SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

termit

Jos sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ osasummien jono (S_n) suppenee kohti äärellistä raja-arvon S, sanotaan, että sarja suppenee ja sen summa on S.

Jos sarja ei suppene, sen sanotaan hajaantuvan.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_n =$$

Huom! Jos vaikka löytyisi äärellinen raja-arvo yleiselle termille, ei se välttämättä suppene.

=) Lue sivulle 17 asti:

KT: 19, 21, 22, 23, *24

Kerratkaa aritm. & geom. summa

GEOMETRINEN SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$$

Johto:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \\
-\,q\,S_n &= \phantom{a_1 +{}} a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n
\end{aligned}
$$

$$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \quad \Big| : (1-q) \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} 1-q \neq 0 \\ q \neq 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1}$$

Geometrisen sarjan n:n ensimmäisen termin osasumma on

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\[2ex] S_n = n a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Geometrisen sarjan suppenemislause:

Geom. sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ suppenee

vain, jos $-1 < q < 1$ eli $|q| < 1$!!
ja $q \neq 0$

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}} \Longleftarrow$$

esim Laske sarjan summa
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$

I tapa $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{(n+1)-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{1} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = 2^{n-1-n}$
$= 2^{-1} = \frac{1}{2} = q$ = vakio

II tapa $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$
$\frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-(n-1)}$

$\Rightarrow$ geom. sarja, jonka suhdeluku on $\frac{1}{2}$.

Koska $|q| < 1$, niin sarja suppenee ja sen summa on
$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

V: Sarjan summa on 2.

<u>esim 2</u> Esitä murtolukumuodossa luku 3,217217217...

<u>Ratk.</u>

I tapa ks. MAA 1

II tapa

$$3,217217\ldots = 3 + \underbrace{0,217 + 0,000217 + \ldots}$$

$$q = \frac{1}{1000}$$

$$S \qquad = \frac{3214}{999}$$

<u>esim 3</u> Millä x:n arvoilla päättymätön geom. sarja

$$1 + \frac{2x}{x+1} + \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 + \dots$$

$\frac{\text{mj.}}{x \neq -1}$

suppenee?

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \qquad\qquad =$$

$\Rightarrow$ ei riipu n:stä

$|q| < 1$ jotta suppenee

Jos suppenee, niin

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\left| \frac{2x}{x+1} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{2x}{x+1} < 1$$

$$-1 < \frac{2x}{x+1} \quad \text{jw} \quad \frac{2x}{x+1} < 1$$

$$\frac{2x}{x+1} + \overset{x+1}{\cancel{1}} > 0 \quad \text{jw} \quad \frac{2x}{x+1} - \cancel{1} < 0$$

mj: $x \neq -1$

2x

x+1

usam.

<u>esim</u>

Millä x:n arvoilla sarja

$$1+(1-x)+(1-x)^2+\ldots+(1-x)^{n-1}+\ldots$$

suppenee? Laske sarjan summa.

<u>Ratk.</u>

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1-x)^{(n+1)-1}}{(1-x)^{n-1}}=\frac{(1-x)^n}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=(1-x)^{n-(n-1)}=(1-x)^{\cancel{n}-\cancel{n}+1}=1-x$$

$\Rightarrow$ ei riipu n:stä $\Rightarrow$ geom. sarjan suppeneminen

$$|q|<1$$

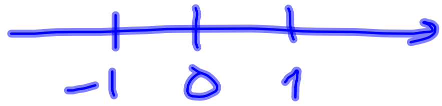
$$|1-x|<1$$

$$-1<1-x<1 \quad \Big|-1$$

$$-2<-x<0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$2>x>0$$

$$0<x<2$$



Sarjan summa

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-(1-x)}==\frac{1}{x},$$

kun $0<x<2$

V: Sarjan summa on $\frac{1}{x}$,

kun $0<x<2$