MATEMAATTINEN INDUKTIOTODISTUS

1° Perusaskel:
Osoitetaan väite oikeaksi, kun $n = 1$

2° Induktioaskel:
a) Tehdään induktio-oletus $n = k$

b) Induktioväite: osoitetaan kaava oikeaksi, kun $n = k+1$

⋮

Johtopäätös: Koska kaava on ensimmäisen kohdan mukaan voimassa, kun $n=1$, se on toisen kohdan mukaan myös seuraavalla arvolla $n = 1+1 = 2$, ja edelleen $n = 2+1 = 3$ jne. eli kaikilla nollaa suuremmilla positiivisilla luvuilla. □

__esim__ Todista, että kaikkien parittomien lukujen summa on luvun neliö.

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

1° Perusaskel: $n = 1$:

$$2\cdot 1 - 1 = 1^2$$
$$1 = 1 \Rightarrow \text{tosi}$$

2° Induktioaskel:
a) Tehdään induktio-oletus $n=k$:

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2k-1)}=k^2$$

b) Induktioväite:
Osoitetaan, että kaava on oikea, kun $n = k+1$

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2k-1)}_{\text{ind. oletuksen nojalla}}+\left(2(k+1)-1\right) = (k+1)^2$$

$$k^2 + \left(2(k+1)-1\right) = (k+1)^2$$
$$k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2+2k+1$$
$$k^2+2k+1 = k^2+2k+1$$

Johtopäätös: Koska kaava on ensimmäisen kohdan mukaan voimassa, kun $n=1$, se on toisen kohdan mukaan myös seuraavalla arvolla $n = 1+1 = 2$, ja edelleen $n = 2+1 = 3$ jne. eli kaikilla nollaa suuremmilla positiivisilla luvuilla. □

esim 2 Osoita induktiolla, että

$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

1° Perusaskel, kun $n=1$

$$1(1+2) = \frac{1}{6}\cdot 1\,(1+1)(2\cdot 1+7)$$

$$3 = 3 \Rightarrow \text{tosi}$$

2° Induktioaskel

a) ind. oletus, kun $n=k$

$$\underbrace{1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + k(k+2)} = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)$$

b) ind. väite, kun $n=k+1$:

$$\underbrace{1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \ldots + k(k+2)}_{\text{ind. ol. nojalla}} + (k+1)(k+1+2) = \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+7)$$

$$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7) + (k+1)(k+3) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)$$