Kongruenssiyhtälön ratkaiseminen

Esim 1 Ratkaise kongruenssiyhtälö

$2x \equiv 3 \pmod 5$

$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow m \mid (a-b)$

Ratk.

x	$2x \equiv 3 \pmod 5$
0	$2\cdot 0 \equiv 0 \not\equiv 3 \pmod 5$
1	$2\cdot 1 \equiv 2 \not\equiv 3 \pmod 5$
2	$2\cdot 2 \equiv 4 \not\equiv 3 \pmod 5$
3	$2\cdot 3 \equiv 6 \not\equiv 3 \pmod 5$
4	$2\cdot 4 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$
5	

$\frac{0-3}{5} = \frac{-3}{5}$ $\quad \frac{2-3}{5} = \frac{-1}{5}$ $\quad \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{6-3}{5} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$x = 4$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön

$x = 4 + 5m$, $m \in \mathbb{Z}$

Esim 2 Ratkaise kongruenssiyhtälö

$13x + 5 \equiv 3 \pmod{25}$

Ratk. Ratkaistaan kongruenssiyhtälö Diofantoksen yhtälön avulla. Koska luvut ovat kongruentteja, niiden erotus on jaollinen moduliilla.

$y \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow m \mid (a-b)$

$\frac{a-b}{m}$

$(13x+5) - 3 = 25y$

$13x + 5 - 3 = 25y$

$13x - 25y = -2$

$\mathrm{syt}(25,13) = ?$

$25 = 1\cdot 13 + 12$

$13 = 1\cdot 12 + 1$

$12 = 12\cdot 1 + 0$

$\mathrm{syt}(25,13) = 1$

$a = 13$, $b = 25$

$12 = 25 - 1\cdot 13$

$1 = 13 - 1\cdot 12$

Lausutaan $\mathrm{syt}(25,13) = 1$ lukujen 13 ja 25 lineaarikombinaationa.

$1 = 13 - 1\cdot 12$

$= 13 - 1\cdot(25 - 1\cdot 13)$

$= 13 - 1\cdot 25 + 1\cdot 13$

$1 = 2\cdot 13 - 1\cdot 25$

alkuperäinen yhtälö on $13x - 25y = -2$

$2\cdot 13 - 1\cdot 25 = 1 \quad |\cdot(-2)$

$-4\cdot 13 - (-2)\cdot 25 = -2$

verrataan yhtälöitä, saadaan yksityisratkaisu

$\begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = -2 \end{cases}$

Kongruenssiyhtälössä ratkaistaan vain muuttuja x.

$\Rightarrow$ $x = x_0 + n\cdot \frac{b}{\mathrm{syt}(a,b)} = -4 + n\cdot \frac{-25}{1} = -4 - 25n$

$-4 - 25n = -4 + 25\cdot(-n)$, merkitään $m = -n \in \mathbb{Z}$

$= -4 + 25m$

$= 21 - 25 + 25m$

$= 21 + 25(m-1)$

merk. $k \in \mathbb{Z}$

$= 21 + 25k$

V: $x = 21 + 25m$, $m \in \mathbb{Z}$