

$$3^{2007} \equiv 3^{2 \cdot 1003 + 1}$$

$$\equiv (3^2)^{1003} \cdot 3$$

$$\equiv 9^{1003} \cdot 3$$

$$\equiv (-1)^{1003} \cdot 3$$

$$\equiv -1 \cdot 3$$

$$\equiv -3$$

$$\equiv \pmod{10}$$

$$-3 \equiv \underline{7} \pmod{10}$$

$$9 \equiv \underline{-1} \pmod{10}$$

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b)$$

$$-3 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow 10 \mid (-3-7)$$

$$-\frac{10}{10} = -1$$

✓: suurin yhteinen
numero on 7.

Kongruenssiyhtälön
ratkaiseminen

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid a-b$$

esim 1 Ratkaise kongruenssiyhtälö

a) $2x \equiv 3 \pmod{5}$ b) $2x \equiv 3 \pmod{6}$

Ratk.	x	$2x \equiv 3 \pmod{5}$
	0	$2 \cdot 0 \equiv 0 \not\equiv 3 \pmod{5}$
	1	$2 \cdot 1 \equiv 2 \not\equiv 3 \pmod{5}$
	2	$2 \cdot 2 \equiv 4 \not\equiv 3 \pmod{5}$
	3	$2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 1 \pmod{5}$
	4	$2 \cdot 4 \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}$
	5	

ei ratkaisia

$x=4$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön

$$x = 4 + 5n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

esim 2 Ratkaise kongruenssiyhtälö
 $13x + 5 \equiv 3 \pmod{25}$.

$x = 4$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön
 $x = 4 + 5n, n \in \mathbb{Z}$
esim 2 Ratkaise kongruenssiyhtälö
 $13x + 5 \equiv 3 \pmod{25}$.

Ratk. Ratkaistaan kongruenssiyhtälö
Diofantoksen yhtälön avulla.
Koska luvut ovat kongruentteja,
niin niiden erotus on jaollinen
modulilla.

$$y \in \mathbb{Z}$$

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b$ Diofantoksen yhtälö

$$(13x + 5) - 3 = 25y$$

$$13x - 25y = -2$$

$$\text{sgt}(25, 13)$$

$$a = 13$$

$$b = 25$$

$$a = 13$$

$$b = 25$$

$$25 = 1 \cdot 13 + 12 \quad \leftarrow$$

$$13 = 1 \cdot 12 + 1 \quad \leftarrow$$

$$12 = 12 \cdot 1 + 0$$

$$\text{sytt}(13, 25) = \underline{1}$$

lausutaan nyt $\text{myt}(13, 25) = 1$
lukujen 13 ja 25 lineaarikombinaatioina.

$$1 = 13 - 1 \cdot 12 = 13 - 1 \cdot (25 - 1 \cdot 13)$$

=

$$= 2 \cdot 13 - 1 \cdot 25$$

$$1 = 2 \cdot 13 - 1 \cdot 25$$

$$\text{alkuper. yht. } 13x - 25y = -2$$

$$1 = 2 \cdot 13 - 1 \cdot 25 \quad | \cdot (-2)$$

$$\text{alkuper. yht. } 13x - 25y = -2$$

$$1 = 2 \cdot 13 - 1 \cdot 25 \quad | \cdot (-2)$$

$$-2 = -4 \cdot 13 - (-2) \cdot 25$$

venotetaan yhtälöitä, saadaan yksittäisarvoon

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Kongruenssiyhtälön ratkaisun
vain muuttuja x .

$$x = x_0 + n \cdot \frac{b}{\text{sytt}(a,b)} = -4 + n \cdot \frac{-25}{1} = \text{---}$$

(Vast. voi jättää tähän muotoon. Kuitenkin haluttuun ratkaisuun positiivinen kokonaisluku.)

$$-4 - 25m = -4 + 25 \cdot (-m) \quad , \text{ merkitään} \\ m = -m \in \mathbb{Z}$$

$$= \underbrace{-4} + 25m$$

$$= 21 - 25 + 25m \quad \text{yhdeinen tekijä}$$

$$= 21 + 25 \underbrace{(m-1)}_{\text{merkitään } k}$$

$$= 21 + 25k \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{V: } X = 21 + 25m \quad , m \in \mathbb{Z}$$