

Jos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ on äärellisenä olemassa, niin sanotaan, että jono (a_n) on SUPPENEVA.

Muussa tapauksessa jono on HAJAANTUVA.

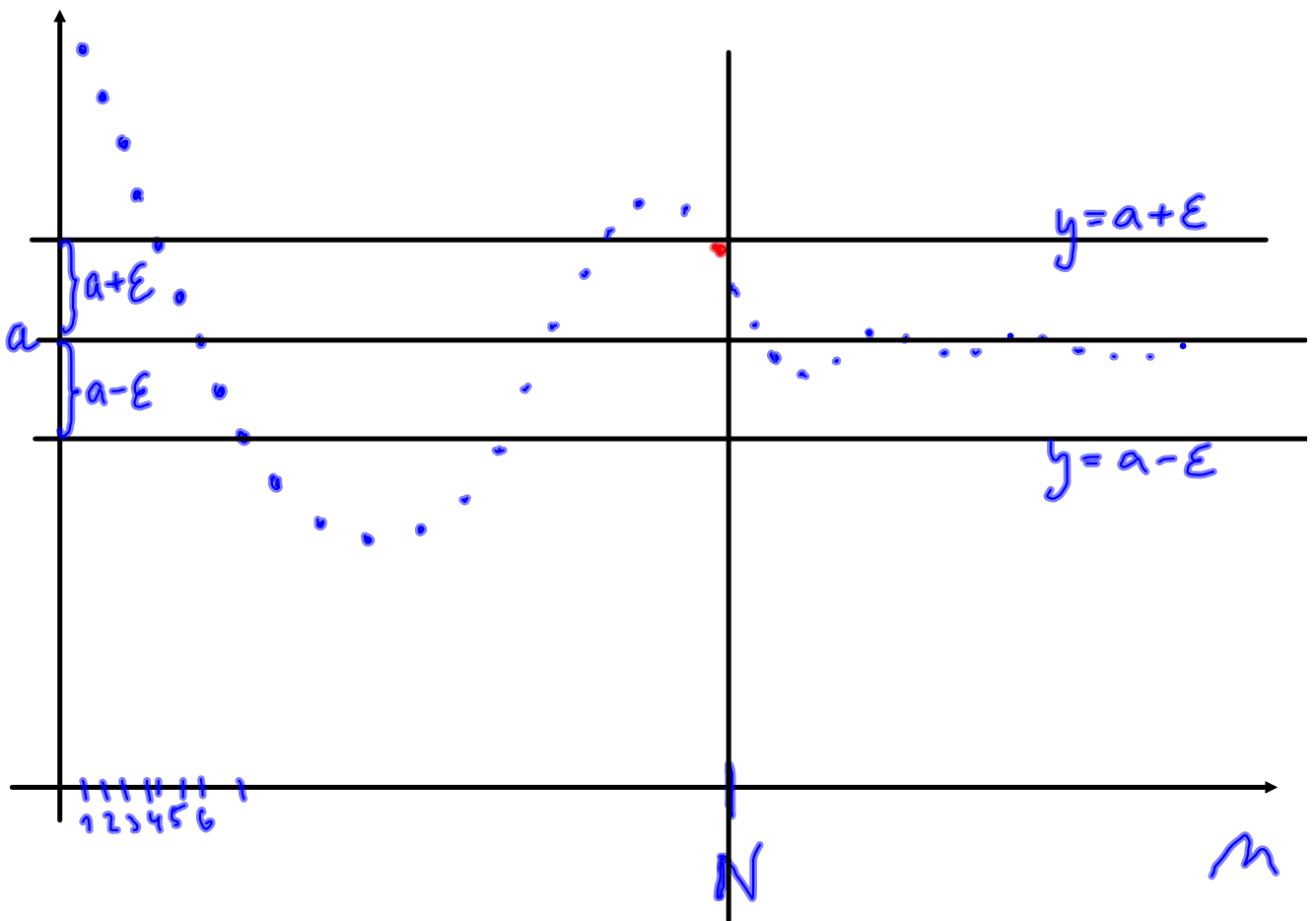
esim Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-4}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{4}{n}} = \frac{2}{3}.$$

~~My: $3n-4 \neq 0$
 $3n \neq 4$
 $n \neq \frac{4}{3}$~~

Se, että suppenevalla lukujonolla (a_n) on raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, merkitsee, että jonon jäsenet saadaan miten lähelle tahansa lukua a riittävän suurilla n :n arvoilla.

Ts. jos ϵ on jokin mielivaltaisen pieni positiivinen luku, lukujonon jäsenet poikkeavat raja-arvosta vähemmän kuin ϵ :n verran, kun n on riittävän suuri.



lukujonon jäsenet sijoittuvat
suorien $y = a + \epsilon$ ja
 $y = a - \epsilon$ väliin jostakin
 n :n arvosta N
alkaan.

Kuvan mukaan jokainen
luvusta $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$
poikkeaa raja-arvosta
 a vähemmän kuin ϵ :n
verran eli

$$|a_n - a| < \epsilon,$$

$$\text{kun } n \geq N$$

esim Määritä jonon $a_n = \frac{3n-7}{2n-3}$ raja-arvo.

Mistä n :n arvosta lähtien jonon jäsenien etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 0,01?

Ratk. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3 - \frac{7}{n})}{n(2 - \frac{3}{n})} = \frac{3}{2}$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

$$\left| \frac{3n-7}{2n-3} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{2(3n-7) - 3(2n-3)}{2(2n-3)} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-5}{4n-6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-5}{4n-6} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{|-5|}{|4n-6|} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{5}{4n-6} < \frac{1}{100}$$

1^o step

$$\begin{array}{l} | \cdot 100 \\ | \cdot 4n-6 \end{array}$$

2^o step

$$\frac{4n-6}{5} > 100 \quad | \cdot 5$$

$4n-6$ on positiivinen, kun $n \geq 2$, tällöin $|4n-6| = 4n-6$

$$n > \frac{506}{4}$$

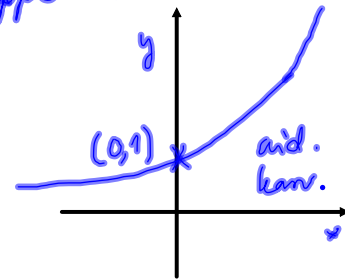
$$n > 126,5$$

V: Luvusta 127 lähtien ...

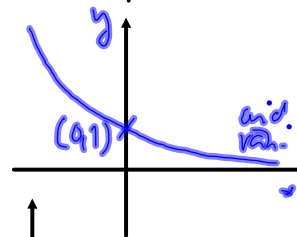
GEOMETRISEN JONON SUPPENEMINEN

esim 1 $q=1$ $y=1^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 \Rightarrow$ suppenee
 $q=0$ $y=0^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} 0^x = 0 \Rightarrow$ suppenee

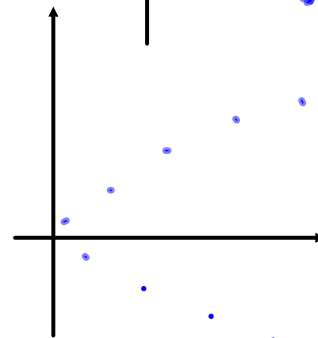
esim $q > 1$
 $y=2^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \Rightarrow$ ei suppenee



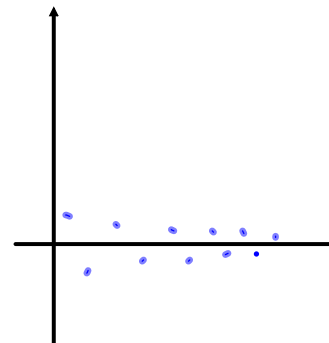
$0 < q < 1$
esim $y = (\frac{1}{2})^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^x = 0$



$q < -1$
esim $y = (-2)^x$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x =$ ei ok
 ei suppenee, vaan
 hajaantuu



$-1 < q < 0$
esim $(-\frac{1}{2})^x$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2})^x = 0$
 suppenee



esim $y = (-1)^x =$
 $-1, 1, -1, 1$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^x =$ ei ok \Rightarrow ei suppenee,
 hajaantuu

suppenee

$-1 < q \leq 1$

KT: 1-5, 8-10, 12-15