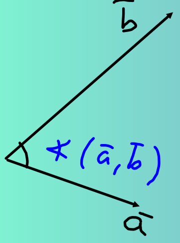
# SKALAARITULO ELI PISTETULO / s.4

## Määritelmä

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})}$$



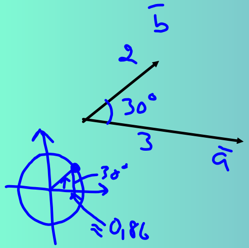

Pull

Nollasta eroavien vektorien skalaari- eli pistetulo on vektorien pituuksien ja vektorien välisen kulman kosinin tulo.

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}$ jos ja vain jos $\bar{a}=\bar{0}$ tai $\bar{b}=\bar{0}$

$(\bar{i},\bar{j})$ kanta

esim 1 Laske $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n pistetulo, kun $\bar{a}$:n pituus on 3 ja $\bar{b}$:n pituus on 2 ja näiden välinen kulma on 30°.




$\bar{a}\cdot\bar{b}$

$= 3\cdot 2\cdot\cos 30°$

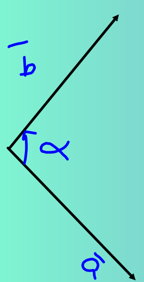
$= \cancel{2}^{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}}\ (\approx 5,2)$

## vektorin pituus

$$|\bar{a}|^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}^2$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$$

## vektorien välinen kulma




$\cos(\bar{a},\bar{b})$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|},\ \bar{a},\bar{b}\neq\bar{0}}$$

esim 2 Määritä vektoreiden $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}$ ja $\bar{d}=2\bar{i}+3\bar{j}$ välinen kulma.

$|\bar{c}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|\bar{d}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\bar{c}\cdot\bar{d} = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = 9$

laskin degreenä

$\cos(\bar{c},\bar{d}) = \frac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$

$\cos(\bar{c},\bar{d}) = \frac{9}{\sqrt{130}} \iff \sphericalangle(\bar{c},\bar{d}) = 37,87° = \underline{38°}$

V: Vektoreiden välinen kulma on 38°

## Skalaaritulo kannassa $(\bar{i}, \bar{j})$

(eli pistetulo)

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y}$$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$$
$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j}$$

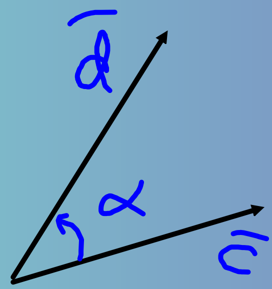
Pull

Iin kertoimet kerrotaan keskenään
ja jiin kertoimet kerrotaan keskenään
ja sitten nämä tulot lasketaan yhteen.

esim2

$$|\bar{c}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

$$|\bar{d}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$




$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j}$$

$$\bar{d} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$$

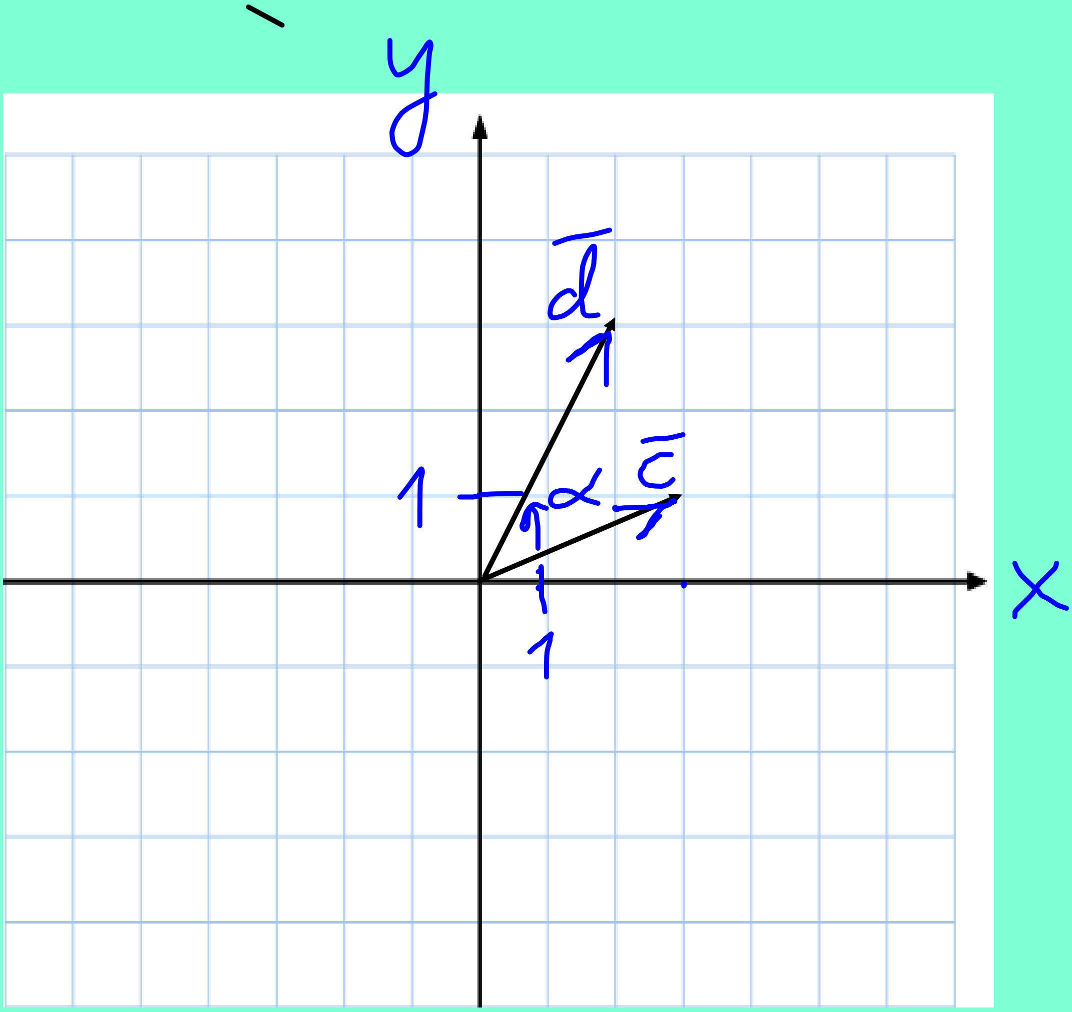
$$\bar{c} \bullet \bar{d} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = \underline{\underline{9}}$$

$$\alpha = 37{,}9^\circ \approx 38^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{|\bar{c}||\bar{d}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{10}\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\alpha = 37{,}9^\circ \approx 38^\circ$$




$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\alpha \approx 37{,}9^\circ \approx 38^\circ$$

# Skalaaritulo kannassa $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$
$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$$

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

**LASKULAIT**

1. vaihdantalaki $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
2. osittelulaki $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$
3. skalaaritekijän siirtosääntö
$$(r\bar{a})\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot(r\bar{b}) = r(\bar{a}\cdot\bar{b})$$
$r$ = vakio

**MUISTIKAAVAT**

$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2$$
$$(\bar{a}+\bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2$$
$$(\bar{a}-\bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2$$

esim Olkoon $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ ja $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = 45°$.
$|\bar{a}+\bar{b}| = ?$

Ratk.

$$(\bar{a}+\bar{b})^2 = (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})$$
$$= \bar{a}^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2$$
$$= |\bar{a}|^2 + 2\cdot 3\sqrt{2} + |\bar{b}|^2$$
$$= 2^2 + 6\sqrt{2} + 3^2$$
$$= 13 + 6\sqrt{2}$$

$\bar{a}\cdot\bar{a} = \bar{a}^2$
$= |\bar{a}|^2$

$\bar{a}\cdot\bar{b}$
$= |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$
$= 2\cdot 3\cos 45°$
$= 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$= \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{13+6\sqrt{2}} \quad (\approx 4{,}6)$$

## SOVELLUKSIA

### Kohtisuoruusehto

$$\boxed{\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \qquad (\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0})}$$

Esim Tutki, ovatko vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan.

a)
$$\bar{a} = 3\bar{i} - 8\bar{j}$$
$$\bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 4 + (-8) \cdot 2 = 12 - 16 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ eivät ole $\perp$

b)
$$\bar{a} = -\bar{i} + 7\bar{j}$$
$$\bar{b} = 14\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 14 + 7 \cdot 2 = -14 + 14 = 0$$

$\Rightarrow$ vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

Esim Millä vakion $t$ arvolla vektori $\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j} + t\bar{k}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{b} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ vastaan? Kuinka pitkä vektori $\bar{a}$ on tällöin?

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$

$$(-3)\cdot(-2) + (-4)\cdot 3 + t(-1) = 0$$

$$-6 - t = 0$$

$$t = -6$$

$$\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}$$

$$\underline{\underline{|\bar{a}|}} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{61}}}$$

$\sqrt{\ }$ :

esim 3 Osoita, että kolmion sivuina olevien samasta pisteestä alkavien vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on tylppä, kun

$$\bar{a} - 2\bar{b} = 13\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k} \text{ ja}$$

$$3\bar{a} + \bar{b} = 4\bar{i} + 9\bar{j} - 10\bar{k}.$$

Mikä on kolmion pisimmän sivun pituus?