E1 Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x &, x \le 1 \\ 3x &, x > 1 \end{cases}$ derivoituva

kohdassa $x = 1$?

Ratk. Tutkitaan ensin jatkuvuutta kohdassa $x = 1$.

1) $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (2x^2 - x) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

2) $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (3x) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 1$

3) $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 - 1 = 1$,

Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$, joten näin ollen funktio ei voi olla derivoituva kohdassa $x = 1$.

E2 Tutki funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & , x \le 1 \\ 4x+1 & , x > 1 \end{cases}$$

derivoituvuutta.

Ratk.

Jatkuvuus:

1) $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (2x^2+3) = 2\cdot 1^2+3 = 5$

2) $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (4x+1) = 4\cdot 1 + 1 = 5$

3) $f(1) = 2\cdot 1^2+3 = 5$

} on jatkuva

Derivoituvuus:

$$f_-'(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{2x^2+3-(2\cdot 1^2+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{2x^2+\overbrace{3-5}^{-2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{2(x^2-1)}{x-1} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1-} (2x+2) = 2\cdot 1+2 = \underline{4}$$

s. 41

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{TAI} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$f_+'(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{4x+1-(4\cdot 1+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{4x+1-5}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1+} 4 = 4$$

Toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret, joten funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$.