidosti kasvava. Koska $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} < 0$ ja $f(1) = 1 > 0$, funktiolla f on ainoa nollakohta x_0 välillä $]\frac{1}{2}, 1[$. Siis yhtälöllä $x^2 = -\frac{\ln x}{2}$ on tarkalleen yksi juuri ja annetuilla käyrillä näin ollen vain yksi yhteinen piste.

Koska derivaatta yhtälöstä $y = x^2$ on $y\,' = 2x$ ja yhtälöstä $y = -\frac{\ln x}{2}$ vastaavasti $y\,' = -\frac{1}{2x}$, on yhteiseen pisteeseen asetettujen käyrien tangenttien kulmakertoimien tulo $2x_0\left(-\frac{1}{2x_0}\right) = -1$. Siis käyrät leikkaavat toisensa, ja koska tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, käyrien välinen kulma leikkauspisteessä on 90°.

172. Sovelletaan tietoa, että $\ln y < 0$, kun $0 < y < 1$, ja $\ln y \geq 0$, kun $y \geq 1$.

Koska $|x-2| = \begin{cases} 2 - x \geq 1, \text{ kun } x \leq 1, \\ 0 < 2 - x < 1, \text{ kun } 1 < x < 2, \\ 0 < x - 2 < 1, \text{ kun } 2 < x < 3, \\ x - 2 \geq 1, \text{ kun } x \geq 3, \end{cases}$ niin $f(x) = \begin{cases} \ln(2 - x), \text{ kun } x \leq 1, \\ -\ln(2 - x), \text{ kun } 1 < x < 2, \\ -\ln(x - 2), \text{ kun } 2 < x < 3, \\ \ln(x - 2), \text{ kun } x \geq 3. \end{cases}$

Funktio f on aina ei-negatiivinen, ja $f(x) = 0$, kun $2 - x = 1$ ja $x - 2 = 1$ eli muuttujan arvoilla 1 ja 3. Funktio saa siis pienimän arvonsa 0 arvoilla $x = 1$ ja $x = 3$.

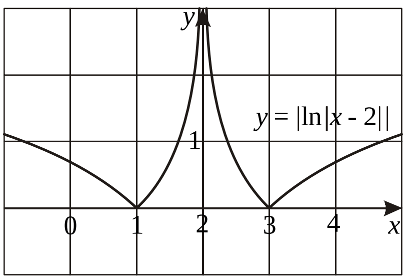
Muodostetaan funktion derivaatta:

$f\,'(x) = -\frac{1}{2-x} = \frac{1}{x-2}$, kun $x < 1$ $\quad$ $f\,'(x) = -\left(-\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2-x}$, kun $1 < x < 2$,

$f\,'(x) = -\frac{1}{x-2}$, kun $2 < x < 3$ $\quad$ $f\,'(x) = \frac{1}{x-2}$, kun $x > 3$.

Derivaatta $f\,'(x) > 0$, kun $1 < x < 2$ tai $x > 3$, joten funktio f on näillä väleillä kasvava.

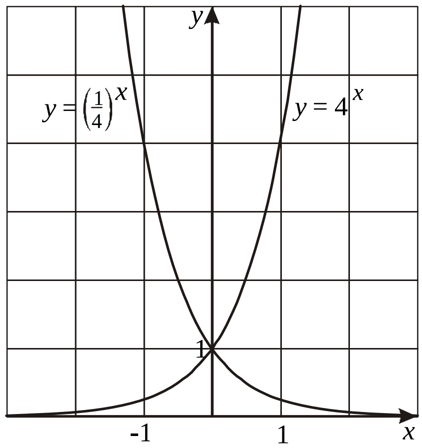
Derivaatta $f\,'(x) < 0$, kun $x < 1$ tai $2 < x < 3$, joten funktio f on näillä väleillä vähenevä.



Eksponenttifunktio

1 Eksponenttifunktio

173. Ohessa ovat eksponenttifunktioiden $f(x) = 4^x$ ja $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ kuvaajat.



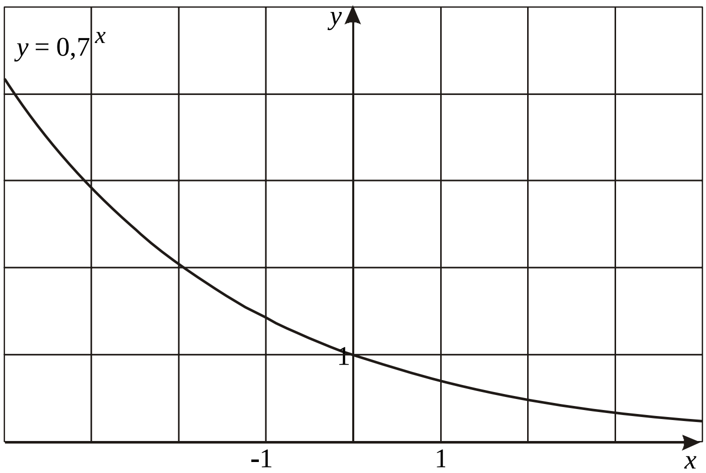
$4^{-1,1} \approx 0,2$ $\quad$ $4^{1,2} \approx 5,3$

$0,25^{-0,9} \approx 3,5$ $\quad$ $0,25^{0,8} \approx 0,3$

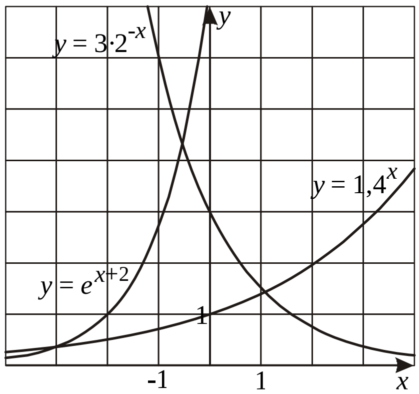
174. **a)** $0,7^x = 0,5$, kun $x \approx 1,9$.

b) $0,7^x = 1,5$, kun $x \approx -1,1$.

c) $0,7^x = 3,5$, kun $x \approx -3,5$.



175. Ohessa ovat käyrät $y = 1,4^x$, $y = 3 \cdot 2^{-x}$ ja $y = e^{x+2}$ kuvaajat.



176. **a)** Funktion $f(x) = (a-2)^x$ määrittelyehto on $a - 2 > 0$, josta $a > 2$.

b) Funktion $f(x) = (a^2 - 2)^x$ määrittelyehto on $a^2 - 2 > 0$, josta $a < -\sqrt{2}$ tai $a > \sqrt{2}$.

177. **a)** Eksponenttifunktion $f(x) = (\sqrt[3]{2})^x$ lausekkeessa kantaluku > 1, joten funktio on aidosti kasvava.

b) Eksponenttifunktion $f(x) = 0,99^x$ lausekkeessa kantaluku < 1, joten funktio on aidosti vähenevä.

c) Eksponenttifunktion $f(x) = 1,01^x$ lausekkeessa kantaluku > 1, joten funktio on aidosti kasvava.

178. On annettu funktio $f(x) = 2e^{x-1}$.

a) Muuttujan x arvo kasvaa arvosta 1,0 arvoon 1,1. Silloin funktion arvo kasvaa

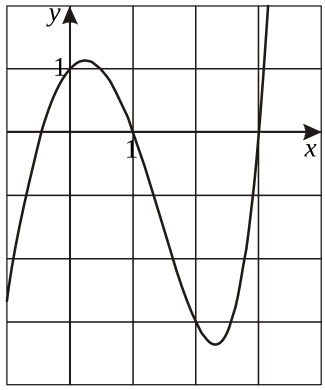
$$\frac{2e^{1,1-1} - 2e^{1,0-1}}{2e^{1,0-1}} = e^{0,1} - 1 \approx 0{,}105 = 10{,}5\ \%.$$

b) Muuttujan x arvo kasvaa arvosta 10,0 arvoon 10,1. Silloin funktion arvo kasvaa

$$\frac{2e^{10,1-1} - 2e^{10,0-1}}{2e^{10,0-1}} = e^{0,1} - 1 \approx 0{,}105 = 10{,}5\ \%.$$

c) Muuttujan x arvo kasvaa arvosta 100,0 arvoon 100,1. Silloin funktion arvo kasvaa

$$\frac{2e^{100,1-1} - 2e^{100,0-1}}{2e^{100,0-1}} = e^{0,1} - 1 \approx 0{,}105 = 10{,}5\ \%.$$



179. Funktion $f(x) = 3^x - 3x^2$ nollakohdat ovat $x \approx -0{,}5$ (likiarvo) ja $x = 1$ (tarkka) sekä $x = 3$ (tarkka).

Derivaatan nollakohdat ovat $x \approx 0{,}2$ ja $x \approx 2{,}3$.

180. **a)** Eksponenttifunktio $f(x) = (a-4)^x$ on aidosti vähenevä, kun $0 < a - 4 < 1$, josta $4 < a < 5$.

b) Eksponenttifunktio $f(x) = (a^2 - 4)^x$ on aidosti vähenevä. kun $0 < a^2 - 4 < 1$. Ehto $0 < a^2 - 4$ toteutuu, kun $a < -2$ tai $a > 2$. Ehto $a^2 - 4 < 1$ eli $a^2 - 5 < 0$ toteutuu, kun $-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$. Ehdot toteutuvat samanaikaisesti, kun $-\sqrt{5} < a < -2$ tai $2 < a < \sqrt{5}$.

181. Valosta pääsee läpi $f(5) = 0{,}73^5 a \approx 0{,}21a$. Tässä a tarkoittaa valon määrää ilman suodattavia muovilevyjä. *Vastaus*: 21 %

182. Olkoon $f(t)$ populaation koko t:n tunnin kuluttua valitusta ajankohdasta laskettuna. Koska muutokset ovat yhtä pitkinä aikaväleinä suhteellisesti yhtä suuria, kasvu on eksponentiaalista, joten $f(t) = k \cdot a^t$.

a) Kasvutekijä a = 1,30. Sovitaan, että tarkastushetkellä t = 0, jolloin $f(0) = k = 233$ ja siis $f(t) = 233 \cdot 1{,}30^t$. Kaksitoista tuntia ennen tarkastushetkeä on t = –12, jolloin populaation koko oli $233 \cdot 1{,}30^{-12} \approx 10$.

b) Puolen vuorokauden päästä populaation koko on $f(12) = 233 \cdot 1{,}30^{12} \approx 5\,428$.

Vastaus: **a)** 10 **b)** 5 430

183. Olkoon b bakteerien määrä alussa. Kahdeksan tuntia on $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ vuorokautta. Bakteerien määrä t:n vuorokauden kuluttua on $4^t b$, joten 8 tunnin kuluttua määrä on $4^{\frac{1}{3}} b \approx 1{,}587b$. *Vastaus*: 58,7 %

2 Eksponenttiyhtälö

190. **a)** $e^x = 1$, josta $e^x = e^0$ ja edelleen $x = 0$.

b) $e^{x^3+4x^2+x} = 1$, josta $e^{x^3+4x^2+x} = e^0$ ja edelleen $x^3 + 4x^2 + x = 0$. Yhtälöstä $x^3 + 4x^2 + x = 0$ saadaan $x(x^2 + 4x + 1) = 0$, josta $x = 0$ tai $x^2 + 4x + 1 = 0$. Jälkimmäisen yhtälön ratkaisu on $x = -2 \pm \sqrt{3}$. *Vastaus*: $x = 0$ tai $x = -2 \pm \sqrt{3}$

191. **a)** Yhtälö $(e^x - e)(e^{2x} - 1) = 0$ toteutuu tarkalleen silloin, kun $e^x = e$ tai $e^{2x} = 1$. Näistä nähdään suoraan ratkaisu: $x = 1$ tai $x = 0$.

b) Muunnetaan yhtälö $k \cdot k^{2x} = \dfrac{\sqrt{k}}{k^2}$ muotoon $k \cdot k^{2x} \cdot k^2 = \sqrt{k}$ ja edelleen $k^{3+2x} = k^{\frac{1}{2}}$. Eksponenttien vertailu antaa $3 + 2x = \dfrac{1}{2}$, josta $x = -\dfrac{5}{4} = -1\dfrac{1}{4}$.

192. **a)** Kun joukossa on x alkiota, sillä on annetussa tapauksessa $2^x = 1024$ osajoukkoa. Koska $1024 = 2^{10}$, on haettu alkioiden määrä $x = 10$.

193. **a)** $6^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_6 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 6} \approx 0{,}90$ **b)** $5^x = 50 \Leftrightarrow x = \log_5 50 = \dfrac{\ln 50}{\ln 5} \approx 2{,}43$

c) $0{,}3^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_{0,3} 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 0{,}3} \approx -1{,}91$

194. **a)**
$$\begin{aligned} 10^x &= 3 \quad | \lg \\ \lg 10^x &= \lg 3 \\ x \lg 10 &= \lg 3 \\ x &= \lg 3 \approx 0{,}477 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 10^x &= 55{,}5 \quad | \lg \\ \lg 10^x &= \lg 55{,}5 \\ x \ln 10 &= \lg 55{,}5 \\ x &= \lg 55{,}5 \approx 1{,}74 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 1{,}66^x &= 2 \, | \ln \\ \ln 1{,}66^x &= \ln 2 \\ x \ln 1{,}66 &= \ln 2 \\ x &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}66} \approx 1{,}37 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 0{,}99^x &= 0{,}75 \quad | \ln \\ \ln 0{,}99^x &= \ln 0{,}75 \\ x \ln 0{,}99 &= \ln 0{,}75 \\ x &= \frac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}99} \approx 28{,}6 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3^{1,5x} &= 7 \quad | \ln \\ \ln 3^{1,5x} &= \ln 7 \\ 1{,}5x \ln 3 &= \ln 7 \\ x &= \frac{\ln 7}{1{,}5 \cdot \ln 3} \approx 1{,}18 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} e^{2x} &= 5 \quad | \ln \\ \ln e^{2x} &= \ln 5 \\ 2x \ln e &= \ln 5 \\ 2x &= \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 5}{2} \approx 0{,}805 \end{aligned}$$

195. **a)** $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \approx 1{,}10$ **b)** $e^x = 100 \Leftrightarrow x = \ln 100 \approx 4{,}61$

c) $e^{2x} = e^2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ **d)** $14 \cdot 10^x = 56 \Leftrightarrow 10^x = 4 \Leftrightarrow x = \lg 4 \approx 0{,}602$

e) $7 = 2 \cdot 10^x \Leftrightarrow 10^x = 3{,}5 \Leftrightarrow x = \lg 3{,}5 \approx 0{,}544$

f) $6 \cdot 10^{2x} = 0{,}058 \Leftrightarrow 10^{2x} = \dfrac{0{,}058}{6} \Leftrightarrow 2x = \lg \dfrac{0{,}058}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \lg \dfrac{0{,}058}{6} \approx -1{,}01$

196. Koska $2^x = 8^y = 2^{3y}$, on $x = 3y$. Tämän sijoitus yhtälöryhmän $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2^x = 8^y \end{cases}$

ensimmäiseen yhtälöön antaa $3y + 2y = 4$ eli $y = \frac{4}{5}$, jolloin $x = \frac{12}{5}$.

Vastaus: $x = \frac{12}{5}$ ja $y = \frac{4}{5}$

197. Muutetaan yhtälö $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$ muotoon $2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $2^x = \frac{1}{2}$ tai $2^x = 8$, joista $x = -1$ tai $x = 3$.

198. Muutetaan yhtälö $e^{2x} - 3e^x - 10 = 0$ muotoon $(e^x)^2 - 3e^x - 10 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $e^x = 5$ tai $e^x = -2$. Jälkimmäinen yhtälö on identtisesti epätosi. Yhtälöstä $e^x = 5$ saadaan $x = \ln 5$.

199. $1{,}01^t \cdot 1 = 1000\,000$, josta $t \lg 1{,}01 = \lg 1000\,000$ ja $t = \frac{\lg 1000\,000}{\lg 1{,}01} \approx 1388{,}45$.

Vastaus: 1 390 vuodessa

200. Olkoon alkuperäinen arvo *k*. Koska arvo vähenee 11,5 % vuosittain, muutostekijä on $1 - \frac{11{,}5}{100} = 0{,}885$. Jos esineen arvo *n*:n vuoden kuluttua on kolmasosa alkuperäisestä, niin $0{,}885^n \cdot k = \frac{1}{3}k$. Jakamalla *k*:lla ja ottamalla logaritmit saadaan

$n \cdot \ln 0{,}885 = -\ln 3$, josta $n = \frac{-\ln 3}{\ln 0{,}885} \approx 8{,}99$. Kysytty aika on noin 9 vuotta.

201. Aika, jossa bakteerimäärä kaksinkertaistuu, ratkaistaan yhtälöstä $2\,000 = 1\,000 \cdot 1{,}22^t$. Logaritmeja käyttäen saadaan yhtälö $\ln 2 = t \cdot \ln 1{,}22$, josta $t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}22} \approx 3{,}5$. Kysytty aika on noin 3,5 vuorokautta.

202. $f(\ln 2) = \frac{1 - e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$, kun $f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x}$. Funktion *f* arvo on $\frac{1}{2}$, kun

$\frac{1 - e^x}{e^x} = \frac{1}{2}$, josta $2 - 2e^x = e^x$. Yhtälön $3e^x = 2$ ratkaisu on $x = \ln \frac{2}{3} \approx -0{,}405$.

203. Ajan *t* kuluttua radioaktiivista ainetta on jäljellä määrä $m = 40 \cdot 2^{-0{,}0462t}$ alkuarvon ollessa 40 (mg). Sijoitetaan *m*:n arvoksi 20 ja ratkaistaan syntynyt yhtälö *t*:n suhteen, jolloin saadaan puoliintumisaika.

Saadaan aluksi $20 = 40 \cdot 2^{-0{,}0462t}$, josta $0{,}5 = 2^{-0{,}0462t}$. Ottamalla logaritmit puolittain päästään yhtälöön $\ln 0{,}5 = -0{,}0462t \cdot \ln 2$, josta ratkeaa $t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}0462 \cdot \ln 2} \approx 21{,}6$.

Puoliintumisaika on 21,6 vuorokautta.

204. **a)** Arvolla $x = 0$ riski on 1 %. Arvolla $x = 0{,}3$ prosentuaalinen riski on $y = e^{2{,}14 \cdot 0{,}3} \approx 1{,}9$. Nähdään, että riski on äskeiseen nähden lähes kaksinkertainen.
b) Asetetaan y:n arvoksi 100 ja ratkaistaan yhtälö x:n suhteen.

$$\begin{aligned} 100 &= e^{2{,}14x} \quad \Big|\ \ln \\ \ln 100 &= 2{,}14x \cdot \ln e \\ \ln 100 &= 2{,}14x \\ x &= \frac{\ln 100}{2{,}14} \approx 2{,}2 \end{aligned}$$

Onnettomuuteen joutumisen riski on 100 % promillearvolla 2,2 ‰.

205. **a)** Sijoitetaan yhtälöön $E = E_0 e^{-kx}$ arvot $E_0 = 400$ lx, $E = 305$ lx ja $x = 0{,}10$ m ja ratkaistaan k.

Yhtälöstä $305\,\mathrm{lx} = 400\,\mathrm{lx} \cdot e^{-k \cdot 0{,}10\,\mathrm{m}}$ saadaan $\frac{305}{400} = e^{-k \cdot 0{,}10\,\mathrm{m}}$. Ottamalla puolittain

logaritmit tulee $\ln\frac{305}{400} = -k \cdot 0{,}10\,\mathrm{m} \cdot \ln e$, josta $k = \frac{\ln\frac{305}{400}}{-0{,}10\,\mathrm{m}} \approx 2{,}71\frac{1}{\mathrm{m}}$.

b) Valaistus vedessä puolen metrin syvyydessä on $E = 400\,\mathrm{lx} \cdot e^{-2{,}71\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}50\,\mathrm{m}} \approx 103\,\mathrm{lx}$.

206. Jos ainetta alussa on m ja puoliintumisaika on T tuntia, ainetta on viiden puoliintumisajan ($5T$) jälkeen vielä jäljellä $\left(\frac{1}{2}\right)^5 m = \frac{1}{32} m = 0{,}03125m$ eli 3,125 %.

Olkoon lääkeaineesta poistunut 99 % ajan xT tuntia kuluttua. Tällöin on

$\left(\frac{1}{2}\right)^x m = \frac{1}{100} m$, josta $x \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{100}$ ja edelleen $x = \frac{\ln\frac{1}{100}}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6{,}64386$.

Koska $15 \le T \le 18$, on $15 \cdot \frac{\ln 100}{\ln 2} \le xT \le 18 \cdot \frac{\ln 100}{\ln 2}$ eli likimain $99{,}7 \le xT \le 119{,}6$.

Vastaus: 3 %, 100–120 h

207. Ostettaessa n arpaa on ainakin yhden voiton todennäköisyys P(ainakin yksi voitto) = 1 – P(ei voittoa) = $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n$. Siten P(ainakin yksi voitto) > $\frac{1}{2}$, kun $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n > \frac{1}{2}$

eli $\left(\frac{19}{20}\right)^n < \frac{1}{2}$, josta $n \lg\frac{19}{20} < \lg\frac{1}{2}$. Tästä saadaan $n > \frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{19}{20}} \approx 13{,}51$.

Vastaus: vähintään 14 arpaa

208. P(ainakin yksi palanut sulake) = 1 – P(ei yhtään palanutta sulaketta) = $1 - 0{,}97^n$.
Ehto on $1 - 0{,}97^n \ge 0{,}12$, josta saadaan $0{,}97^n \le 0{,}88$ ja edelleen $n \cdot \lg 0{,}97 \le \lg 0{,}88$.

$n \ge \frac{\lg 0{,}88}{\lg 0{,}97} \approx 4{,}2$, joten vastaus on 5.

209. P(ainakin yksi taimista jää eloon) = 1 – P(yhtään tainta ei jää eloon) $= 1 - 0{,}4^n \geq 0{,}99$. Sievennyksen jälkeen $0{,}4^n \leq 0{,}01$ ja edelleen logaritmien avulla $n \lg 0{,}4 \leq \lg 0{,}01$. Jaetaan epäyhtälö negatiivisella luvulla lg 0,4, jolloin saadaan

$n \geq \dfrac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}4} = \dfrac{-2}{\lg 0{,}4} \approx 5{,}026$.

Vastaus: On istutettava 6 tainta.

210. **a)** Silmälukujen summa $\underline{x}$ voi saada arvot 2, 4, 6, 7, 9 ja 12. Vastaavat todennäköisyydet ovat $\frac{1}{36}$, $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$E(\underline{x}) = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{1}{9}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 7 + \frac{1}{3}\cdot 9 + \frac{1}{4}\cdot 12 = 8\frac{1}{3}$

b) P(ainakin yksi kolmonen) $\geq$ 0,95 eli $1 -$ P(ei yhtään kolmosta) $\geq$ 0,95. Tästä saadaan edelleen yhtälö $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0{,}95$ eli $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}05$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \lg \frac{2}{3} \leq \lg 0{,}05$, josta $n \geq \dfrac{\lg 0{,}05}{\lg \frac{2}{3}} \approx 7{,}4$. Tarvitaan vähintään 8 heittoa.

3 Eksponenttifunktion derivaatta

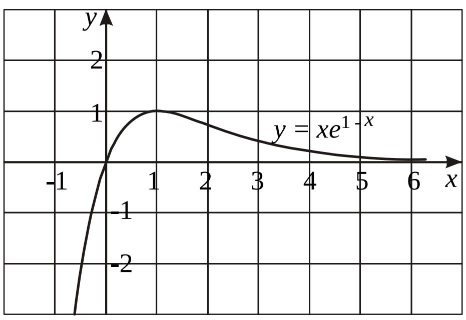
217. Funktion $f(x) = Ae^x + 2Be^{-x}$ derivaatta on $f'(x) = Ae^x - 2Be^{-x}$. Koska $f(0) = 1$, on $A + 2B = 1$. Koska $f'(0) = 2$, on $A - 2B = 2$. Saadun yhtälöparin ratkaisu on $A = \frac{3}{2}$ ja $B = -\frac{1}{4}$. *Vastaus*: $A = \frac{3}{2}$ ja $B = -\frac{1}{4}$

218. **a)** Funktion $f(x) = e^{2x-2} + x^3 - 1$ derivaatta on $f'(x) = 2e^{2x-2} + 3x^2$.

b) Pisteeseen (1, 1) piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(1) = 2e^0 + 3 = 5$ ja yhtälö $y - 1 = 5(x - 1)$ eli $y = 5x - 4$.

c) Tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{4}{5}, 0)$ ja y-akselin pisteessä (0, –4). Pisteitä yhdistävän janan pituus on $\sqrt{(\frac{4}{5} - 0)^2 + (0 - (-4))^2} = \dfrac{4\sqrt{26}}{5} \approx 4{,}1$.

219. Funktio $f(x) = xe^{1-x}$ on määritelty ja jatkuva koko **R**:ssä. Muodostetaan funktion derivaatta: $f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x}(1-x)$. Derivaatan ainoa nollakohta on $x = 1$. Siinä funktiolla on maksimi $f(1) = 1$.



220. Funktion $f(x) = 80(e^{-x} - e^{-2x})$ derivaatta $f'(x) = 80(-e^{-x} + 2e^{-2x})$ on nolla, kun $-e^{-x} + 2e^{-2x} = 0$, josta $e^{-x} = 2e^{-2x}$. Edelleen $\dfrac{e^{2x}}{e^{x}} = 2$, josta $e^{x} = 2$ ja $x = \ln 2$.

Kohdassa $x = \ln 2$ on maksimi

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= 80(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}) \\ &= 80(e^{\ln 2^{-1}} - e^{\ln 2^{-2}}) \\ &= 80(2^{-1} - 2^{-2}) = 20 \end{aligned}$$

	0		$\ln 2$		x
$f'(x)$		+		–	
$f(x)$	min	↗	maks	↘	

Minimikohta $x = 0$ ja minimi $f(0) = 80(e^{-0} - e^{-2\cdot 0}) = 0$.

221. **a)** $D\,2^{x} = 2^{x}\ln 2$ **b)** $D(10^{x} + x) = 10^{x}\ln 10 + 1$
c) $D\,(x+1)\cdot 3^{x} = (x+1)\cdot 3^{x}\ln 3 + 3^{x}$

222. **a)** $D\,2^{2x+1} = 2\cdot 2^{2x+1}\ln 2$ **b)** $D10^{x^2} = 2x\cdot 10^{x^2}\ln 10$
c) $D\,x\cdot 3^{-x} = 3^{-x} - x\cdot 3^{-x}\ln 3$

223. Merkitään $f(x) = e^{x} + x$, jolloin muodostuu kaikkialla jatkuva funktio. Se saa välin [–1, 0] päätepisteissä erimerkkiset arvot, joten funktiolla on välillä]–1, 0[ainakin yksi nollakohta. Koska derivaatta $f'(x) = e^{x} + 1$ on aina positiivinen, funktio on aidosti kasvava. Siksi sillä on tarkalleen yksi nollakohta. Vastaavasti yhtälöllä $e^{x} + x = 0$ on vain yksi reaalijuuri.

224. Muutetaan yhtälö $2^{x} + x^{2} = \sqrt{2}$ muotoon $2^{x} + x^{2} - \sqrt{2} = 0$. Muodostetaan funktio $f(x) = 2^{x} + x^{2} - \sqrt{2}$, joka on jatkuva ja derivoituva kaikkialla.
$f(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$ ja $f(1) = 3 - \sqrt{2} > 0$, joten funktion jatkuvuuden perusteella on ainakin yksi nollakohta välillä]0, 1[.
$f'(x) = 2^{x}\ln 2 + 2x > 0$, kun $x > 0$, joten funktio on tällöin aidosti kasvava. Siis funktiolla f on vain yksi positiivinen nollakohta ja yhtälöllä $2^{x} + x^{2} - \sqrt{2} = 0$ vain yksi positiivinen juuri.

225. Muodostetaan funktio $f(x) = \dfrac{1}{e^{x}} + x$, joka on jatkuva ja derivoituva koko **R**:ssä.
Osoitetaan, että funktion pienin arvo on yksi.
Funktion derivaatta on $f'(x) = -e^{-x} + 1$. Derivaatan nollakohdassa $e^{-x} = 1$, josta $-x = 0$ ja edelleen $x = 0$.

Derivaatan merkkikaavion perusteella minimiarvo $f(0) = \dfrac{1}{e^{0}} + 0 = 1$ on samalla pienin arvo. Siis lauseke $\dfrac{1}{e^{x}} + x$ on arvoltaan aina vähintään 1.

		0		x
$f'(x)$	–		+	
$f(x)$	↘	min	↗	

226. Muodostetaan funktio $f(x) = x^{x} - e^{x-1} = e^{x\ln x} - e^{x-1}$. Koska eksponenttifunktio $g(x) = e^{x}$ on aidosti kasvava, on $f(x) \geq 0$, kun $x\ln x \geq x - 1$. Tämä toteutuu, kun

$h(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$. Kun $x \geq 1$, on $h'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x \geq 0$. Siis funktio *h* on kasvava. Koska $h(1) = 0$, on $h(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$. Näin ollen myös $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$.

$f(x) = 0$, kun $h(x) = 0$. Koska $h(1) = 0$ ja $h'(x) > 0$, kun $x > 1$, on kohta $x = 1$ funktion *h* ainoa nollakohta ja myös funktion *f* ainoa nollakohta.

227. **a)** $a(4) = 35\,000 \cdot e^{-0,2\cdot 4} \approx 15\,727$, joten auton hinta neljän vuoden ikäisenä on noin 15 700 €.

b) Uuden auton hinta eli hinta hetkellä $t = 0$ on 35 000 €. Kysytty auton ikä ratkaistaan yhtälöstä $17\,500 = 35\,000 \cdot e^{-0,2t}$ ja saadaan iäksi 3,5 vuotta.

c) $a'(t) = -7\,000 \cdot e^{-0,2t}$, josta $a'(2) \approx -4\,700$ ja $a'(10) \approx -950$. Saadut arvot ilmoittavat, kuinka suuri (euroina) on auton arvon alenemisnopeus lasketulla hetkellä vuotta kohti

228. Kahvin lämpötila (°C) klo 9.30 on $y(2,5) = 20 + 75 \cdot e^{-\frac{5}{30}} \approx 83$. Samaan aikaan lämpötilan muuttumisnopeus (°C/h) on $y'(2,5) = -5e^{\frac{-2,5}{15}} \approx -4,2$. Lämpötilan alenemisnopeus on siis 4,2 °C/h.

229. Hetkellinen virta saadaan sähkövarauksen derivaattana ajan suhteen:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0,15 \cdot (-e^{-6t} \cdot (-6)) = 0,9 \cdot e^{-6t}$$

Latausvirran voimakkuus ampeereina kolmen sekunnin kuluttua latauksen aloittamisesta on $i(3) = 0,9 \cdot \mathrm{e}^{-6\cdot 3} = 14 \cdot 10^{-9}$. Virran voimakkuus on 14 nA.

230. Merkitään $f(x) = x \cdot 2^x$ ja $g(x) = \ln(x+1)$. Koska $f(0) = 0 \cdot 2^0 = 0$ ja $g(0) = \ln(0+1) = 0$, niin origo on käyrien $y = x \cdot 2^x$ ja $y = \ln(x+1)$ yhteinen piste. Muodostetaan derivaatat: $f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2$ ja $g'(x) = \frac{1}{x+1}$. Derivaattojen arvot $f'(0) = 2^0 + 0 \cdot 2^0 \ln 2 = 1$ ja $g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$ ovat samat, joten käyrät sivuavat toisiaan origossa.

231. Koska $y = b^x$, niin $y' = b^x \ln b$. Yhtälö $y' = 2y$ saadaan muotoon $b^x \ln b = 2b^x$, josta $\ln b = 2$ ja $b = e^2$.

232. Koska väkiluku alenee vuosittain 1,2 %, kasvutekijä on 0,988. Ajan *t* (a) kuluttua väkiluku on $n(t) = 6\,400 \cdot 0,988^t$, jolloin $n'(t) = 6\,400 \cdot 0,988^t \cdot \ln 0,988$. Tästä $n'(10) = -68,48$, mikä merkitsee, että väkiluku vähenee vuoden 2015 alussa nopeudella 68 henkilöä/vuosi.

233. Koska $y = 250 \cdot 1,5^{0,2x}$, niin $y' = 250 \cdot 1,5^{0,2x} \cdot \ln 1,5 \cdot 0,2$. Kun seurannan aloittamisesta on kulunut kahdeksan vuotta, niin $y' = 250 \cdot 1,5^{0,2\cdot 8} \cdot \ln 1,5 \cdot 0,2 \approx 39$. Kasvuston leviämisnopeus on 39 m^2 / vuosi.

234. Funktion $f(x) = e^{-x}$ derivaatta on $f'(x) = -e^{-x} < 0$, joten funktio f on aidosti vähenevä. Koska $f(x) = e^{-x} > 0$, funktion f suurin arvo välillä [1, 2] on $f(1) = e^{-1} \leq 0{,}4 < 1$ ja pienin arvo $f(2) = e^{-2} > 0{,}1 > 0$. Siis $0 < f(x) < 1$, kun $x \in [1, 2]$.

Toinen derivaatta on $f''(x) = e^{-x} > 0$, joten f' on aidosti kasvava. Koska $f'(x) < 0$, niin välillä [1, 2] on $|f'(x)| \leq |f'(1)| \leq 0{,}37 < 0{,}4$.

4 Potenssifunktion derivaatta

238. **a)** $\mathrm{D}\sqrt[3]{x^5} = \mathrm{D}x^{\frac{5}{5}} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ **b)** $\mathrm{D}\frac{x^{3,14}}{x^{-0,86}} = \mathrm{D}x^4 = 4x^3$

c) $\mathrm{D}\frac{x^2}{x^{3-\sqrt{3}}} = \mathrm{D}x^{-1+\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1)x^{\sqrt{3}-2}$

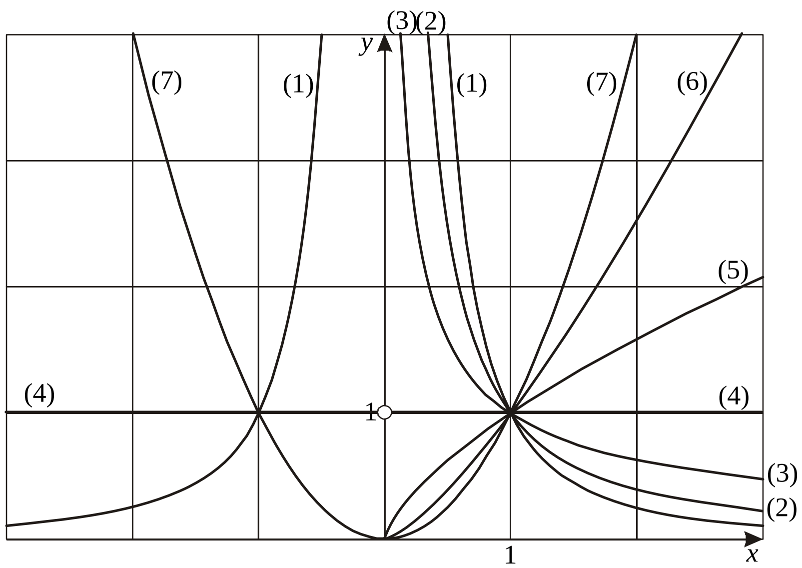
d) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-3}\right) = -\frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} + 12x^{-4} = \frac{12}{x^4} - \frac{1}{6x\sqrt{x}}$

241. **a)** $\mathrm{D}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}x(x^2+1)^{-\frac{4}{3}}$ **b)** $\mathrm{D}\sqrt[4]{\ln x} = \mathrm{D}(\ln x)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4x\sqrt[4]{(\ln x)^3}}$

c) $\mathrm{D}\sqrt{\sqrt{x^3+4x}} = \mathrm{D}(x^3+4x)^{\frac{1}{4}} = \frac{3x^2+4}{4\sqrt[4]{(x^3+4x)^3}}$

242. Käyrien lausekkeet ovat: (1) x^{-2} (2) $x^{-4/3}$ (3) $x^{-2/3}$ (4) x^0
(5) $x^{2/3}$ (6) $x^{4/3}$ (7) x^2

Käyrät on suluilla varustetuin numeroin esitetty alla olevassa kuvassa.



243. Koska $x = e^{\ln x}$, $x > 0$, niin $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$. Tällöin

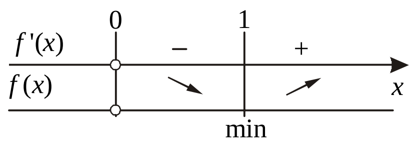
$f'(x) = e^{x \ln x}(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$.

244. Funktion $f(x) = x^x$, $x > 0$, derivaatan $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ ainoa nollakohta on $\frac{1}{e}$. Se on minimikohta, jossa funktio saa pienimmän arvonsa $f(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0{,}692$.

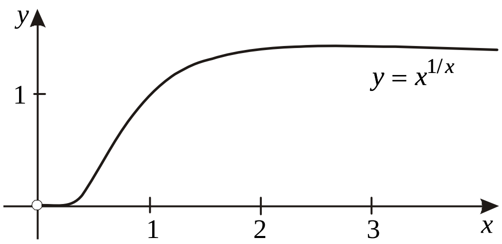
245. Muunnetaan funktion $f(x) = x^{\ln x}$ $(x > 0)$ lauseke derivoimista varten muotoon toiseen muotoon: $f(x) = (e^{\ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$.

Nyt $f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$.

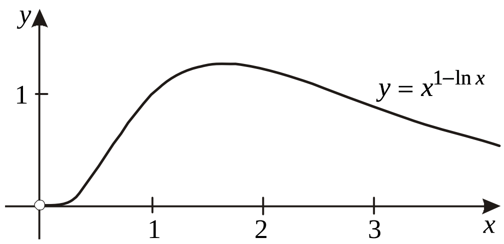
Derivaatan ainoassa nollakohdassa funktio saa pienimmän arvonsa $f(1) = 1$.



246. Funktioiden $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ja $g(x) = x^{1-\ln x}$ ääriarvot voidaan määrittää monilla graafisilla laskimilla suoraan niiden ääriarvotoiminnolla tai esimerkiksi trace-tomintoa soveltamalla.



maksimi $f(2{,}72) \approx 1{,}44$



maksimi $g(1{,}65) \approx 1{,}28$

Lisätehtäviä

Yhdistetty funktio

1. **a)** $g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$

$(g \circ f)(3) = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 48$

b) $f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1$

$(f \circ g)(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$

2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = 3(x^2 - x) = 3x^2 - 3x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 - 3x = 9x^2 - 3x$

3. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$, kun $x^2 - 1 \geq 0$ eli kun $|x| \geq 1$.

$(g \circ f)(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$, kun $x \geq 0$.

$(f \circ g)(-1)$ ei ole määritelty.

4. **a)** Sisäfunktio on $f(x) = 3x$. **b)** Ulkofunktio on $g(x) = x^3$.

5. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1-1)^2 = x^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x-1)^2) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$

$g \circ f = f \circ g$, kun $x^2 = x^2 - 2x + 2$, josta ratkaisuksi tulee $x = 1$.

6. **a)** $\mathrm{D}(2x-1)^3 = 3(2x-1)^2 \cdot 2 = 6(2x-1)^2 = 6(4x^2 - 4x + 1) = 24x^2 - 24x + 6$

b) $\mathrm{D}(\frac{1}{2}x + 7)^{16} = 16(\frac{1}{2}x + 7)^{15} \cdot \frac{1}{2} = 8(\frac{1}{2}x + 7)^{15}$

c) $\mathrm{D}(3x-4)^{-3} = -3(3x-4)^{-4} \cdot 3 = -9(3x-4)^{-4}$

7. **a)** $\mathrm{D}\sqrt{5x} = \dfrac{1}{2\sqrt{5x}} \cdot 5 = \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$

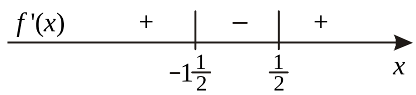
b) $\mathrm{D}\sqrt{2x^2 - 2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - 2}} \cdot 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 2}}$

c) $\mathrm{D}(x - \sqrt{3x^2 + 1}) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2 + 1}} \cdot 6x = 1 - \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

8. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 + 4}} \cdot 4x = 1 - \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 4}} = 0$, kun $1 = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 4}}$, josta

$\sqrt{2x^2 + 4} = 2x$. Otetaan huomioon ehto $x \geq 0$ ja korotetaan toiseen potenssiin, jolloin saadaan $2x^2 + 4 = 4x^2$ eli $2x^2 = 4$ ja siitä $x = \pm\sqrt{2}$. *Vastaus*: $x = \sqrt{2}$

9. Funktion $f(x) = (2x+1)^5 - 160x$ derivaatta $f'(x) = 5(2x+1)^4 \cdot 2 - 160$ on nolla, kun $(2x+1)^4 = 16 = 2^4$. Neljännen juuren ottamisen jälkeen saadaan $2x+1 = \pm 2$ eli $2x+1 = 2$ tai $2x+1 = -2$, joista $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$. Derivaatan merkkikaavion mukaan funktio on aidosti kasvava väleillä $\left]-\infty, -1\frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.



10. **a)** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+\sqrt{x}) = 2(x+\sqrt{x})^2 + 1 = 2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2x + 1$, $x \geq 0$. Yhdistetyn funktion derivaatta on $(f \circ g)'(x) = 4x + 6\sqrt{x} + 2$.

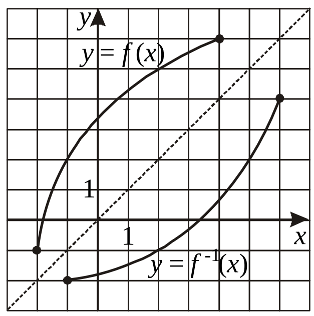
b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2+1) = 2x^2 + 1 + \sqrt{2x^2+1}$. Yhdistetyn funktion derivaatta on $(g \circ f)'(x) = 4x + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

11. $f(x) = \sqrt{g(t)}$, jolloin $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(t)}} \cdot g'(t)$ ja $f'(2) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{9}} \cdot 4 = \dfrac{2}{3}$.

12. $f(x) = (3x+1)^4 - 12x$, joten $f'(x) = 12(3x+1)^3 - 12$. Tangentti on vaakasuora, kun sen kulmakerroin on nolla. Tällöin myös funktion derivaatta on nolla. $f'(x) = 0$, kun $12(3x+1)^3 - 12 = 0$, josta $(3x+1)^3 = 1$ ja edelleen $3x+1 = 1$. Saadaan $x = 0$ ja $y = (3\cdot 0+1)^4 - 12\cdot 0 = 1$. *Vastaus*: Tangentin yhtälö on $y = 1$.

Käänteisfunktio

1. **a)** f:n määrittelyjoukko on $[-2, 4]$.
b) f:n arvojoukko on $[-1, 6]$.
c) f^{-1}:n määrittelyjoukko on $[-1, 6]$.
d) f^{-1}:n arvojoukko on $[-2, 4]$.
e) $f^{-1}(-1) = -2$
f) $f^{-1}(5) = 2$



2. **a)** $y = -2x$, josta $x = -\frac{1}{2}y$. *Vastaus*: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x$

b) $y = x + 3$, josta $x = y - 3$. *Vastaus*: $f^{-1}(x) = x - 3$

c) $y = -3x + 1$, josta $x = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$. *Vastaus*: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

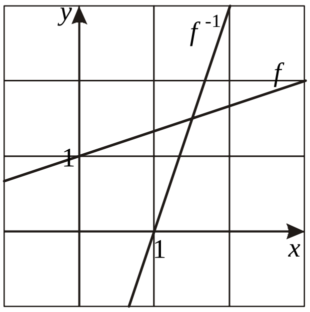
3. Funktion $f(x) = 2x - 3$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) = 2(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) - 3 = x$ ja

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-3) = \frac{1}{2}(2x-3) + \frac{3}{2} = x$.

4. Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ derivaatta $f'(x)=\frac{1}{3}>0$, joten funktio $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ on aidosti kasvava ja sillä on tämän nojalla käänteisfunktio.

$y=\frac{1}{3}x+1$, josta $x=3y-3$. Siis $f^{-1}(x)=3x-3$.



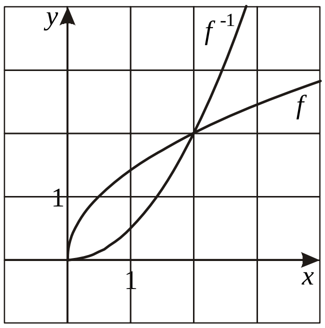
5. Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3+1$ derivaatta on $f'(x)=\frac{3}{2}x^2\geq 0$ ja $f'(x)=\frac{3}{2}x^2=0$, kun $x=0$. Siis funktio *f* on aidosti kasvava, joten käänteisfunktio on olemassa.

$y=\frac{1}{2}x^3+1$, josta $x^3=2y-2$ ja edelleen $x=\sqrt[3]{2y-2}$. Siis $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x-2}$.

6. Funktio *f* on määrittelyjoukossaan $[0,\ \infty[$ aidosti kasvava, joten f^{-1} on olemassa.

Merkitään $y=\sqrt{2x}$, josta $y^2=2x$ ja $x=\frac{1}{2}y^2$, kun $y\geq 0$. Vaihdetaan saadussa yhtälössä *x* ja *y*, jolloin saadaan käänteisfunktion yhtälö: $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2$, kun $x\geq 0$.

Kummankin funktion määrittely- ja arvojoukko on $[0,\ \infty[$.



7. Funktion $f(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$ kuvaaja on nouseva suora, joten funktio *f* on aidosti kasvava. Siis käänteisfunktio on olemassa ja se on $f^{-1}(x)=\frac{9}{5}x+32$. Käänteisfunktion arvona saadaan Fahrenheit-lämpötila, kun muuttujan arvo on Celsius-asteina.

8. Funktion $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$, $x>2$, derivaatta on $f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2}<0$, kun $x>2$, joten funktio on aidosti vähenevä. Siis f^{-1} on olemassa. Johdetaan derivaatta $(f^{-1})'(2)$.

Merkitään $\frac{x+2}{x-2}=2$, jolloin $x=6$. Siis $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(6)}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}=-4$.

Juurifunktio

1. Funktio $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x+5}$ on määritelty, kun $x^2-3x\geq 0$ ja $x+5\geq 0$, joista ($x\leq 0$ tai $x\geq 3$) ja $x\geq -5$. Ehdot yhdessä: $-5\leq x\leq 0$ tai $x\geq 3$

Vastaus: Määrittelyjoukko on $[-5,\ 0]\cup[3,\ \infty[$.

2. Funktion $f(x) = \sqrt[4]{6 - x - x^2}$ määrittelyehto on $-x^2 - x + 6 \geq 0$. Yhtälön $-x^2 - x + 6 = 0$ ratkaisut ovat $x = -3$ tai $x = 2$. Juurrettavana olevan funktion $g(x) = -x^2 - x + 6$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten vastaus on $-3 \leq x \leq 2$.

3. **a)** Ehto: $x - 7 \geq 0$ eli $x \geq 7$. Kun $\sqrt{x-7} = 4$, niin $x - 7 = 16$ ja $x = 23$.

b) $\sqrt[3]{x} = 11$, kun $x = 11^3 = 1\ 331$

c) $\sqrt[4]{x} = 8$, josta $x = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12} = 4\ 096$

4. **a)** $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{256}$, josta $x = (2^{-8})^{-3} = 2^{24} = 16\ 777\ 216$

b) $(x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$, kun $x - 3 = 2^3 = 8$, josta $x = 11$

c) $\sqrt{x+1} - 1 = x$, kun $\sqrt{x+1} = x + 1$. Määrittelyehtona on $x + 1 \geq 0$, josta $x \geq -1$. Korotetaan yhtälö neliöön: $x + 1 = (x+1)^2$, josta $x^2 + x = 0$. Tämän vaillinaisen toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $x = -1$ tai $x = 0$. Ne ovat myös alkuperäisen yhtälön ratkaisut.

5. **a)** Yhtälön $t(n) = 10 \cdot \sqrt[5]{n^3}$ juurilauseke potenssimuodossa on $n^{\frac{3}{5}}$.

b) Kahden annoksen lämmittämiseen kuluu aikaa $t(2) = 10 \cdot \sqrt[5]{2^3} \approx 15$ eli noin 15 minuuttia.

c) Ratkaistaan yhtälö $26 = 10 \cdot \sqrt[5]{n^3}$. Koska $n^{\frac{3}{5}} = 2{,}6$, niin $n = 2{,}6^{\frac{5}{3}} \approx 4{,}9$. Sanotussa ajassa, 26 minuuttia, voidaan lämmittää 5 annosta.

6. **a)** $D\sqrt{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ **b)** $D\sqrt[3]{2x} = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}$

c) $D\, x\sqrt[3]{x^2} = D\, x^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

7. **a)** $D\sqrt{3x+2} = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$ **b)** $D\sqrt{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

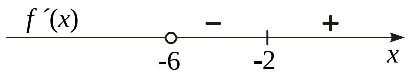
c) $D\sqrt{1 - x^4} = \frac{-4x^3}{2\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}}$

8. **a)** $D\sqrt[3]{3 - 2x} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(3-2x)^2}}$ **b)** $D\sqrt[5]{5x+1} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^4}}$

c) $D\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = D\, x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

9. Funktio $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$ on määritelty ehdoilla $x-2\geq 0$ ja $5-x\leq 0$ eli välillä $2\leq x\leq 5$, jolla se on myös jatkuva. Sen derivaatta $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}$ saa arvon 0, kun $\sqrt{x-2}=\sqrt{5-x}$ eli kun $x=3\frac{1}{2}$. Funktion suurin arvo on $f(3\frac{1}{2})=\sqrt{6}$ ja pienin $f(2)=f(5)=\sqrt{3}$.

10. Funktio $f(x)=\frac{1}{2}(x+11)-2\sqrt{x+6}$ määritelty arvoilla $x\geq -6$. Sen derivaatta on $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+6}}$, $x>-6$. Derivaatan nollakohta on $x=-2$. Derivaatan merkkikaaviosta päätellään ääriarvon laatu. Saadaan maksimi $f(-6)=2\frac{1}{2}$ ja minimi $f(-2)=\frac{1}{2}$.

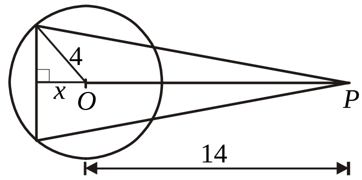


11. Funktio $f(x)=\sqrt{(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2}$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla. Se saa pienimmän arvonsa sillä muuttujan arvolla, jolla $g(x)=(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2$ saa pienimmän (ei-negatiivisen) arvon. Tämä voi esiintyä vain g:n derivaatan nollakohdassa. $g'(x)=-2(a-x)-2(b-x)-2(c-x)$ $=6x-2(a+b+c)=0$, kun $x=\dfrac{a+b+c}{3}$. Tämä osoittautuu derivaatan merkkikaavion perusteella pienimmän arvon kohdaksi.

12. Funktio $f(x)=\sqrt{-x^2+13x}$ on määritelty, kun $-x^2+13x\geq 0$ eli arvoilla $0\leq x\leq 13$. Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa, kun funktio $g(x)=-x^2+13x$ saa suurimman ja pienimmän ei-negatiivisen arvonsa. Funktion g derivaatta on $g'(x)=-2x+13$, joten g:n kuvaajaparaabelin huippu on kohdassa $x=\dfrac{13}{2}=6\dfrac{1}{2}$. Siinä $g(\frac{13}{2})=42\frac{1}{4}$ ja $f(\frac{13}{2})=\sqrt{42\frac{1}{4}}=6\frac{1}{2}$. Välin päätepisteissä on $g(0)=g(13)=\sqrt{0}=0$ ja siis $f(0)=f(13)=0$. Haettu f:n arvojoukko on $[0,\ 6\frac{1}{2}]$.

13. Funktio $f(x)=\sqrt[4]{-x^2+3x+10}$ on määritelty, kun juurrettava $-x^2+3x+10\geq 0$. Epäyhtälö $-x^2+3x+10\geq 0$ toteutuu välillä $-2\leq x\leq 5$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa silloin, kun juurrettava $g(x)=-x^2+3x+10$ saa suurimman ja pienimmän ei-negatiivisen arvonsa. Funktion g derivaatta $g'(x)=-2x+3$ saa arvon 0 kohdassa $x=\dfrac{3}{2}$. Siinä kohdassa on g:n kuvaajana olevan alaspäin aukeavan paraabelin huippu. Koska $g(\frac{3}{2})=\frac{49}{4}$, niin f:n suurin arvo on $f(\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{7}{2}}$. Välin päätepisteissä on g:n arvo 0, joten f:n pienin arvo on $f(-2)=f(5)=0$.

14. Valitaan muuttujaksi x keskipisteen etäisyys kannasta, jolloin riittää tarkastella suljettua väliä $0 \le x \le 4$. Kolmion pinta-ala on



$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{16 - x^2}(14 + x) = (14 + x)\sqrt{16 - x^2}.$$

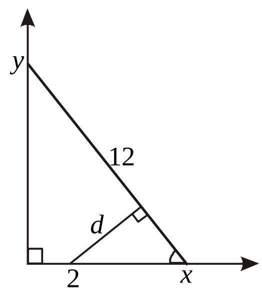
$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} + (14 + x)\frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

$$= \sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2 + 14x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Yhtälö $A'(x) = 0$ sievenee muotoon $x^2 + 7x - 8 = 0$, josta $x = 1$. Luvuista $A(0) = 56$, $A(4) = 0$ ja $A(1) = 15\sqrt{15} \approx 58{,}1$ viimeksi mainittu on suurin. Kolmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo on $15\sqrt{15} \approx 58{,}1$.

15. Vektorin $(t + 2)\bar{i} + (t - 1)\bar{j}$ pituus on $\sqrt{(t + 2)^2 + (t - 1)^2}$. Se saa pienimmän arvon silloin, kun ei-negatiivinen funktio $f(t) = (t + 2)^2 + (t - 1)^2 = 2t^2 + 2t + 5$ saa pienimmän arvonsa. Pienin arvo liittyy f:n kuvaajana olevan ylöspäin aukeavan paraabelin huippuun. Se sijaitsee derivaatan $f'(t) = 4t + 2$ nollakohdassa $t = -\frac{1}{2}$. Vektorin pienin pituus on $\sqrt{(-\frac{1}{2} + 2)^2 + (-\frac{1}{2} - 1)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. Oletetaan aluksi, että suoran ja x-akselin leikkauskohta x on suurempi kuin 2 (kuva). Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista saadaan verranto $\frac{d}{x - 2} = \frac{y}{12}$, jossa $y = \sqrt{144 - x^2}$. Etäisyys d riippuu x:stä yhtälön



$$d(x) = \frac{1}{12}(x - 2)\sqrt{144 - x^2}$$ esittämällä tavalla. Derivaatalla

$$d'(x) = \frac{1}{12}\left(\sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{144 - x^2}}\right)$$ on nollakohtana $x = 9$ (tai $x = -8$), joka derivaatan merkkitarkastelussa osoittautuu d:n suurimman arvon kohdaksi, kun $x > 2$. Tämä arvo on

$$d(9) = \frac{7\sqrt{7}}{4} \approx 4{,}63.$$ Se on myös suurin mahdollinen etäisyys, sillä tapauksessa $0 < x < 2$ etäisyys on aina pienempi kuin 2.

17. Funktiot $f(x) = x^3$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ovat toistensa käänteisfunktioita, joten niiden kuvaajat kohtaavat suoralla $y = x$. Yhteisten pisteiden x-koordinaatit $x = 0$ ja $x = \pm 1$ saadaan silloin yhtälön $x^3 = x$ ratkaisuina.

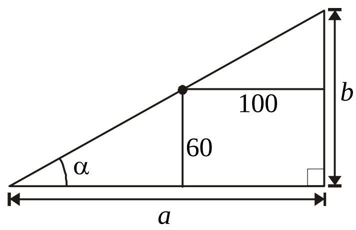
Kulman laskemisessa tarvitaan derivaattoja $f'(x) = 3x^2$ ja $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \ne 0$.

Kohdassa $x = 0$ on käyrän $y = x^3$ tangentin kulmakerroin $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, joten tangentti on vaakasuora. Käyrän $y = \sqrt[3]{x}$ tangentti on vastaavasti pystysuora. Siis käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti origossa, joten tämä leikkauskulma on 90°.

Kun $x = \pm 1$, on käyrän $y = x^3$ tangentin kulmakerroin $f\,'(\pm 1) = 3\cdot(\pm 1)^2 = 3$ ja käyrän $y = \sqrt[3]{x}$ tangentin kulmakerroin $g\,'(\pm 1) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(\pm 1)^2}} = \dfrac{1}{3}$. Tangenttien välinen kulma u saadaan yhtälöstä $\tan u = \left|\dfrac{3-\frac{1}{3}}{1+3\cdot\frac{1}{3}}\right| = \dfrac{4}{3}$, josta $u \approx 53{,}1°$.

18. Merkitään oheisen kuvan mukaan $k = \tan\alpha = \dfrac{60}{a-100} = \dfrac{b-60}{100}$, $k > 0$, jolloin $a = 100 + \dfrac{60}{k}$ ja $b = 60 + 100k$. Oikopolku on lyhin silloin, kun sen neliö

$f(k) = a^2 + b^2 = (100 + \dfrac{60}{k})^2 + (60 + 100k)^2$ on pienin.



Funktion f derivaatta on

$$f'(k) = 2\left(100 + \frac{60}{k}\right)\left(-\frac{60}{k^2}\right) + 2(60 + 100k)\cdot 100$$

$$= 200(60+100k) - 2\cdot\frac{60+100k}{k}\cdot\frac{60}{k^2} = (60+100k)\left(200 - \frac{120}{k^3}\right).$$

Derivaatan ainoa (positiivinen) nollakohta on yhtälön $200 - \dfrac{120}{k^3} = 0$ juuri $k = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$ $\approx 0{,}8434$. Derivaatan merkkitarkastelu osoittaa sen pienimmän arvon kohdaksi, koska esimerkiksi $f'(0{,}5) \approx -8{,}4\cdot 10^4 < 0$ ja $f'(1) \approx 1{,}3\cdot 10^4 > 0$. Saadaan $\tan\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$, josta $\alpha \approx 40{,}1°$.

19. Ajetaan matka s (km) nopeudella $v = 1{,}2\sqrt{p-92}$ (km/h), jolloin aikaa kuluu $\dfrac{s}{v}$ tuntia ja polttoainetta $\dfrac{sp}{v} = \dfrac{sp}{1{,}2\sqrt{p-92}} = f(p)$ litraa. Funktiolle f on haettava pienin arvo välillä $p > 92$. Derivaatan $f'(p) = \dfrac{s}{1{,}2}\cdot\dfrac{\sqrt{p-92} - p\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{p-92}}}{p-92}$ ainoaksi nollakohdaksi saadaan $p = 184$, ja se osoittautuu pienimmän arvon kohdaksi, sillä esimerkiksi $f'(180) \approx -0{,}002s$ ja $f'(200) \approx 0{,}006s$. Kun $p = 184$ l/h, nopeus on noin 11,5 km/h.

Logaritmifunktio

1. **a)** $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$

b) $\ln 0{,}5 + \ln 2 = \ln 1 = 0$

c) $\log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 5 = 1$

d) $\log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 4$

$= \log_2 2^2 = 2$

e) $\frac{1}{5}\ln 7^{10} = \frac{10}{5}\ln 7 = 2\ln 7 = \ln 49$

f) $3\lg\sqrt[3]{x} = \lg(x^{\frac{1}{3}})^3 = \lg x$

2. **a)** $\ln 7 \approx 1{,}946$

b) $\lg 0{,}86 \approx -0{,}066$

c) $\lg e \approx 0{,}434$

d) $\log_2 7 \approx 2{,}807$

e) $\log_3 2 \approx 0{,}631$

f) $\log_{0{,}5} 50 \approx -5{,}644$

3. **a)** $e^{\ln 10} = 10$

b) $5^{\log_5 4} = 4$

c) $\log_9 9^e = e$

d) $\lg 10^{-3} = -3$

4. **a)** $\lg x = 2,\ x > 0$

$\lg x = \lg 10^2;\ x = 100$

b) $\log_2 x = 3,\ x > 0$

$\log_2 x = \log_2 2^3;\ x = 8$

c) $\log_3 x = -1,\ x > 0$

$\log_3 x = \log_3 3^{-1};\ x = \frac{1}{3}$

d) $\log_2 \sqrt{2} = x;\ \log_2 2^{\frac{1}{2}} = x;$

$x = \frac{1}{2}$

e) $\log_x 49 = 2,\ x > 0,\ x \neq 1;$

$x^2 = 49$, josta $x = \pm 7$. Juurista vain $x = 7$ kelpaa.

f) $\log_x 4 = -2,\ x > 0,\ x \neq 1;$

$x^{-2} = 4$, josta

$x = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

5. **a)** Ehto: $x - 1 > 0$ eli $x > 1$

$\ln(x-1) = \ln 3$, josta $x - 1 = 3$ ja $x = 4$.

b) Ehdot $x^2 - 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$ yhdessä: $x > 1$

$\lg(x^2 - 1) - \lg(x - 1) = 2$

$\lg\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lg 10^2$

$\lg(x + 1) = \lg 100$, josta $x = 99$

6. **a)** $\ln x > 3\ln 3,\ x > 0$

$\ln x > \ln 3^3$

Funktion $\ln x$ aidosti kasvavuuden perusteella vastaus on $x > 27$.

b) $\ln 12 - \ln x < \ln 3,\ x > 0$

$\ln\frac{12}{x} < \ln 3$, josta $\frac{12}{x} < 3$ ja edelleen vastaus $x > 4$

7. **a)** $4 = -\lg[H^3O^+]$, josta $\lg[H^3O^+] = -4$ ja sitten $[H^3O^+] = 10^{-4}$

Vastaus: 10^{-4} mol/dm^3

b) $7 = -\lg[H^3O^+]$, josta

$\lg[H^3O^+] = -7$ ja $[H^3O^+] = 10^{-7}$

Vastaus: 10^{-7} mol/dm^3

c) $10 = -\lg[H^3O^+]$, josta $\lg[H^3O^+] = -10$ ja $[H^3O^+] = 10^{-10}$

Vastaus: 10^{-10} mol/dm^3

8. **a)** $D\ln x^3 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

b) $D\ln(3x - 2) = \frac{3}{3x - 2}$

c) $D\ln|3x - 2| = \frac{3}{3x - 2}$

9. Polynomilauseke $8x^3-12x^2+6x-1$ saa kohdassa $x=3$ positiivisen arvon 125. Siis funktio $f(x)=\ln(8x^3-12x^2+6x-1)$ määritelty ja myös derivoituva tässä kohdassa.

Derivaatta on $f'(x)=\dfrac{24x^2-24x+6}{8x^3-12x^2+6x-1}$, joten $f'(3)=\dfrac{24\cdot 9-24\cdot 3+6}{8\cdot 27-12\cdot 9+18-1}=\dfrac{6}{5}$.

10. Kun $f(x)=3\ln x-\ln(5-x)$, on $f'(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{5-x}$, $0<x<5$. Yhtälöllä $f'(x)=0$ on ratkaisu $x=7\dfrac{1}{2}$, mutta se ei toteuta funktion määrittelyehtoa. Derivaatalla ei siis ole nollakohtia.

11. Funktion $f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln\sqrt{xe}$, $x>0$, derivaatta on $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{e}{2\sqrt{xe}}}{\sqrt{xe}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x}$.

$f'(x)=0$, kun $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x}=0$, josta $x=1$.

Funktio $f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln\sqrt{xe}$ on vähenevä, kun $f'(x)<0$ eli arvoilla $0<x\leq 1$.

12. Yhtälön $\ln x-ax=0$ juuret ovat funktion $f(x)=\ln x-ax$ nollakohtia. Derivaatta on $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$, jossa $x>0$. Jos $a<0$, on $f'(x)>0$ ja funktio f näin ollen aidosti kasvava. Koska $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$ ja esimerkiksi $f(1)=-a>0$, funktiolla on tarkalleen yksi nollakohta. Sama pätee, kun $a=0$. Silloin ainoana nollakohtana on logaritmifunktiolle tunnetusti $x=1$.

Oletetaan nyt, että $a>0$. Derivaatalla on silloin ainoana nollakohtana $x=\dfrac{1}{a}$. Derivaatan merkkitarkastelu osoittaa sen funktion suurimman arvon kohdaksi. Suurin arvo on $f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1$. Jos se on negatiivinen, nollakohtia ei ole. Tällöin $-\ln a-1<0$, josta $a>\dfrac{1}{e}$. Jos suurin arvo on nolla, jolloin $a=\dfrac{1}{e}$, tulee tarkalleen yksi nollakohta.

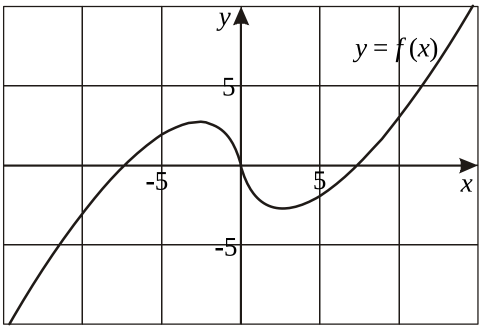
	0		$\frac{1}{a}$		x
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

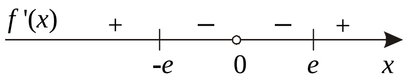
Kun suurin arvo on positiivinen, jolloin $a<\dfrac{1}{e}$, nollakohtia tulee kaksi. Käyrällä on silloin x-akselin kanssa kaksi leikkauskohtaa. Nimittäin $f(\dfrac{1}{a})>0$ ja $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, mikä merkitsee leikkauskohtaa välillä $0<x<\dfrac{1}{a}$. Toisaalta derivaatta vähenee aidosti maksimikohdan jälkeen, jolloin käyrän jyrkkyys alaspäin kasvaa ja leikkauspiste x-akselin kanssa saavutetaan.

Yhteenveto: Yhtälöllä on yksi juuri, kun $a\leq 0$ tai $a=\dfrac{1}{e}$, kaksi juurta, kun $0<a<\dfrac{1}{e}$, ja ei yhtään juurta, kun $a>\dfrac{1}{e}$

13. Tarkastellaan käyrien $y = 2x + x\ln x$ ja $y = 2x - \frac{3}{8}$ y-koordinaattien erotusta $f(x) = 2x + x\ln x - (2x - \frac{3}{8}) = x\ln x + \frac{3}{8}$. Muodostettu funktio f on määritelty ja jatkuva kaikilla $x > 0$. Sen derivaatan $f'(x) = \ln x + 1$ ainoa nollakohta $x = \frac{1}{e}$ osoittautuu funktion pienimmän arvon kohdaksi. Pienin arvo on $\frac{1}{e} \cdot (-1) + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{e}$ $\approx 0{,}0071 > 0$. Funktio f saa siis vain positiivisia arvoja. Se merkitsee geometrisesti, että käyrä $y = 2x + x\ln x$ on käyrän $y = 2x - \frac{3}{8}$ yläpuolella kaikilla $x > 0$.

14. Funktio $f(x) = x\ln|x| - 2x$ on määritelty ja jatkuva nollasta poikkeavilla x:n arvoilla. Derivaatan $f'(x) = \ln|x| - 1$ nollakohdat $-e$ ja e ovat ääriarvokohtia. Edellisessä funktiolla on maksimi $f(-e) = e$, jälkimmäisessä minimi $f(e) = -e$.





15. Funktion $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x}$ derivaatta on $f'(x) = \frac{-\frac{x}{2-x} - \ln(2-x)}{x^2}$, $x < 2$. Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa $x = 1$. Siinä derivaatta saa arvon –1, joka on leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentin suuntakulma –45° saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = -1$. Funktion kuvaaja leikkaa siis x-akselin 45°:n kulmassa. Vastauksena voidaan antaa myös kulma –45°.

16. Kirjoitetaan epäyhtälö $\ln x \le x^{\frac{1}{e}}$ muotoon $\ln x - x^{\frac{1}{e}} \le 0$ ja muodostetaan funktio $f(x) = \ln x - x^{\frac{1}{e}}$. Funktio on kaikilla positiivisilla muuttujan arvoilla määritelty ja jatkuva. Merkitään derivaatta $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}x^{\frac{1}{e}-1}$ nollaksi, jolloin päästään yhtälöön $\frac{1}{x} = \frac{1}{e}x^{\frac{1}{e}-1}$. Kerrotaan se xe:llä muotoon $e = x^{\frac{1}{e}}$. Tästä $x = e^e$, joka on derivaatan ainoa nollakohta. Se on maksimikohta ja samalla suurimman arvon kohta. (Esimerkiksi $f'(10) \approx 0{,}014 > 0$ ja $f'(20) \approx -0{,}0054 < 0$.) Funktion suurin arvo on $f(e^e) = e - e = 0$, joten kaikilla $x > 0$ pätee $f(x) \le 0$. Silloin myös epäyhtälö $\ln x \le x^{\frac{1}{e}}$ on voimassa kaikilla $x > 0$.

17.

x	$\frac{\ln(x^2-x-5)}{x-3}$
2,9	6,733446
2,99	5,118804
2,999	5,011537
2,9999	5,001150
3,0001	4,998850
3,001	4,988537
3,01	4,888540
3,1	4,121097

Numeerinen tutkimus viittaa siihen, että $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-x-5)}{x-3}=5$.

Eksponenttifunktio

1. **a)** $0{,}6^x=1$ eli $0{,}6^x=0{,}6^0$, josta $x = 0$

b) $5^x=625$ ja edelleen $5^x=5^4$, josta $x = 4$

c) Yhtälö on identtisesti epätosi. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

2. $3^{2x}-6\cdot 3^x+5=0$, josta $(3^x)^2-6\cdot 3^x+5=0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $e^x=1$ tai $e^x=5$, joista $x = 0$ tai $x=\ln 5$.

3. $(e^{2x}-1)(e^x-9)=0$, kun $e^{2x}-1=0$ tai $e^x-9=0$.
$e^{2x}=1$ tai $e^x=9$, joista $e^{2x}=e^0$ tai $e^x=e^{\ln 9}$. Näistä $x = 0$ tai $x=\ln 9$.

4. **a)** $e^x<e$ eli $e^x<e^1$. Koska $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava funktio, on $x<1$.

b) $4^x>8$, josta $(2^2)^x>2^3$ eli $2^{2x}>2^3$. Koska $f(x) = 2^x$ edustaa aidosti kasvavaa funktiota, on $2x>3$. Vastaus on $x>\frac{3}{2}$.

c) $0{,}2^x\le 1$, josta $0{,}2^x\le 0{,}2^0$. Koska funktio $f(x)=0{,}2^x$ on aidosti vähenevä, on vastaus $x\ge 0$.

5. **a)** Kun $f(x)=e^{2x}-6e^x$, on $f'(x)=2e^{2x}-6e^x=2e^x(e^x-3)$. Ehto $f'(x)=0$ toteutuu vain, kun $e^x=3$ eli arvolla $x = \ln 3$.

b) Kun $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$, on $f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}(1-\frac{1}{2}x)$. Ehto $f'(x)=0$ toteutuu vain, kun $1-\frac{1}{2}x=0$ eli arvolla $x = 2$.

6. Lasilevy päästää läpi 87 % siihen osuvasta valosta, joten yhden levyn läpi päässeen valon määrä on $f(1)=0{,}87^1\cdot a=0{,}87a$. Tässä a tarkoittaa valon määrää ilman suodattavia lasikerroksia. Kolmen päällekkäin asetetun levyn läpi pääsee valoa $f(3)=0{,}87^3\cdot a\approx 0{,}66a$ eli 66 %.

7. Väestön kasvun malliksi saadaan yhtälö $y = 40\,000 \cdot 1{,}025^t$. Sijoitetaan $y = 1\,000\,000$ ja ratkaistaan syntynyt yhtälö ajan t suhteen.

$$1\,000\,000 = 40\,000 \cdot 1{,}025^t$$
$$25 = 1{,}025^t \quad \big|\ln$$
$$\ln 25 = t \cdot \ln 1{,}025$$
$$t = \frac{\ln 25}{\ln 1{,}025} \approx 130$$

Miljoonan raja saavutetaan noin 130 vuoden kuluttua vuodesta 1878 laskien eli vuonna 2008.

8. **a)** P(joka kerralla eri numero) = $1 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}72$

b) P(ainakin yksi yhdeksikkö) = $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}95$, josta $n \geq 28{,}4$. Onnenpyörää on pyöräytettävä vähintään 29 kertaa.

9. P(ainakin yhden henkilön syntymäpäivä on joulukuun kuudes) = 1 – P(kenenkään syntymäpäivä ei ole joulukuun kuudes). Satunnaisen henkilön syntymäpäivä ei ole joulukuun kuudes todennäköisyydellä $\frac{364}{365}$ (ja karkausvuonna todennäköisyydellä $\frac{365}{366}$). Vastaavasti n:n henkilön syntymäpäivä ei ole joulukuun kuudes todennäköisyydellä $\left(\frac{364}{365}\right)^n$ (ja karkausvuonna $\left(\frac{365}{366}\right)^n$). Annetusta ehdosta saadaan yhtälö

$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$ eli $\left(\frac{364}{365}\right)^n = \frac{1}{2}$ (ja karkausvuonna $\left(\frac{365}{366}\right)^n = \frac{1}{2}$).

Ratkaistaan yhtälöstä n:

$n \lg \frac{364}{365} = \lg \frac{1}{2}$ (tai karkausvuonna $n \lg \frac{365}{366} = \lg \frac{1}{2}$), josta saadaan

$n = \dfrac{\lg \frac{1}{2}}{\lg \frac{364}{365}} \approx 252{,}7$ (tai karkausvuonna $n = \dfrac{\lg \frac{1}{2}}{\lg \frac{364}{365}} \approx 253{,}3$).

Siis arvolla $n = 253$ on todennäköisyys likimain $\frac{1}{2}$. Todennäköisyys sille, että ainakin yksi näistä 253 henkilöstä on syntynyt 6. joulukuuta on $\frac{1}{2}$.

Vastaus: Joukossa on oltava 253 henkilöä.

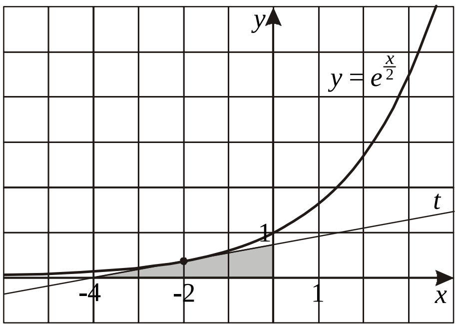
10. Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}$ derivaatta on $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\left(x - \frac{3}{4}\right)\right)$

$= \left(\frac{3}{4} - x\right) e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}$. Koska e:n potenssi on positiivinen kaikilla muuttujan arvoilla, derivaatta on negatiivinen, kun $\frac{3}{4} - x < 0$ eli kun $x > \frac{3}{4}$.

11. Kun $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, on $f'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{2x}$. Ehdot $f(0) = 1$ ja $f'(0) = 4$ johtavat yhtälöpariin $A + B = 1$ ja $2A - 2B = 4$. Ratkaisuksi saadaan $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

12. Kun $x = -2$, on $e^{\frac{-2}{2}} = \frac{1}{e}$. $\mathrm{D}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ja derivaatan arvo kohdassa $x = -2$ on

$\frac{1}{2}e^{\frac{-2}{2}} = \frac{1}{2e}$ = käyrän tangentin kulmakerroin.

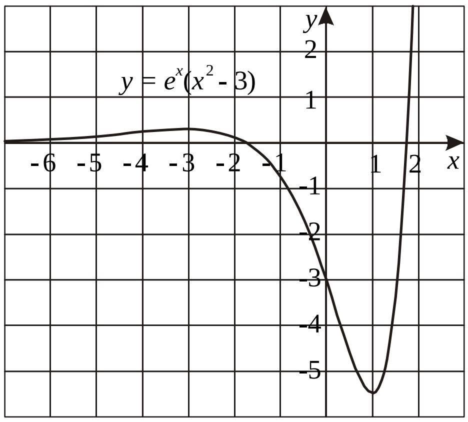


Tangentin yhtälö $y - \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}(x - (-2))$ sievenee yhtälöksi $y = \frac{1}{2e}x + \frac{2}{e}$. Kun $x = 0$, on $y = \frac{2}{e}$ ja kun $y = 0$, on $x = -4$. Kolmion ala on $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{e}\cdot|-4| = \frac{4}{e} \approx 1{,}47$.

13. Funktio $f(x) = -\ln(1 + e^x)$ on määritelty ja jatkuva koko **R**:ssä. Sen derivaatta on $f'(x) = -\frac{e^x}{1 + e^x}$. Koska aina $e^x > 0$, niin $f'(x) < 0$ kaikilla x:n arvoilla. Siksi f on aidosti vähenevä.

14. Funktion $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5x$ derivaatta $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x + 5$ voidaan kirjoittaa muotoon $2((e^x)^2 - 3e^x + \frac{9}{4}) + \frac{1}{2} = 2(e^x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$, josta nähdään, että derivaatta on aina positiivinen. Siksi f on koko **R**:ssä aidosti kasvava.

15. Funktio $f(x) = e^x(x^2 - 3)$ on määritelty ja jatkuva koko **R**:ssä. Muodostetaan funktion derivaatta:



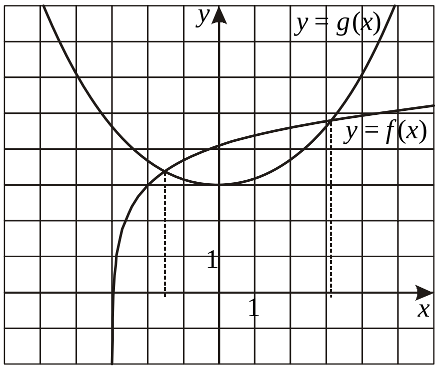
$f'(x) = e^x(x^2 - 3) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 3)$.
Ehto $f'(x) = 0$ toteutuu kohdissa $x = 1$ ja $x = -3$. Edellinen on minikohta, jälkimmäinen maksimikohta. Minimi on $f(1) = -2e$ ja maksimi $f(-3) = \frac{6}{e^3}$.

16. Funktio $f(x) = e^x - x$ on kaikkialla jatkuva. Sen derivaatan $f'(x) = e^x - 1$ ainoa nollakohta on $x = 0$. Derivaatan merkkikaavion mukaan funktiolla on siinä kohdassa minimi $f(0) = 1$. Kaikkialla jatkuvan funktion ainoa ääriarvo, minimi, on funktion pienin arvo.

17 . Oheiseen kuvaan on piirretty funktioiden

$$f(x) = \ln(x+3)+3 \text{ ja } g(x) = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$$

kuvaajat. Niiden leikkauspisteiden x-koordinaattien likiarvot voidaan helposti määrittää graafisella laskimella. Esimerkiksi nelidesimaaliset likiarvot ovat –1,5189 ja 3,1546



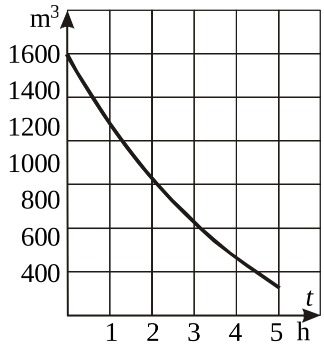
18. Muutetaan yhtälö $2^x = \sqrt{x+1}+1$ muotoon $2^x - \sqrt{x+1} - 1 = 0$. Ehtona on $x \geq -1$. Muodostetaan funktio $f(x) = 2^x - \sqrt{x+1} - 1$, joka on jatkuva, kun $x \geq -1$. Koska $f(0) = 2^0 - \sqrt{0+1} - 1 = -1 < 0$ ja $f(3) = 2^3 - \sqrt{3+1} - 1 = 5 > 0$, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä]0, 3[ja yhtälöllä $2^x = \sqrt{x+1}+1$ ainakin yksi juuri.

19. **a)** Ohessa on funktion $f(t) = 1\,600e^{-0.22t}$ kuvaaja välillä $0 \leq t \leq 5$.

b) Derivaatta $f'(t) = 1\,600e^{-0,22t} \cdot (-0,22) = -352e^{-0,22t}$ ilmaisee vesimäärän muutosnopeuden. Kello 10 se oli $f'(3) \approx -182$ kuutiometriä tunnissa. Tällä nopeudella täysi säiliö tyhjenisi noin 1 600/ 182 $\approx 8{,}8$ tunnissa.

c) Kun pumppaus käynnistettiin klo 12, säiliössä oli vettä $f(5) \approx 533$ kuutiometriä.

Vastaus: **b)** $180\,\text{m}^3/\text{h}$, n. 9 tunnissa **c)** 530 m^3



20. **a)** $v(0) = \dfrac{192}{8+16e^{-0,48\cdot 0}} = 8$. Väestön määrä alussa oli 8 000.

b) $v'(t) = \dfrac{576e^{0,48t}}{25(e^{0,48t}+2)}$, jolloin $v'(10) = 0{,}1835$. Muutosnopeus oli 184 as./vuosi.

21. **a)** Kun sijainnin y-koordinaatti $y = 34(1-e^{-1,25t}) - 8t$ derivoidaan ajan suhteen, saadaan pystysuuntainen nopeus $v_y = 42{,}5e^{-1,25t} - 8$. Liikeradan huipulla se on nolla, jolloin $e^{-1,25t} = \dfrac{8}{42{,}5}$ ja $t = \dfrac{\ln\frac{42{,}5}{8}}{1{,}25} \approx 1{,}34$ (s). Kun tämä sijoitetaan y:n lausekkeeseen, saadaan nousukorkeudeksi 16,9 m.

b) Ratkaistaan numeerisesti (esimerkiksi graafista laskinta käyttäen) se ajanhetki, jolloin $y = 0$. Saadaan ($t = 0$ ja) $t \approx 4{,}23$. Sijoitetaan tämä arvo x:n lausekkeeseen $x = 16(1-e^{-1,25t})$, jolloin saadaan heiton kantamaksi 15,9 m.

Pikatesti

1. Funktio $f(x) = \sqrt[4]{x+3}$ on määritelty, kun $x + 3 \geq 0$ eli kun $x \geq -3$. Määrittelyjoukko on $[-3, \infty[$.

2. **a)** $D\dfrac{\sqrt{1-x}}{2} = -\dfrac{1}{4\sqrt{1-x}}$ **b)** $De^{-\frac{x}{2}} = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

c) $Dx(\ln x)^2 = (\ln x)^2 + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$

3. Merkitään perheen menoja kirjaimella *m*. Tällöin $1{,}09^t a = 2a$, josta $1{,}09^t = 2$. Otetaan yhtälöstä puolittain logaritmi, jolloin $t\lg 1{,}09 = \lg 2$. Ratkaisuksi tulee $t = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}09} \approx 8{,}04$. *Vastaus*: noin 8 vuodessa

4. **a)** $\sqrt[7]{x-1} = 2$, josta $x - 1 = 2^7$ ja edelleen $x = 129$.

b) Määrittelyehto yhtälölle $x^{\frac{2}{5}} = 3$ on $x > 0$. Korotetaan potenssiin $\dfrac{5}{2}$, jolloin saadaan $x = 3^{\frac{5}{2}} = 9\sqrt{3}$.

5. **a)** $3 \cdot 2^x = 96$, josta $2^x = 32$ eli $2^x = 2^5$ *Vastaus*: $x = 5$

b) $e^{x-2} = \dfrac{1}{e}$ eli $e^{x-2} = e^{-1}$, jolloin $x - 2 = -1$ ja $x = 1$.

6. **a)** $\log_2 x = 2$, $x > 0$. Logaritmin määritelmän mukaan $x = 2^2 = 4$.

b) Yhtälö $\lg x^3 - \lg x = 2$, $x > 0$, voidaan kirjoittaa muotoon $\lg\dfrac{x^3}{x} = \lg 10^2$ ja edelleen $\lg x^2 = \lg 10^2$. Yhtälön $x^2 = 10^2$ juurista kelpaa vain $x = 10$.

7. Kun $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $g(x) = x^2 - \pi$, on yhdistetty funktio
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^2 - \pi$.
Tällöin $(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt[3]{\pi}) = (\sqrt[3]{\pi})^2 - \pi \approx -0{,}997$. *Vastaus*: $-1{,}00$

8. Funktion $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 8$ kuvaaja on nouseva suora, joten funktio on aidosti kasvava.
Siis funktiolla *f* on käänteisfunktio.
$y = \dfrac{2}{3}x + 8$, josta $x = \dfrac{3}{2}x - 12$. Siis käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x - 12$.
Vastaus: Funktiot $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 8$ ja $g(x) = \dfrac{3}{2}x - 8$ eivät ole toistensa käänteisfunktioita.

9. Funktion $f(x) = e^{-x} + \ln x$ toinen derivaatta (eli derivaatan derivaatta) on

$f''(x) = \mathrm{D}\, f'(x) = \mathrm{D}(-e^{-x} + \frac{1}{x}) = e^{-x} - \frac{1}{x^2}$. *Vastaus*: a -kohta

10. Funktio $f(x) = x - \sqrt{x}$ on jatkuva välillä [0, 9] ja derivoituva välillä]0, 9[. Derivaatta $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ saa arvon nolla, kun $x = \frac{1}{4}$. Luvuista $f(0) = 0$, $f(9) = 6$ ja $f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$ keskimmäinen on suurin ja viimeinen pienin. Suljetulla välillä jatkuva funktio saa pienimmän ja suurimman arvon ohella kaikki niiden väliset arvot, joten funktio *f* saa välillä [0, 9] kaikki arvot $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 6$.

Kertauskoe 1

1. **a)** $\mathrm{D}\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \mathrm{D}\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\mathrm{D}\sqrt{e^x} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

c) $\mathrm{D}\ln(2+\sqrt{x}) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2x + 4\sqrt{x}}$

2. Olkoon sivuamispiste (x_1, y_1). Tangentin kulmakerroin on $3e^{3x_1} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{e^{3x_1}}{x_1}$. Yhtälön ratkaisuna on $x_1 = \frac{1}{3}$, joten tangentin yhtälö on $y = 3ex$.

3. Funktio $f(x) = x + \sqrt{4-x}$ on määritelty arvoilla $x \le 4$. Funktio *f* on jatkuva välillä [– 5, 4] ja derivoituva välillä]–5, 4[. Derivaatta on $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$, ja $f'(x) = 0$, kun $1 - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0$. Tämän juuriyhtälön ratkaisu on $x = 3\frac{3}{4}$.

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa on $f(3\frac{3}{4}) = 4\frac{1}{4}$ ja välin päätepisteissä $f(-5) = -2$ sekä $f(4) = 4$.

Vastaus: Funktion $f(x) = x + \sqrt{4-x}$ suurin arvo on $f(3\frac{3}{4}) = 4\frac{1}{4}$ ja pienin $f(-5) = -2$, kun $x \ge -5$.

4. On näytettävä, että $\ln(x+1) - x \le 0$, kun $x > -1$. Funktio $f(x) = \ln(x+1) - x$ on määritelty ja jatkuva arvoilla $x > -1$. Sen derivaatalla $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ on kohdassa $x = 0$ ainoa ääriarvokohta. Siinä funktio saa suurimman arvonsa 0. Näin ollen $f(x) \le 0$ kaikilla arvoilla $x > -1$.

5. Kun $f(x) = x2^x$, on $f'(x) = 2^x + x2^x \ln 2$. Yhtälö $f(x) = f'(x)$ eli $x2^x = 2^x + x2^x \ln 2$ saatetaan muotoon $2^x(x - 1 - x\ln 2) = 0$, josta $2^x = 0$ on identtisesti epätosi, ja yhtälön $x - 1 - x\ln 2 = 0$ juuri on $x = \dfrac{1}{1 - \ln 2}$.

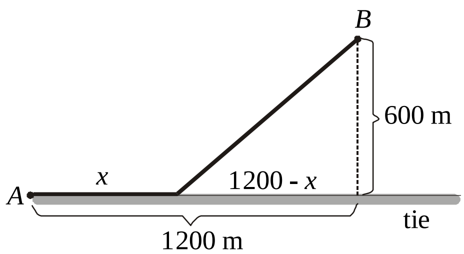
6. **a)** Sijoitetaan yhtälöön $L = 10\lg(I \cdot 10^{12})$ intensiteetin I lukuarvo $5{,}0 \cdot 10^{-8}$, jolloin $L = 10\lg(5{,}0 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{12}) \approx 47$. Äänen voimakkuus on 47 dB.

b) Yhden toimistokoneen aiheuttaman äänen intensiteetti voidaan päätellä yhtälöstä $40 = 10\lg(I \cdot 10^{12})$. Huomataan, että $I = 10^{-8}\ (\mathrm{W/m^2})$, sillä $10\lg(10^{-8} \cdot 10^{12}) = 10\lg 10^4 = 10 \cdot 4 = 40$. Kahden koneen aiheuttaman äänen kokonaisintensiteetti olisi $2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$. Tällöin äänitaso olisi $L = 10\lg(2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{12})\ \mathrm{dB} \approx 43\,\mathrm{dB}$, joten toinen kone voidaan hankkia.

7. Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x}$ derivaatta $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{4x^2}$ on positiivinen välillä $0 < x < e$, joten f on aidosti kasvava ja f^{-1} on olemassa välillä $0 < x \le e$. Käänteisfunktion derivaatta on laskettava kohdassa $y = 0$. Sitä vastaava x:n arvo on 1, joten

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{0{,}5} = 2.$$

8. Suunnistaja juoksee tietä pitkin matkan x (km) ja sitten suoraan rastille B. Tähän kuluva aika (h) on



$$t(x) = \frac{x}{15} + \frac{\sqrt{(1{,}2 - x)^2 + 0{,}6^2}}{12}$$
$$= \frac{1}{15}x + \frac{1}{12}\sqrt{x^2 - 2{,}4x + 1{,}8}, \quad 0 \le x \le 1{,}2.$$

Merkitään derivaatta $t'(x) = \dfrac{1}{15} + \dfrac{x - 1{,}2}{12\sqrt{x^2 - 2{,}4x + 1{,}8}}$ nollaksi ja ratkaistaan saatu yhtälö sievennetystä muodosta $9x^2 - 21{,}6x + 7{,}2 = 0$, jolloin saadaan $x = 0{,}4$. Luvuista $t(0)$, $t(1{,}2)$ ja $t(0{,}4)$ viimeksi mainittu on pienin. Nopein reitti kulkee siis tietä pitkin 400 m ja sitten suoraan B:hen.

Kertauskoe 2

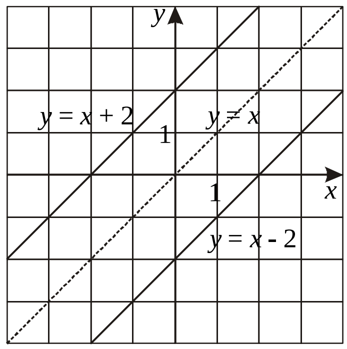
1. **a)** $\mathrm{D}x\sqrt{x} = \mathrm{D}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **b)** $\mathrm{D}\,e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$ **c)** $\mathrm{D}\sqrt[3]{3+3x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3+3x)^2}}$

2. **a)** $e^{2x-1} = 1$, kun $2x - 1 = 0$. Tällöin $x = \frac{1}{2}$.

b) $\sqrt[3]{x^2 - 11} = -2$. Tällöin $x^2 - 11 = (-2)^3$, josta $x^2 = 3$ ja edelleen $x = \pm\sqrt{3}$

c) Yhtälön $\lg x + \lg(2x+1) = 0$ määrittelyehdot ovat $x > 0$ ja $2x + 1 > 0$ eli yhdistettynä $x > 0$. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $\lg x(2x+1) = \lg 1$, josta $x(2x+1) = 1$ ja edelleen $2x^2 + x - 1 = 0$. Tämän juuret ovat $x = -1$ tai $x = \frac{1}{2}$. Näistä vain $x = \frac{1}{2}$ kelpaa ratkaisuksi.

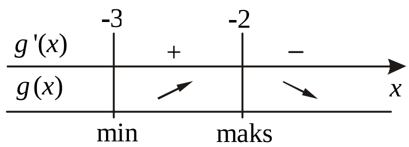
3. **a)** Koska $f'(x) = 2 > 0$, on funktio $f(x) = x + 2$ on aidosti kasvava. Siis sillä on käänteisfunktio. Yhtälöstä $y = x + 2$ ratkeaa $x = y - 2$. Käänteisfunktio on siis $f^{-1}(x) = x - 2$.



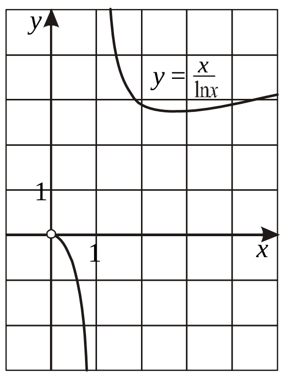
b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x+2)^2) = (x+2)^2 + 2$
$= x^2 + 4x + 6$. Funktion esitysmuodosta $(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 2$ näkee, että pienin arvo on $(f \circ g)(-2) = (-2+2)^2 + 2 = 2$.

4. Funktio $g(x) = -2x\sqrt{x+3}$ on jatkuva, kun $x \geq -3$, ja derivoituva, kun $x > -3$.
$g'(x) = -2\sqrt{x+3} - 2x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = -2\sqrt{x+3} - \dfrac{x}{\sqrt{x+3}}$. Derivaatta on nolla, kun $-2\sqrt{x+3} - \dfrac{x}{\sqrt{x+3}} = 0$. Tämän juuriyhtälön ratkaisu on $x = -2$.

Derivaatan merkkikaavion perusteella funktion minimi on $g(-3) = 0$ ja maksimi $g(-2) = 4$.



5. Funktio $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ on arvoilla $x > 0$, $x \neq 1$, määritelty ja jatkuva. Sen derivaatan $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ nollakohta on e. Siinä funktiolla on minimi $f(e) = e$. Derivaatan merkkitutkimus osoittaa, että funktio on aidosti vähenevä väleillä $]0,1[$ ja $]1,e]$ sekä aidosti kasvava välillä $[e,\infty[$.



6. **a)** Vuoden 1900 väkiluku 2,7 miljoonaa saadaan yhtälöstä $f(t) = k \cdot e^{0,008t}$ arvolla $t = 0$. Tällöin $f(0) = k = 2{,}7$ miljoonaa. Väkiluku vuonna 2007 on $f(107) = 2{,}7 \cdot 10^6 \cdot e^{0,008 \cdot 107} \approx 6{,}4 \cdot 10^6$. *Vastaus*: 6,4 miljoonaa

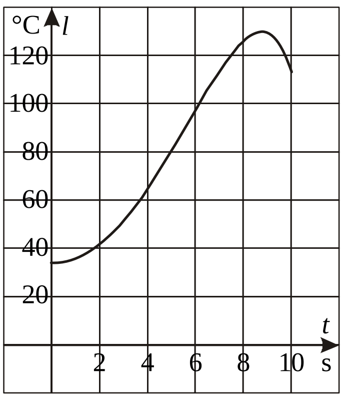
b) Ratkaistaan yhtälö $2{,}7 \cdot 10^6 \cdot e^{0,008 \cdot t} \approx 4{,}0 \cdot 10^6$ kirjoittamalla se ensin muotoon $e^{0,008t} = \frac{4{,}0}{2{,}7}$. Tästä $0{,}008t = \ln \frac{4{,}0}{2{,}7}$ ja $t \approx 49{,}1$. Neljän miljoonan raja ylitettiin vuonna 1949.

c) Kasvunopeus on $f'(t) = 0{,}008 \cdot 2{,}7 \cdot 10^6 \cdot e^{0,008 \cdot t} = 2{,}16 \cdot 10^4 \cdot e^{0,008 \cdot t}$ ja vuonna 2000 kasvunopeus on $f'(100) = 2{,}16 \cdot 10^4 \cdot e^{0,008 \cdot 100} \approx 48\,000$ asukasta/vuosi.

7. Käyrien $y = \frac{2}{x}$ ja $y = \sqrt{x^2+3}$ yhteisten pisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälön $\frac{2}{x} = \sqrt{x^2+3}$ ratkaisuina. Korotetaan yhtälö neliöön ja saatetaan sitten muotoon $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$. Saatu bikvadraattinen yhtälö ratkaistaan merkitsemällä $z = x^2$, jolloin $z^2 + 3z - 4 = 0$. Tämän yhtälön juuret ovat $z = 1$ ja $z = -4$, mikä merkitsee, että $x^2 = 1$ tai $x^2 = -4$. Ratkaisuista vain $x = 1$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön.
Kun lasketaan derivaattojen $-\frac{2}{x^2}$ ja $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ arvot kohdassa $x = 1$, saadaan käyrien yhteiseen pisteeseen asetettujen tangenttien kulmakertoimet -2 ja $\frac{1}{2}$. Koska näiden tulo on -1, tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten käyrät leikkaavat toisensa suorassa kulmassa.

8. **a)** Alla vasemmalla on funktion $l(t) = -e^{0,5t} + 2{,}2t^2 + 0{,}7t + 34{,}7$ kuvaaja. Sen huippu (8,7 s, 130 °C) voidaan jäljittää graafisesti.

b) Alla oikealla on derivaatan $l'(t) = -0{,}5e^{0,5t} + 4{,}4t + 0{,}7$ kuvaaja. Siitä voidaan jäljittää kohta t = 5,7 (s), jossa lämpötilan kasvunopeus on suurin. (Käyrän ja x-akselin leikkauskohdasta voi varmistaa myös funktion maksimikohdan 8,7 (s).)



Huomautus: Funktion maksimikohta ja -arvo saadaan monilla graafisilla laskimilla suoraan niiden ääriarvotoiminnolla.