

KÄÄNTEISFUNKTIO /slf

esim 1

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Ovatko toistensa
käänt. f. ?

latu.

$f(x)$ määr. kaikilla $x \in \mathbb{R}$
 $g(x)$ määr. kun $x \geq 0$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x, \text{ kun } x < 0$$

\forall : Eivät ole käänt. funktioita.

Käänteisfunktiot ovat keskenään symmetrisiä suoran $y=x$ suhteen.

$$f(g(x)) = x \quad \text{ja} \quad g(f(x)) = x$$

$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{ja} \quad (g \circ f)(x) = x$$

Olemasoluehto: !
Aidosti monotoninen funktio

- Funktion määitelämä $f: A \rightarrow B$
- A määittelyjoukko M_f (mj)
- joukko B on maalijoukko eli arvojoukko A_f
- käänteisfunktio f^{-1} " f miinus 1"

esim 1. Funktiolla $f: f(x) = 2x - 1$ on käänteisfunktio.

- a) Määritä käänteisfunktio.
- b) Piirrä kuvaajat samaan koordinaatistoon. KOTONA! $\begin{matrix} k \\ b \end{matrix}$

- Ratk. ② 1) Ratkaise funktio $x:n$ suhteen
- ③ 2) Vaihdataan muuttujat
 - ① 3) Määittelyjoukko ja arvojoukko vaihdetaan

$$1) \quad \begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ 2x &= y + 1 \quad | :2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$2) \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = g(x) \quad \text{I} + \frac{1}{2}$$

$$M_f = \underline{\underline{\mathbb{R}}} \quad \longleftrightarrow \quad A_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} M_f^{-1} = \mathbb{R} \\ M_g = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_f^{-1} = \mathbb{R} \\ A_g = \mathbb{R} \quad \text{I} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esim Määritä funktion $f: [1, \infty[\rightarrow A_f$,
 $x \mapsto x^2 - 2x - 1$ käänteisfunktio.
 Piirrä funktionien f ja f^{-1}
 kuvaajat.

Ratk. ylöspäin aukeava paraabeli
 ja funktio on aid. kasvava
 $[1, \infty[$

$$M_f: [1, \infty[$$

$$A_f: [-2, \infty[$$

$$y = x^2 - 2x - 1$$

$$y = -2$$

$$M_{f^{-1}}: [-2, \infty[$$

$$A_{f^{-1}}: [1, \infty[$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = y \quad | +1$$

$$x^2 - 2x - 1 + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x-1 = \sqrt{y+2}$$

$$x = \sqrt{y+2} + 1$$

$$y = \sqrt{x+2} + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

huom. neg.
 siksi $x \geq 1$ ja
 $y \geq -2$

$$f^{-1}: [-2, \infty[\rightarrow [1, \infty[$$

$$x \mapsto \sqrt{x+2} + 1$$

KT: Piirrä kuvaajat

esim 3 Osoita, että funktio $f: f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$

a) Osoita, että funktio on käänt. f.

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$
 lauseke ja m.j.

Ratk. Tarkastellaan monotonisuutta

$$D \frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot x}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad x > 1$$

$(x-1)^2$ on aina positi.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \quad \text{kun } x > 1$$

\Rightarrow aid. vähenävä \Rightarrow funktio on käänt. funktio,
 kun $x > 1$