LUKUJONON SUPPENEMINEN

s. 7 – 11

Jos $\lim_{n\to\infty} a_n$ on äärellisenä olemassa, niin sanotaan, että jono (a_n) on SUPPENEVA.

Muussa tapauksessa jono on HAJAANTUVA.

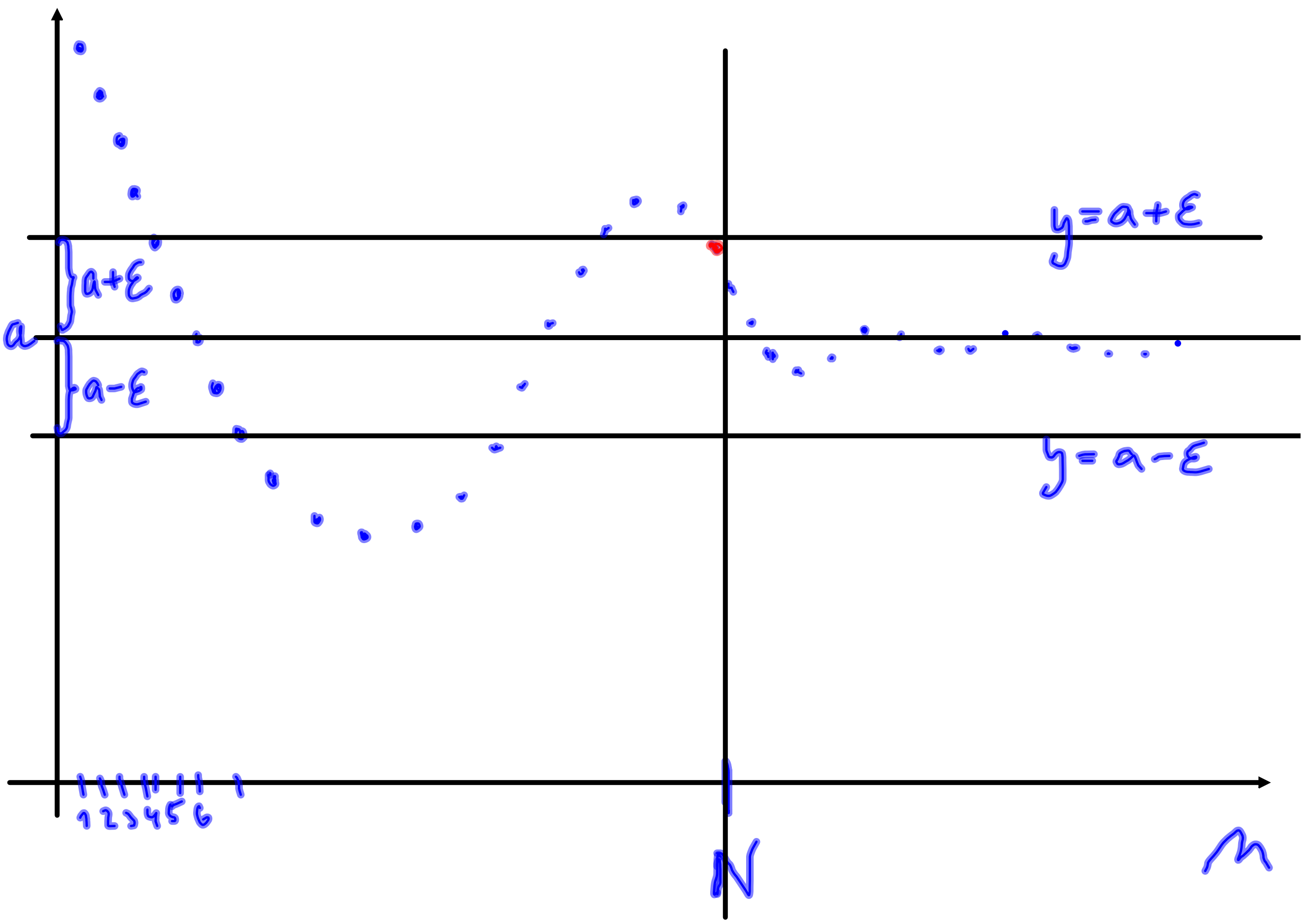
<u>esim</u> Määritä $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-4}$

~~Mj: $3n-4 \neq 0$, $3n \neq 4$, $n \neq \frac{4}{3}$~~

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})}{\cancel{n}(3-\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0})} = \frac{2}{3}.$$

Se, että suppenevalla lukujonolla (a_n) on raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, merkitsee, että jonon jäsenet saadaan miten lähelle tahansa lukua a riittävän suurilla n:n arvoilla.

Ts. jos $\overset{\text{epsilon}}{\varepsilon}$ on jokin mielivaltaisen pieni positiivinen luku, lukujonon jäsenet poikkeavat raja-arvosta vähemmän kuin ε:n verran, kun n on riittävän suuri.



y=a+ε
a+ε
a
a-ε
y=a-ε
1 2 3 4 5 6
N
n

Lukujonon jäsenet sijoittuvat
suorien $y = a + \varepsilon$ ja
$y = a - \varepsilon$ väliin jostakin
n:n arvosta N
alkaen.
Kuvan mukaan jokainen
luvuista a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, ...
poikkeaa raja-arvosta
a vähemmän kuin ε:n
verran eli

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

kun $n \geq N$

esim Määritä jonon $a_n = \frac{3n-7}{2n-3}$ raja-arvo.
Mistä n:n arvosta lähtien jonon jäsenten etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 0,01?

Ratk. $a = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(3-\frac{7}{n})}{\cancel{n}(2-\frac{3}{n})} = \frac{3}{2}$

$\frac{7}{n} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon}$$

$$\left| \frac{3n-7}{2n-3} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{2(3n-7) - 3(2n-3)}{2(2n-3)} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \quad \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-5}{4n-6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{|-5|}{|4n-6|} < \frac{1}{100}$$

$4n-6>0$
$4n>6 \ |:4$
$n>\frac{6}{4}=$

$$\frac{5}{4n-6} < \frac{1}{100}$$

4n−6 on posit, kun $n \geq 2$, tällöin $|4n-6| = 4n-6$

I tapa

$|\cdot 100$

$|\cdot 4n-6$

II tapa

$\frac{4n-6}{5} > 100 \ |\cdot 5$

$n > \frac{506}{4}$

$n > 126{,}5$

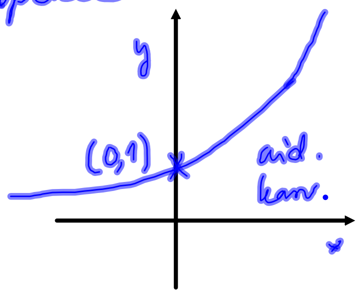
GEOMETRISEN JONON SUPPENEMINEN

esim 1 $q=1$: $y = 1^x$ $\quad \lim_{x \to \infty} 1^x = 1 \Rightarrow$ suppenee

$q=0$: $y = 0^x$ $\quad \lim_{x \to \infty} 0^x = 0 \Rightarrow$ suppenee

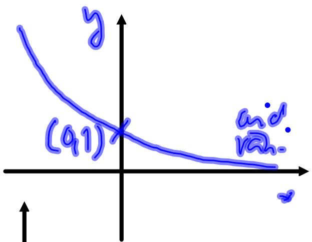
$q > 1$

esim $y = 2^x$ $\quad \lim_{x \to \infty} 2^x = \infty$ $\Rightarrow$ ei suppene



$0 < q < 1$

esim $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

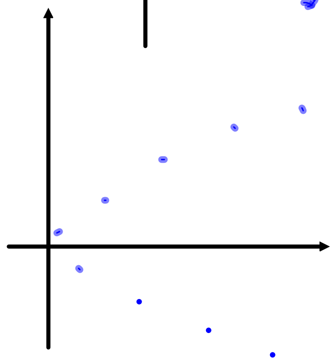


$q < -1$

esim $y = (-2)^x$

$\lim_{x \to \infty} (-2)^x =$ ei ole

ei suppene, vaan hajaantuu

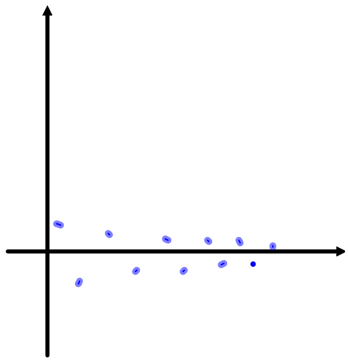


$-1 < q < 0$

esim $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$

$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^x = 0$

suppenee



esim $y = (-1)^x =$

$-1, 1, -1, 1$

$\lim_{x \to \infty} (-1)^x =$ ei ole $\Rightarrow$ ei suppene, hajaantuu

suppenee

$$\boxed{-1 < q \leq 1}$$

KT: 1–5, 8–10, 12–15