

FUNKTION DERIVOITUVUUS

ks. määritelmät

lukuilta 37-43

Erotusosumäärän raja-arvo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Määritelmä:

Funktio f on derivoituva välillä I , kun se on derivoituva jokaisessa välillä I pisteessä ja toispuoleisesti derivoituva mahdollisimman välillä päätepisteisiin.

esim Tutki funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & \text{kun } x \leq 1 \\ 4x + 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

derivoituvuutta.

Ratk. Funktiot ovat polynomifunktioina derivoituvia.

Funktio on derivoituva, kun $x \neq 1$, ja

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & , \text{ kun } x < 1 \\ 4 & , \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

Kohdassa $x=1$

erotusosumäärän raja-arvo

toispuoleiset raja-arvot eli

toispuoleiset derivaatat kohdassa $x=1$

1) Tutkitaan ensin jatkuvuutta kohdassa $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(x_0)$$

$$2 \cdot 1^2 + 3 = 4 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 3$$

$$5 = 5 = 5$$

\Rightarrow funktio on jatkuva kohdassa $x=1$

Funktio on myös jatkuva, kun $x \leq 1$, koska kyseessä on paraabeli.

Kun $x > 1$, kyseessä on nouseva suora ja jatkuva tällä välillä.

$$2) f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 3 - (2 \cdot 1^2 + 3)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 3 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \qquad \qquad \qquad = 4$$

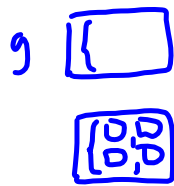
\Rightarrow f on derivoitunut myös kohdassa $x=1$,
joten f on derivoitunut koko \mathbb{R} :ssä.

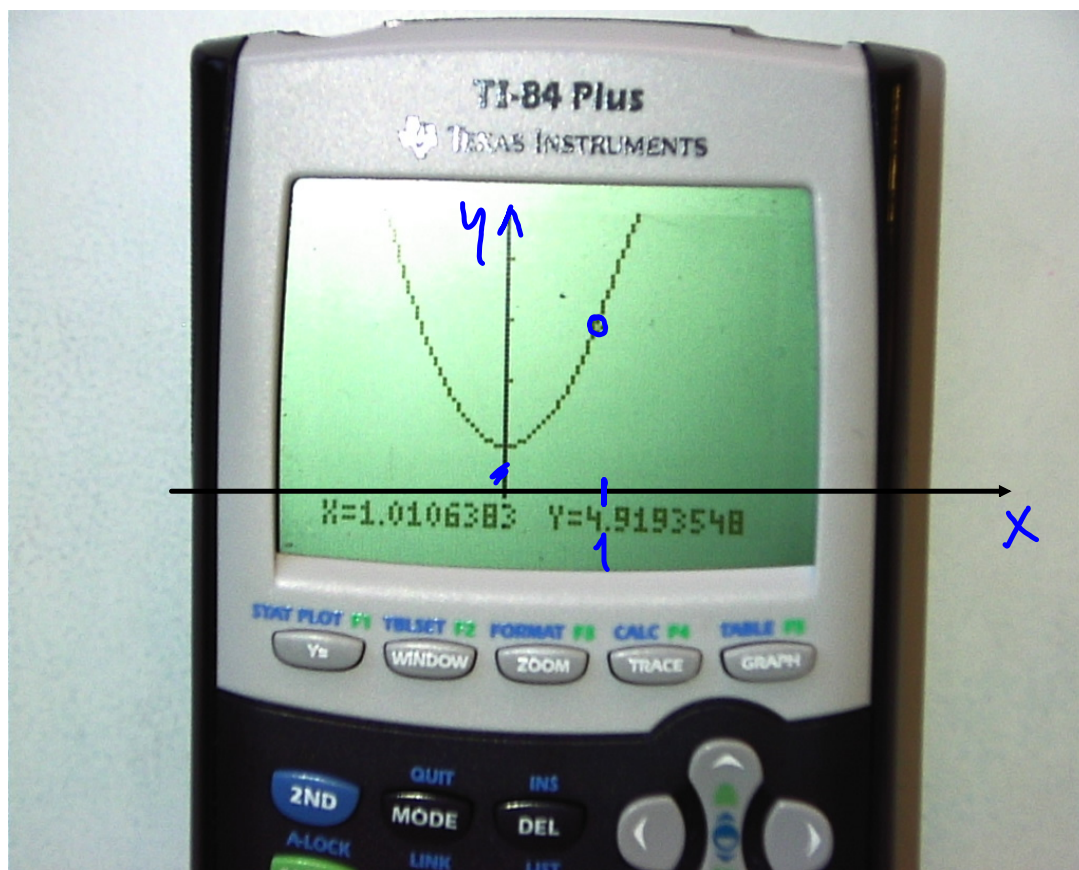
lets.
MAA2
tekijälause

muistikaard
jakoh. jake

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

CAS-laskinohje





Huom!

Derivoituva funktio on aina jatkuva.
Jatkuva funktio ei ole välttämättä
derivoituva.

ort. itseisarvo funktio

