

SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

↑
termit

Jos sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ osasummien jono (S_n) suppenee kohti äärellistä raja-arvoon S , sanotaan, että sarja suppenee ja sen summa on S .

Jos sarja ei suppene, sen sanotaan hajaantuvan.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n =$$

Huom! Jos vaikkei löytyisi äärellinen raja-arvo yleiselle termille, ei se välttämättä suppene.

=> due sivulle 17 asti:

KT: 19, 21, 22, 23, *24

Kerratkaa aritm. & geom. summa

GEOMETRINEN SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$$

Jokto:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \\ - q S_n &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

$$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \quad | : (1-q) \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} 1-q \neq 0 \\ q \neq 1 \end{array} \right)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

Geometrisen sarjan n :n ensimmäisen termin summa on

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1 \\ S_n = na_1, \quad q = 1 \end{array} \right.$$

Geometrisen sarjan suppenemislause:

Geom. sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ suppenee

vain, jos $-1 < q < 1$ eli $|q| < 1$ ja $q \neq 0$!!!

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \leftarrow$$

esim Koska sarjan summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

I $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{(n+1)-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{1} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = 2^{n-1-n}$
 $= 2^{-1} = \frac{1}{2} = q = \text{vakio}$

II $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$
 $\frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-(n-1)}$ \Rightarrow geom. sarja, jonka suhdeluku on $\frac{1}{2}$.

Koska $|q| < 1$, niin sarjan suppenee ja sen summa on

$$\underline{S} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

V: Sarjan summa on 2.

oim2 Eritä murtolukumuodossa
luku $3,217217217\dots$

Ratk. I tyyppi kts. MAA 1

II tyyppi

$$3,217217\dots = 3 + 0,217 + 0,000217 + \dots$$

$$q = \frac{1}{1000}$$

$$S = \frac{3217}{999}$$

esim 3 Millä x :n arvoilla päättymätön
geom. sarja

$$1 + \frac{2x}{x+1} + \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 + \dots$$

Suppenee?

esim

Killä $x:n$ arvoilla saijn

$$1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^{n-1} + \dots$$

suppenee? laske saijan summa.

Ratk.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-x)^{(n+1)-1}}{(1-x)^{n-1}} = \frac{(1-x)^n}{(1-x)^{n-1}}$$
$$= (1-x)^{n-(n-1)} = (1-x)^{1-1} = 1-x$$

\Rightarrow ei riipu n :stä \Rightarrow geom. saijan
suppeneminen

$$|q| < 1$$

$$|1-x| < 1$$

$$-1 < 1-x < 1 \quad | -1$$

$$-2 < -x < 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2 > x > 0$$

$$0 < x < 2$$



Saijan summa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x},$$

kun $0 < x < 2$

✓: Saijan summa on $\frac{1}{x}$,

kun $0 < x < 2$