

## SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

↑  
termit

Jos sarjan  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  osasummien jono  $(S_n)$  suppenee kohti äärellistä raja-arvoon  $S$ , sanotaan, että sarja suppenee ja sen summa on  $S$ .

Jos sarja ei suppene, sen sanotaan hajaantuvan.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n =$$

Huom! Jos vaikka löytyisi äärellinen raja-arvo yleiselle termille, ei se välttämättä suppene.

=> lue sivulle 17 asti:

KT: 19, 21, 22, 23, \*24

Kerratkaa aritm. & geom. summa

## GEOMETRINEN SARJA

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$$

Jokko:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \\ - q S_n &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{aligned}$$

$$S_n - q S_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \quad | : (1-q) \neq 0 \quad \left( \begin{array}{l} 1-q \neq 0 \\ q \neq 1 \end{array} \right)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

Geometrisen sarjan  $n$ :n ensimmäisen termin summa on

$$\begin{cases} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ S_n = n a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Geometrisen sarjan suppenemislause:

Geom. sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{k-1}$  suppenee

vain, jos  $-1 < q < 1$  eli  $|q| < 1$  ja  $q \neq 0$  !!!

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \leftarrow$$

esim Koska sarjan summa  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

I  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{(n+1)-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{1} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = 2^{n-1-n} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = q = \text{vakio}$

II  $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$   
 $\frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-(n-1)}$  |  $\Rightarrow$  geom. sarja, jonka suhdeluku on  $\frac{1}{2}$ .

Koska  $|q| < 1$ , niin sarja suppenee ja sen summa on

$$\underline{S} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

V: Sarjan summa on 2.

esim 2 Eritä murtolukumuodossa  
luku  $3,217217217\dots$

Ratk.  
I tyyppi kts. MAA 1

II tyyppi

$$3,217217\dots = \underbrace{3}_{a_1} + \underbrace{0,217 + 0,000217 + \dots}_{a_2}$$

$$q = \frac{0,000217}{0,217} = \frac{1}{1000}, \quad |q| < 1 \Rightarrow \text{suppenee}$$

$0,001 < 1$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,217}{1-0,001} = \underline{\underline{\frac{3217}{999}}}$$

esim 3 Millä  $x$ -n arvoilla päättymätön

geom. sarjan

$$\textcircled{1} + \overset{a_1}{\frac{2x}{x+1}} + \overset{a_2}{\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2} + \dots$$

$$\text{mj. } x \neq -1$$

$$\left(\frac{2x}{x+1}\right)^0$$

Suppenee?

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2x}{x+1}\right)^n} = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{n+1-n} = \frac{2x}{x+1}$$

$\Rightarrow$  ei riipu  $n$ :stä

$|q| < 1$  jotta suppenee

Jos suppenee, niin

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\left| \frac{2x}{x+1} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{2x}{x+1} < 1$$

$$-1 < \frac{2x}{x+1} \quad \text{ja} \quad \frac{2x}{x+1} < 1$$

$$\frac{2x}{x+1} + 1 > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{2x}{x+1} - 1 < 0$$

$$\frac{2x+x+1}{x+1} > 0$$

$$\frac{3x+1}{x+1} > 0$$

$$\text{nk: } \frac{3x+1}{x+1} = 0$$

$$3x+1=0 \quad x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad x = -1$$

$$\frac{2x - (x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{2x-x-1}{x+1} < 0$$

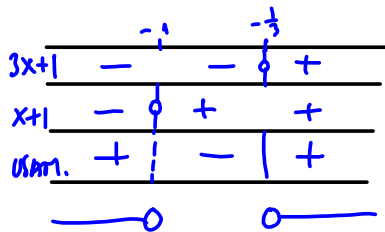
mj:  $x \neq -1$

$$\frac{x-1}{x+1} < 0$$

$$\text{nk: } \frac{x-1}{x+1} = 0$$

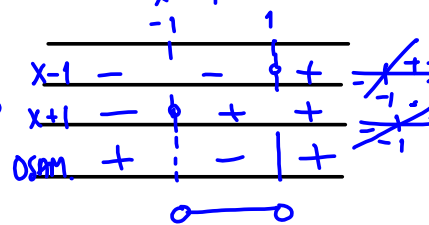
$$x-1=0$$

$$x=1$$

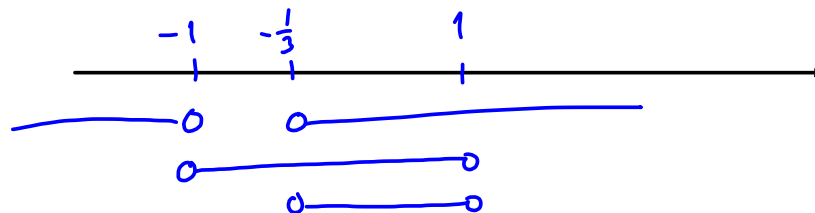


$$x < -1 \quad \text{tai} \quad x > -\frac{1}{3}$$

→  
→



$$-1 < x < 1$$



$$\underline{\underline{V: -\frac{1}{3} < x < 1}}$$

esimKilla  $x:n$  arvoilla sarja

$$1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^{n-1} + \dots$$

Suppenee? laske sarjan summa.

Ratk.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-x)^{(n+1)-1}}{(1-x)^{n-1}} = \frac{(1-x)^n}{(1-x)^{n-1}}$$

$$= (1-x)^{n-(n-1)} = (1-x)^{1-1} = 1-x$$

$\Rightarrow$  ei riipu  $n$ :stä  $\Rightarrow$  geom. sarjan  
suppeneminen

$$|q| < 1$$

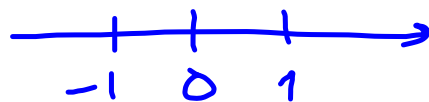
$$|1-x| < 1$$

$$-1 < 1-x < 1 \quad | -1$$

$$-2 < -x < 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2 > x > 0$$

$$0 < x < 2$$



Sarjan summa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x},$$

kun  $0 < x < 2$ 

$\checkmark$ : Sarjan summa on  $\frac{1}{x}$ ,

kun  $0 < x < 2$