Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}$ (tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 2$)

d) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ei ole olemassa, sillä erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret.

e) $\lim_{x\to 9} \frac{f(x)-f(9)}{x-9}$ ei ole olemassa, sillä funktio f ei ole kohdassa $x = 9$ jatkuva eikä siksi voi myöskään olla derivoituva.

f) $\lim_{x\to 11} \frac{f(x)-f(11)}{x-11} = 0$ (tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 11$)

2. **a)** $f(0, 1) = 0^2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 - 5 = -1$

Piste (0, 1, 2) ei ole funktion f kuvaajalla, koska $f(0, 1) \neq 2$.

b) $D_x(x^2 + 3xy + 4y - 5) = 2x + 3y$

$D_y(x^2 + 3xy + 4y - 5) = 3x + 4$

$f_x'(4,-1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$

$f_y'(4,-1) = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$

3. **a)** Sarja on lukujen loputon summa ja lukujono on jono lukuja.

b) Lukujono suppenee, kun sen yleisellä jäsenellä on äärellinen raja-arvo. Sarja suppenee, kun sen osasummalla on äärellinen raja-arvo.

Suppeneva lukujono on esimerkiksi geometrinen lukujono $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ eli $a_n = (\frac{1}{10})^{n-1}$. Tällöin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Suppeneva sarja on esimerkiksi $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$, joka on geometrinen sarja, jossa $a_1 = 1$ ja $q = \frac{1}{10}$. Koska $-1 < q < 1$, sarja suppenee ja summa on $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

c) Epäoleellinen integraali suppenee, jos sen määrittelyssä käytettävillä määrätyillä integraalilla on äärellinen raja-arvo.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\Big/_t^1(-x^{-1}) = \lim_{t\to 0}\Big/_t^1(-\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0}(-\frac{1}{1}+\frac{1}{t}) = \infty$$

Integraali ei suppene.

4. **a)** $$\frac{3e^x+2}{2e^x+3} = \frac{e^x(3+\frac{2}{e^x})}{e^x(2+\frac{3}{e^x})} = \frac{3+\frac{2}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

b) $$\frac{3e^x+2}{2e^x+3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{3\cdot 0+2}{2\cdot 0+3} = \frac{2}{3}$$

5. **a)**

$$a_n = \frac{n^2 \cdot n!}{(n+2)!} = \frac{n^2 \cdot \cancel{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+3n+2}$$

$$= \frac{n^2 \cdot 1}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+0+0} = 1$$

b)

$$a_n = n - \sqrt{n^2-3n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-3n})(n+\sqrt{n^2-3n})}{n+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$= \frac{n^2-(n^2-3n)}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \frac{3n}{n+\sqrt{n^2(1-\frac{3}{n})}}$$

$$= \frac{3n}{n+\underbrace{|n|}_{n>0}\sqrt{1-\frac{3}{n}}} = \frac{3n}{n(1+\sqrt{1-\frac{3}{n}})}$$

$$= \frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

6. $$a_n - 2 = \frac{2n-2}{n+1} - 2 = \frac{2n-2}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n-2-2n-2}{n+1} = -\frac{4}{n+1}$$

Kun $n \geq 1$, $n + 1 > 0$ ja $-\dfrac{4}{n+1} < 0$.

Koska erotus $a_n - 2$ on negatiivinen, $a_n < 2$ kaikille termeille.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+2} - \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2n}{n+2} - \frac{2n-2}{n+1} \\
&= \frac{2n(n+1)-(2n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{2n^2+2n-(2n^2+4n-2n-4)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{8n+4}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

Kun $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n > 0$, joten $a_{n+1} > a_n$ kaikille termeille.

$$a_1 = \frac{2n-2}{n+1} = \frac{n(2-\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2-0}{1+0} = 2$$

7. $$\begin{aligned}
S_n &= \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{n-1}{n} + \ln\frac{n}{n+1} \\
&= \ln 1 \underbrace{-\ln 2 + \ln 2}_{0} \underbrace{-\ln 3 + \ln 3}_{0} \underbrace{-\ln 4 + \ldots + \ln(n-1)}_{0} \underbrace{-\ln n + \ln n}_{0} - \ln(n+1) \\
&= \ln 1 - \ln(n+1) \\
&= -\ln(n+1)
\end{aligned}$$

$$-\ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

Sarja ei suppene.

8. $$f(x)=\begin{cases} ae^{-3x}, \text{ kun } x \geq 0 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$$

Tulee olla $f(x) \geq 0$, joten $a \geq 0$.

Lisäksi tulee olla $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} ae^{-3x}\mathrm{d}x = 0 + \lim_{t\to\infty}\int\limits_{0}^{t} ae^{-3x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} -\frac{1}{3}ae^{-3x} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}ae^{-3t} + \frac{1}{3}ae^{-3\cdot 0}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{a}{3e^{3t}} + \frac{1}{3}a\right) = 0 + \frac{1}{3}a = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{3} = 1$$
$$a = 3$$

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, \text{ kun } x \geq 0 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$$

Kun $x < 0$, kertymä on 0.

Kun $x \geq 0$, $\int\limits_{0}^{s} 3e^{-3x}\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{s} -e^{-3x} = -e^{-3s} + e^{-3\cdot 0} = -e^{-3s} + 1 = 1 - e^{-3s}$.

Kertymäfunktio on

$$F(x)=\begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-3x}, x \geq 0 \end{cases}.$$

$P(X \geq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-3t}) = e^{-3t}$, kun $t \geq 0$.

9. **a)** Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$, jos $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$.

$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2\le f(x)\le 5}) = 0$$

Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos raja-arvo $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ on olemassa.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-0\cdot f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x)$$

Funktion f raja-arvon olemassaolosta kohdassa $x = 0$ ei tiedetä mitään, joten funktion g derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$ ei voida sanoa mitään.

b) $g(0) = 0^2 \cdot f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2\le f(x)\le 5}) = 0$$

Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot f(x)-0^2\cdot f(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot f(x) \overset{\text{a kohta}}{=} 0\end{aligned}$$

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$.

10. Tiedetään, että $1 + a_2 + a_3 + \ldots = 10$. Koska sarja on geometrinen, voidaan kirjoittaa $1+a_2+a_3+\ldots=1+q+q^2+\ldots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-q}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-q}&=10 \quad \| \, q\neq 1\\ 1&=10-10q\\ q&=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\ldots+\lg a_{100}&=\lg 1+\lg q+\lg q^2+\ldots+\lg q^{99}\\ &=0+\lg q+2\lg q+3\lg q+\ldots+99\lg q\\ &=\lg q\cdot(1+2+3+\ldots+99)\end{aligned}$$

Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + 99$ on aritmeettinen summa, jossa on 99 jäsentä.

$$1+2+3+\ldots+99=99\cdot\frac{1+99}{2}=99\cdot 50=4950$$

$$\begin{aligned}&\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\ldots+\lg a_{100}\\ &=\lg q\cdot(1+2+3+\ldots+99)\\ &=\lg\frac{9}{10}\cdot 4950\\ &=(\lg 9-\lg 10)\cdot 4950\\ &=(\lg 9-1)\cdot 4950\\ &=4950(2\lg 3-1)\end{aligned}$$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)**

aika	viikossa edetty matka (m)
1. viikko	10
2. viikko	$10 \cdot 0{,}95$
3. viikko	$10 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 10 \cdot 0{,}95^2$
…	
n. viikko	$10 \cdot 0{,}95^{n-1}$

Matkat muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 10$ ja $q = 0{,}95$.

Ensimmäisen puolen vuoden aikana kaivettu matka:

$$10 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 0{,}95^2 + \ldots + 10 \cdot 0{,}95^{25}$$

$$= 10 \cdot \frac{1-0{,}95^{26}}{1-0{,}95} = 147{,}29\ldots$$

Robotti on edennyt noin 150 metriä.

b) Sarja $10 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 0{,}95^2 + \ldots$ on geometrinen sarja, joka suppenee, koska $-1 < q < 1$.

Tällöin $S = \dfrac{10}{1-0{,}95} = 200$.

Tunnelin pituus lähestyy lukua 200 m.

c)

$$10 \cdot \frac{1-0{,}95^n}{1-0{,}95} = 100$$

$$\frac{1-0{,}95^{26}}{0{,}05} = 10$$

$$1-0{,}95^n = 0{,}5$$

$$0{,}95^n = 0{,}5$$

$$n = \log_{0{,}95} 0{,}5 = 13{,}51\ldots$$

Robotilta menee kaivamiseen 14 viikkoa.

12. Funktio f on jatkuva väleillä $x < 2$ ja $x > 2$. Tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x = 2$.

$$f(2)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+\frac{4}{9})=2a+\frac{4}{9}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-}(\frac{x}{x+1})=\frac{2}{3}$$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$, kun

$$\begin{aligned}2a+\frac{4}{9}&=\frac{2}{3}\\ 2a&=\frac{2}{9}\\ a&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}, \text{ kun } x<2\\ \frac{x}{x+1}, \text{ kun } x\geq 2\end{cases}.$$

Funktio f on derivoituva väleillä $x < 2$ ja $x > 2$. Tarkastellaan derivoituvuutta kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2-}\frac{1}{9}\cdot\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2+}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{2}{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{\frac{3x-2(x+1)}{3(x+1)}}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2+}\frac{\cancel{x-2}}{3(x+1)(\cancel{x-2})}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{3x+3}=\frac{1}{6+3}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa $x = 2$, joten funktio f on derivoituva kohdassa $x = 2$. Funktio f on derivoituva kaikkialla.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{9}x+\frac{4}{9})=-\infty$$

13. **a)** Päättely on virheellinen: lukujonon suppenemisesta ei voi päätellä sarjan suppenemista. Päättely on epätosi.

Jos sarja suppenee, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Nyt $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1-0=1\neq 0.$

b) Päättely on virheellinen: funktion kasvavuus ja jatkuvuus eivät riitä takaamaan, että funktio olisi kertymäfunktio.

Jotta funktio f voisi olla satunnaismuuttujan kertymäfunktio, tulee olla $f(x)\leq 1$. Koska $f(1)=e^1=e>1$, f ei voi olla kertymäfunktio.

c) Päättely on oikein: Rajatta kasvavan funktion f arvo on suurempi kuin 100 jostakin muuttujan x arvosta c alkaen. Niinpä tällaiselle funktiolle pätee

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^t f(x)\mathrm{d}x\right)\\&\geq\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^t 100\mathrm{d}x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+100(t-c)\right)=\infty.\end{aligned}$$

Funktion x^2 epäoleellisen integraalin hajaantumisen voi todeta myös laskemalla:

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\Big/_0^t\frac{1}{3}x^3=\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3)=\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{3}t^3)=\infty\,.$$

14.

$$x^4 \le \frac{1}{x^4} \quad \| \cdot x^4 \ne 0$$

$$x^{18} \le 1$$

$$-1 \le x \le 1,\ x \ne 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^4}, \text{ kun } x < -1 \\ x^4, \text{ kun } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^4}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to-\infty} \Big/_{t}^{-1} -\frac{1}{3x^3} + \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 + \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} -\frac{1}{3x^3} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3t^3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + 0\right) + \frac{2}{5} + \left(0 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

15. **a)** $f(0)=\dfrac{|0|-1}{0-1}=1$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-1}{x-1}=\frac{0-1}{0-1}=1$$

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1}{x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-x}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2}{x-1}=\frac{-2}{0-1}=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{0}{x(x-1)}=0$$

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa x =0.

b) Funktiota f ei ole määritelty kohdassa $x = 1$, joten sen jatkuvuutta ja derivoituvuutta ei voida tarkastella tässä kohdassa.

16. **a)** $f(x) = \ln x + x + 1,\ x > 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

Kun $x > 0$, $f'(x) > 0$, joten f on kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

b) $f(x) = 2$

$\ln x + x + 1 = 2$

$\ln x + x = 1$

Huomataan, että kun $x = 1$, $\ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Koska $f(1) = 2$, $g(2) = 1$.

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{1}+1}=\frac{1}{2}$$

c) Käänteisfunktion g kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suoran $y = x$ suhteen. Kuvaajat leikkaavat siksi toisensa pisteissä, joissa ne leikkaavat suoran $y = x$. Etsitään ne funktion f kuvaajalla olevat pisteet, joiden x ja y koordinaatit ovat samat, eli ratkaistaan yhtälö $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \ln x + x + 1 &= x \\ \ln x &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Pisteessä $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

d) Kuvaajien välinen kulma on sama kuin leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Tangenttien välinen kulma saadaan laskettua kulmakertoimien eli derivaatan arvojen avulla.

$$f'(\frac{1}{e}) = e + 1$$

$$g'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{e})} = \frac{1}{e+1}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{e + 1 - \frac{1}{e+1}}{1 + (e+1)\cdot\frac{1}{e+1}}\right|$$

$$\alpha = 59{,}89...°$$

Kuvaajien välinen kulma on 59,9°.

17. Poikkileikkauskäyrän yhtälö on $f(x, 1) = e^{-x^2} \cdot 1 = e^{-x^2}$.

$$f_x'(x,1) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$f_x'(1,1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

Tangentti on tasossa $y = 1$, joten sen y-akselin suuntainen komponentti eli kantavektorin $\overline{j}$ kerroin on 0.

Tangentin kulmakerroin $-\frac{2}{e}$ ilmoittaa, kuinka paljon z-koordinaatti muuttuu, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä. Eräs suuntavektori on $\overline{i} - \frac{2}{e}\overline{k}$.

18. **a)** $f'(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 2 \\ -x + 3, 2 \le x \le 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, 0 \le x < 1 \\ x + D, 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + E, 2 < x \le 4 \end{cases}$

Koska $f(0) = 0$, $C = 0$.

Funktion tulee olla jatkuva kohdassa $x = 1$, joten

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 1 + D$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + D$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$1 + D = \frac{1}{2}$$

$$D = -\frac{1}{2}$$

Funktion f tulee olla jatkuva kohdassa $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$$

$$f(2) = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = 4 + E$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$4 + E = 1\frac{1}{2}$$

$$E = -2\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, 0 \le x < 1 \\ x - \frac{1}{2}, 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2}, 2 < x \le 4 \end{cases}$$

c) Suurin ja pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

$f(0) = 0$

$f(4) = 1\frac{1}{2}$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 3$.

$f(3) = 2$

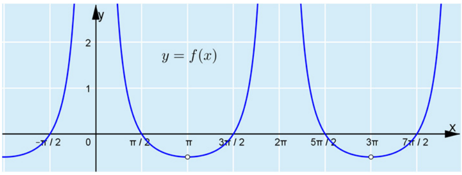
Suurin arvo on 2 ja pienin 0.

19. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x$ on geometrinen sarja, jossa $a_1 = \cos^1 x = \cos x$ ja suhdeluku $q = \cos x$.

Kun $x \neq n\pi$, $-1 < \cos x < 1$ ja sarja suppenee, joten sen summa on reaaliluku kaikissa määrittelyjoukon pisteissä.

Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x = \dfrac{\cos x}{1-\cos x}$.

$f(x) = \dfrac{\cos x}{1-\cos x}$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$



Kun $x \to \pi + n \cdot 2\pi$, niin $\cos x \to -1$.

Siten $\lim\limits_{x\to\pi+n2\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi+n2\pi} \dfrac{\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{-1}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Näissä pisteissä funktiolla f siis on raja-arvo, ja funktio voidaan laajentaa näissä pisteissä jatkuvaksi määrittelemällä sen arvoksi $-\dfrac{1}{2}$.

Kun $x \to n \cdot 2\pi$, niin $\cos x \to 1$. Siten $\lim\limits_{x\to n2\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to n2\pi} \dfrac{\cos x}{1-\cos x} = \infty$.

Näissä pisteissä funktiolla f ei ole raja-arvoa, eikä funktiota f siksi voida laajentaa näissä pisteissä edes jatkuvaksi funktioksi.

Funktiota ei voida laajentaa derivoituvaksi koko $\mathbb{R}$:ssa.

20. **a)** Valitaan esimerkiksi $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tällöin $a_n = \dfrac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja $f(a_n) = \sin\dfrac{1}{a_n} = \underbrace{\sin n\pi}_{=0 \text{ kaikilla } n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

b) Valitaan esimerkiksi $a_n = \dfrac{1}{t + n\cdot 2\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tällöin $\dfrac{1}{t + n\cdot 2\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja $\sin(\dfrac{1}{a_n}) = \sin(t + n\cdot 2\pi) = \sin t$

jokaiselle n sinifunktion jaksollisuuden perusteella.

Niinpä $f(a_n) = \sin(\dfrac{1}{a_n}) = \sin t \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin t.$