MATEMAATTINEN INDUKTIOTODISTUS

1) ALKUASKEL
Osoitetaan väite oikeaksi, kun $n = 1$.

2) INDUKTIOASKEL
Tehdään induktio-oletus, kun $n = k$.
Induktioväite: väite on tosi arvolla $n = k+1$.

⋮

Alkuaskeleen ja induktioaskeleen perusteella
. . . . . kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\square$

Esim.1 Todista, että kaikkien parittomien lukujen summa on luvun neliö.

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_+$$

Tod: 1) ALKUASKEL $n = 1$: Osoitetaan, että väite on tosi arvolla arvolla $n = 1$.

$$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$$
$$1 = 1 \Rightarrow \text{tosi}$$

Alkuaskel on suoritettu.

2) INDUKTIOASKEL
Induktio-oletus: Väite on tosi arvolla $n = k$ eli
$$1+3+5+7+\ldots+(2k-1) = k^2$$

Induktioväite: Väite on tosi arvolla $n = k+1$ eli
$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2k-1)}_{\text{induktio-oletuksen mukaan } k^2}+\big(2(k+1)-1\big) = (k+1)^2$$

Osoitetaan, että induktioväite seuraa induktio-oletuksesta.

$$k^2 + \big(2(k+1)-1\big) = (k+1)^2$$
$$k^2 + 2k+2-1 = k^2+2k+1$$
$$k^2 + 2k + 1 = k^2+2k+1$$

Alkuaskeleen ja induktioaskeleen perusteella
$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\square$

Esim.2 Osoita induktiolla, että
$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$