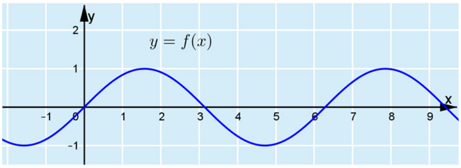
Kertaus

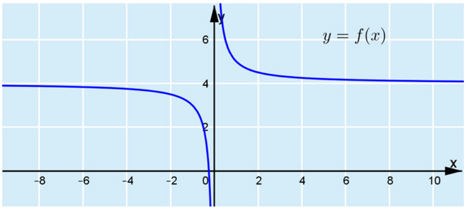
K1. A: III, B: I, C: II ja IV

Kuvaajat:

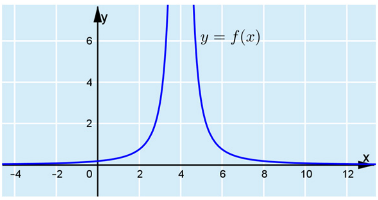
I



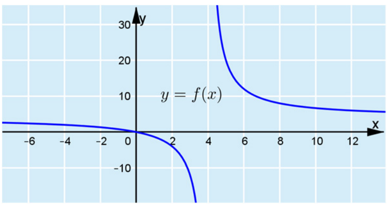
II



III

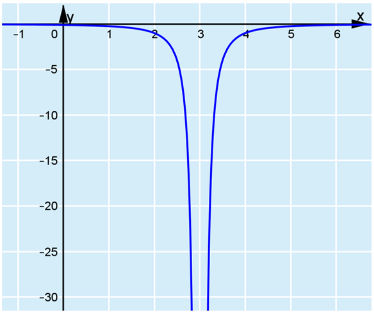


IV

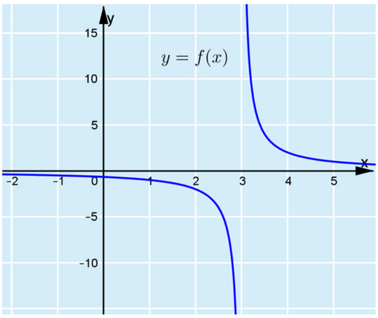


K2. **a)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{(3-x)^2}$

Nimittäjä $(3-x)^2$ on aina positiivinen ja lähestyy lukua 0, kun $x \to 3$.
Tällöin $\dfrac{-1}{(3-x)^2}$ on aina negatiivinen ja sen arvo pienenee rajatta.

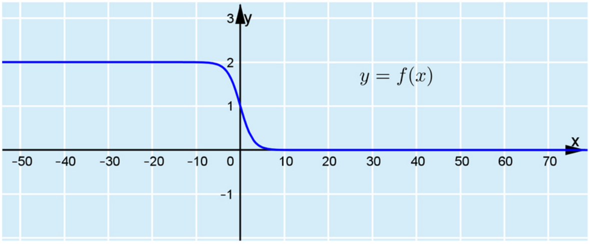


b) Kun $x \to 3$ oikealta, $x - 3$ on positiivinen ja lähestyy arvoa 0. Tällöin $\dfrac{2}{x-3} \to \infty$. Kun $x \to 3$ vasemmalta, $x - 3$ on negatiivinen ja lähestyy arvoa 0. Tällöin $\dfrac{2}{x-3} \to -\infty$. Funktiolla ei siis ole epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 3$.



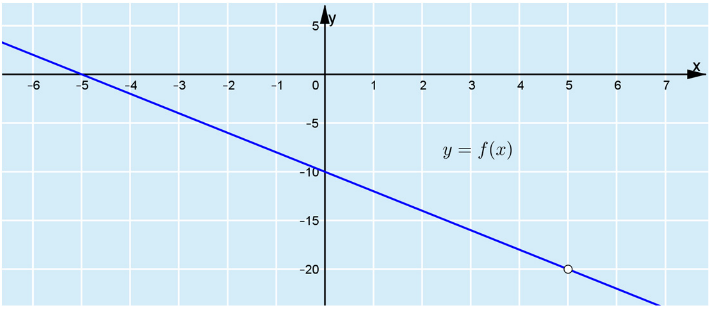
c) Kun muuttujan x arvo kasvaa rajatta, myös 2^x arvo kasvaa rajatta ja funktion $\dfrac{2}{1+2^x}$ arvo lähestyy lukua 0.

Kun muuttujan x arvo pienenee rajatta, 2^x arvo lähestyy nollaa ja funktion $\dfrac{2}{1+2^x}$ arvo lähestyy lukua 2.



K3. **a)**

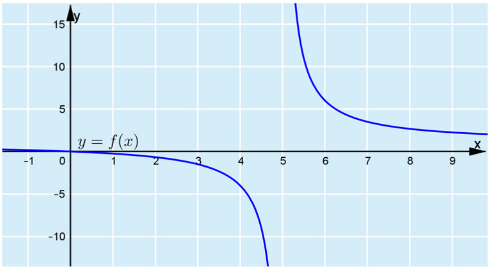
$$\frac{50-2x^2}{x-5}=\frac{2(25-x^2)}{x-5}=\frac{2(\cancel{5-x})(5+x)}{-(\cancel{5-x})}=-2(5+x)\xrightarrow[x\to]{}-2(5+5)=-20$$



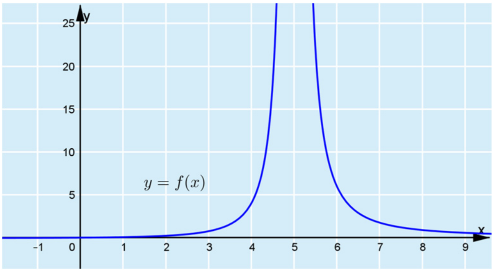
b) Kun $x \to 5+$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $x - 5$ lukua 0 positiivisia arvoja saaden. Niinpä $\dfrac{x}{x-5}\xrightarrow[x\to 5+]{}\infty$.

Kun $x \to 5-$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $x - 5$ lukua 0 negatiivisia arvoja saaden. Niinpä $\dfrac{x}{x-5}\xrightarrow[x\to 5-]{}-\infty$.

Funktiolla ei ole raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 5$.



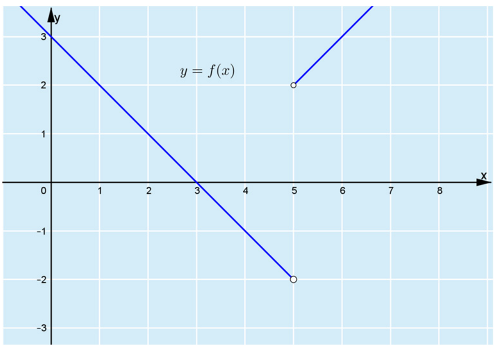
c) Kun $x \to 5$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $(x-5)^2$ lukua 0 positiivisia arvoja saaden. Niinpä $\dfrac{x}{(x-5)^2} \xrightarrow[x\to 5]{} \infty$.



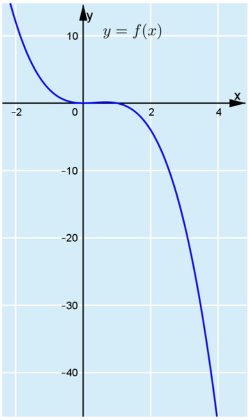
d)

$$\lim_{x\to 5-} f(x) = \lim_{x\to 5-} (3-x) = 3-5 = -2$$
$$\lim_{x\to 5+} f(x) = \lim_{x\to 5+} (x-3) = 5-3 = 2$$

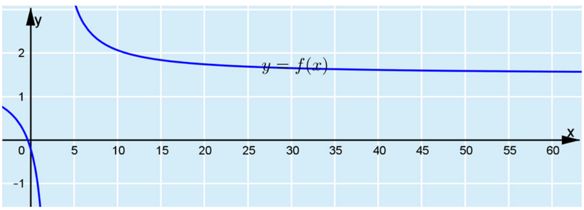
Funktiolla ei ole raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 5$.



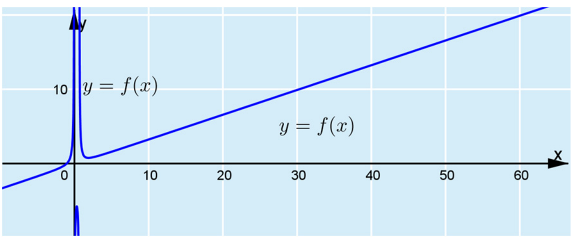
K4. **a)** $-x^3+x^2=x^3(-1+\frac{1}{x})\xrightarrow[x\to\infty]{}-\infty$



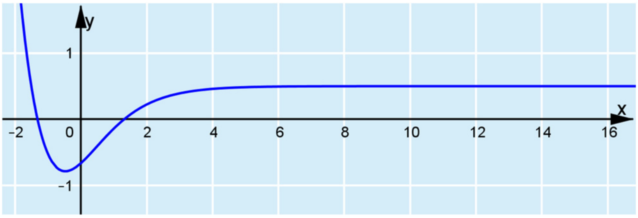
b) $\frac{3x+1}{2x-5}=\frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(2-\frac{5}{x})}=\frac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$



c) $\frac{x^3-x^2+2}{3x^2-2x}=\frac{x^2(x-1+\frac{2}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x})}=\frac{x-1+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$

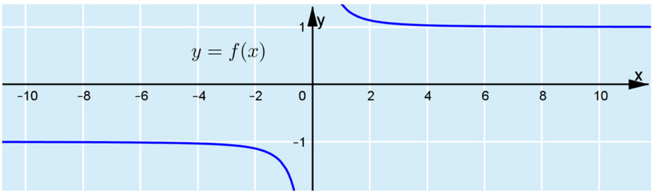


d) $$\frac{e^x+e^{-x}-4}{2e^x+1}=\frac{e^x(1+e^{-2x}-\frac{4}{e^x})}{e^x(2+\frac{1}{e^x})}=\frac{1+e^{-2x}-\frac{4}{e^x}}{2+\frac{1}{e^x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1+0-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$



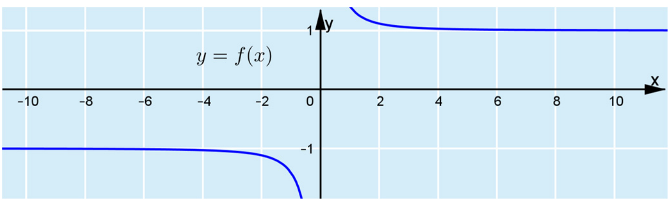
K5. a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1$$



b)

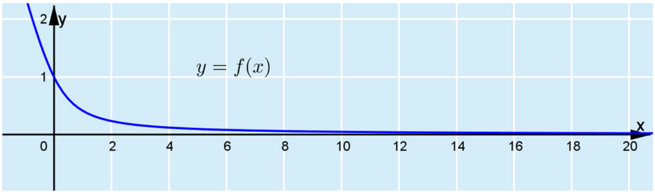
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+0}=-1$$



c)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$



K6. **a)** $\dfrac{3-2n}{5n-4}=\dfrac{n(\frac{3}{n}-2)}{n(5-\frac{4}{n})}=\dfrac{\frac{3}{n}-2}{5-\frac{4}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{0-2}{5-0}=-\dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{n}{n^2+2}=\dfrac{n^2(\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})}=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{0}{1+0}=0$

c) $\dfrac{n^2+n+1}{2n}=\dfrac{n^2}{2n}+\dfrac{n}{2n}+\dfrac{1}{2n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

K7. Määritetään lukujonon raja-arvo.

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{n}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$a_{30}=\frac{30+1}{2\cdot 30}=\frac{31}{60}$$

$$\left|a_{30}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{31}{60}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{31}{60}-\frac{30}{60}\right|=\frac{1}{60}$$

$$\begin{aligned}
\left|a_n-\frac{1}{2}\right|&<\frac{1}{100}\\
\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|&<\frac{1}{100}\\
\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{n}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\\
\left|\frac{n+1-n}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\\
\left|\frac{1}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\ \|\ n>0\\
\frac{1}{2n}&<\frac{1}{100}\\
2n&>100\\
n&>50
\end{aligned}$$

Lukujonon jokaisen jäsenen etäisyys raja-arvosta on vähemmän kuin sadasosa luvusta $n = 51$ alkaen.

K8. **a)** $a_n = (-1)^n + 1$

$a_1 = (-1)^1 + 1 = 0$

$a_2 = (-1)^2 + 1 = 2$

$a_3 = (-1)^3 + 1 = 0$

Lukujonossa vuorottelevat luvut 0 ja 2, joten lukujono ei suppene vaan hajaantuu.

b) $a_n = 2^n \to \infty$, kun $n \to \infty$

Lukujonon jäsenet kasvavat rajatta, kun n kasvaa rajatta, joten lukujono hajaantuu.

c) $a_n = -n\cos\frac{1}{n}$

Kun n kasvaa rajatta $\frac{1}{n}$ lähestyy lukua 0 ja siten $\cos\frac{1}{n}$ lähestyy lukua $\cos 0 = 1$. Siten lauseke $-n\cos\frac{1}{n}$ pienenee rajatta, eikä lukujonolla ei ole raja-arvoa.

K9. **a)** $\frac{e^{n+1}}{\pi^n} = \frac{e^n \cdot e}{\pi^n} = (\frac{e}{\pi})^n \cdot e$

$\pi > e$, joten $0 < \frac{e}{\pi} < 1$. Tällöin $(\frac{e}{\pi})^n \cdot e \to 0 \cdot e = 0$, kun n kasvaa rajatta.

b)

$$a_1 = 2\sin x$$
$$a_2 = 2\sin^2 x = 2\sin x \cdot \sin x$$
$$a_3 = 2\sin^3 x = 2\sin^2 x \cdot \sin x$$

Lukujono näyttäisi olevan geometrinen lukujono. Lukujonossa $a_1 = 2\sin x$ ja $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sin^{n+1} x}{2\sin^n x} = \sin^{n+1-n} x = \sin x$.

Geometrinen lukujono suppenee, kun $-1 < q \leq 1$.

Epäyhtälö $-1 < \sin x \leq 1$ toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla, paitsi kun $\sin x = -1$, eli kun $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

Lukujono suppenee, kun $x \neq \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

K10. **a)** Suhdeluku $q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Koska $-1 < q < 1$, lukujono suppenee.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

b) Suhdeluku $q = \frac{18}{-36} = -\frac{1}{2}$. Koska $-1 < q < 1$, lukujono suppenee.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-36}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-36}{\frac{3}{2}} = -24$$

c) Suhdeluku $q = -\frac{2}{3}$. Koska $-1 < q < 1$, lukujono suppenee.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

K11. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \frac{e}{\pi}$ ja $a_1 = \pi$.

Koska $e < \pi$, $-1 < q < 1$ ja sarja suppenee.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{1-\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi}{\frac{\pi - e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{\pi - e}$$

b) $0{,}272727\ldots = 0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + \ldots$

$$= \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \ldots = 27 \cdot \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right)$$

Sarja on geometrinen sarja, jossa $a_1 = \frac{27}{100}$ ja $q = \frac{1}{100}$.

$$S = \frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{27}{99}$$

K12. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jossa $q = (1 + x)^2$ ja $a_1 = 1$.
Sarja suppenee, kun $-1 < (1 + x)^2 < 1$, eli kun
$-1 < 1 + x < 1$, eli $-2 < x < 0$.

b) Kun sarja suppenee, $S = \dfrac{1}{1-(1+x)^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(1+x)^2} &= 2\\ 1 &= 2(1-(1+x)^2)\\ 1 &= 2(1-1-2x-x^2)\\ 1 &= -4x-2x^2\\ 2x^2+4x+1 &= 0\\ x &= \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{-4\pm2\sqrt{2}}{4} = -1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Sekä $x = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}292...$ että $x = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1{,}707...$ kuuluvat välille $-2 < x < 0$, jolla tarkasteltava sarja suppenee. Niinpä yhtälön ratkaisu on $x = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tai $x = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K13. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \dfrac{4}{3}$. Koska $q > 1$, sarja hajaantuu.

b) $a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$
$a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$
$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$

Lukujonossa vaihtelevat luvut 0 ja 2. Koska yhteenlaskettavien lukujen jonolla ei ole raja-arvoa, sarja hajaantuu.

c) $a_n = 1+\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+0 = 1$. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sarja hajaantuu.

K14. **a)**

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t 2x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big/_1^t \frac{2}{-1}x^{-1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big/_1^t -\frac{2}{x} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{t}+\frac{2}{1}\right) = -0+2 = 2$$

b) Funktio $\frac{1}{(x-1)^5}$ on rajoittamaton päätepisteen $x = 1$ läheisyydessä.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1}\int_0^t (x-1)^{-5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1}\Big/_0^t \frac{1}{-4}(x-1)^{-4}$$

$$= \lim_{t\to 1}\Big/_0^t -\frac{1}{4(x-1)^4} = \lim_{t\to 1}\left(-\frac{1}{4(x-1)^4}+\frac{1}{4\cdot(-1)^4}\right) = -\infty$$

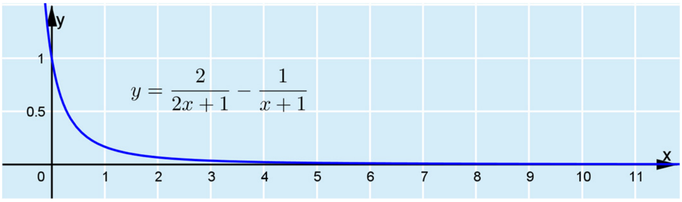
c)

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big/_0^t \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}(x^2+1)^{-1} = \lim_{t\to\infty}\Big/_0^t -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\right) = -0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

K15. Piirretään kuva.



Määritetään x-akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} &= 0 \\ \frac{2}{2x+1} &= \frac{1}{x+1} \quad \| x > 0 \\ 2(x+1) &= 2x+1 \\ 2x+2 &= 2x+1 \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Kuvaaja ei leikkaa x-akselia ja $\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} > 0$, joten alueen pinta-ala on $\int_0^\infty (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t \ln\frac{2x+1}{x+1} \\ &= \lim_{t\to\infty} (\ln\frac{2t+1}{t+1} - \ln 1) \\ &= \lim_{t\to\infty} (\ln\frac{2+\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} - 0) \\ &= \ln\frac{2+0}{1+0} = \ln 2 \end{aligned}$$

Pinta-ala on ln 2.

K16. Tilavuus on

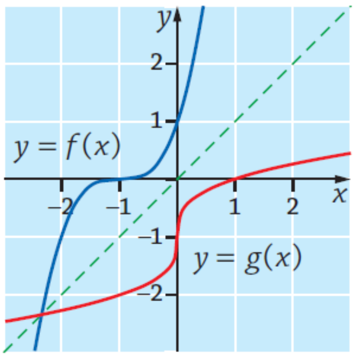
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\pi\int_t^2 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx &= \lim_{t\to 0}\pi\int_t^2 (x^{-\frac{1}{4}})^2\, dx \\ &= \lim_{t\to 0}\pi\int_t^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t\to 0}\pi \Big/_t^2 2x^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{t\to 0}\pi \Big/_t^2 2\sqrt{x} = \lim_{t\to 0}\pi(2\sqrt{2}-2\sqrt{t}) \\ &= \pi(2\sqrt{2}-2\sqrt{0}) = 2\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

K17. **a)** Koska $f(3) = 1$, niin $g(1) = 3$.
Arvoa $g(2)$ ei voi määrittää, sillä ei tiedetä kohtaa, jossa f saa arvon 2.
Koska $f(2) = 3$, niin $g(3) = 2$.

b) $f(g(1)) = 1$
$g(f(4)) = 4$

K18. **a)** $f(0) = 1$, jonka perusteella $g(1) = 0$.
Koska $f(-1) = 0$, niin $g(0) = -1$.
Vastaavasti, koska $f(-2) = -1$, niin $g(-1) = -2$.

b)



K19. Funktiolla on käänteisfunktio, jos se on monotoninen.
Funktio f on määritelty, kun $2x + 4 \geq 0$, eli kun $x \geq -2$ ja derivoituva, kun $x > -2$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

Derivaatta on positiivinen, kun $x > -2$, joten funktio f on kasvava ja siten sillä on käänteisfunktio.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2x+4} \ \| \ y \geq 0 \text{ ja } x \geq -2 \\ y^2 &= 2x+4 \\ 2x &= y^2 - 4 \\ x &= \frac{y^2-4}{2} \\ x &= \frac{1}{2}y^2 - 2 \end{aligned}$$

Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Funktion f määrittelyjoukko on $x \geq -2$. Funktion f arvojoukko on $[0, \infty[$, sillä $f(-2) = 0$, f on kasvava ja jatkuva, ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x+4} = \infty$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko $x \geq 0$ ja arvojoukko funktion f määrittelyjoukko $[-2, \infty[$.

K20. **a)** $f(-2, 3) = -2 \cdot 3 + 1 = -6 + 1 = -5$

Piste $(-2, 3, 5)$ ei ole funktion kuvaajalla, koska $f(-2, 3) \neq 5$.

b)

$$D_x(xy+1) = y$$
$$D_y(xy+1) = x$$
$$f'_x(-2,3) = 3$$
$$f'_y(-2,3) = -2$$

c) $f(x, y) = 4$, eli

$$xy + 1 = 4$$
$$xy = 3$$

Esimerkiksi piste $(1, 3)$ toteuttaa yhtälön.

K21. **a)**

$$1 - x^2 - y^2 = -1$$
$$-x^2 - y^2 = -2$$
$$x^2 + y^2 = 2$$

Funktio saa arvon -1 ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ pisteissä.

b)

$$D_x(1 - x^2 - y^2) = -2x$$
$$D_y(1 - x^2 - y^2) = -2y$$
$$f'_x(4,1) = -2 \cdot 4 = -8$$
$$f'_y(4,1) = -2 \cdot 1 = -2$$

K22. $f(x, y) = 3 + x^2 - y$

Tasa-arvokäyrille

$$3 + x^2 - y = c$$
$$y = x^2 + 3 - c$$

Tasa-arvokäyrät ovat ylöspäin aukeavia paraabelejä, esimerkiksi

$y = x^2 + 3$ ($c = 0$)
$y = x^2 + 2$ ($c = -1$) ja
$y = x^2 + 1$ ($c = -2$).