EUKLEIDEEN ALGORITMI JA DIOFANTOKSEN YHTÄLÖ

E1 Määritä lukujen 69 ja 84 suurin yhteinen tekijä ja ilmaise se lukujen 69 ja 84 lineaarikombinaationa. (lineaariyhdistelmä)

Ratk. Haetaan 69 ja 84 syt Eukleideen algoritmin avulla.

$$
\begin{aligned}
84 &= 1\cdot \underline{69} + 15 & \qquad 15 &= 84 - 1\cdot 69 \\
69 &= 4\cdot \underline{15} + 9 & 9 &= 69 - 4\cdot 15 \\
15 &= 1\cdot \underline{9} + 6 & \underline{6} &= 15 - 1\cdot 9 \\
9 &= 1\cdot 6 + \boxed{3} & 3 &= 9 - 1\cdot 6 \\
6 &= 2\cdot 3 + 0
\end{aligned}
$$

"kaikki rivit, missä on jakojäännöstä, käytetään"

$$
\begin{aligned}
3 &= 9 - 1\cdot \underline{6} \\
&= 9 - 1\cdot(15 - 1\cdot 9) \\
&= \underline{9} - 1\cdot 15 + \underline{1\cdot 9} \\
&= 2\cdot 9 - 1\cdot 15 \\
&= 2\cdot(69 - 4\cdot 15) - 1\cdot 15 \\
&= 2\cdot 69 \underline{- 8\cdot 15} \underline{- 1\cdot 15} \\
&= 2\cdot 69 - 9\cdot 15 \\
&= 2\cdot 69 - 9(84 - 1\cdot 69) \\
&= \underline{2\cdot 69} - 9\cdot 84 + \underline{9\cdot 69} \\
&= 11\cdot 69 - 9\cdot 84
\end{aligned}
$$

$$3 = \boxed{11}\cdot 69 + \boxed{(-9)}\cdot 84$$

Diofantoksen yhtälö

E1 a) $2x + 5y = 9$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (tai $\begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$ tai $\begin{matrix} x = -3 \\ y = 3 \end{matrix}$)

b) $\cancel{2}x + \cancel{5}y = 27$

$2x + 5y = 9 \quad | \; x = 2, y = 1$

$2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9 \quad | \cdot 3$

$2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 27$

Ei saa koskea alkuper. kertoimiin !

V: $x = 6$ ja $y = 3$

E2 $4x - 2y = 3$ ← pariton

$\underbrace{2(2x - y)}_{\text{2:lla jaollinen, parillinen}} = 3$

Yhtälöllä ei ole näin ollen ratkaisua.

E3 Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$4x - 15y = 3$

- Eukleideen algoritmi
- syt (a,b)
- lineaarikombinaatio (yhdistelypä) (E3 kirjassa)
- muokataan saatua yhtälöä alkuperäisen yhtälön kaltaiseksi
- (x_0, y_0) yksittäinen ratkaisu
- kaikki ratkaisut

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \dfrac{b}{\text{syt}(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \dfrac{a}{\text{syt}(a,b)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

MAOL s. 47

$4x - 15y = 3$

Eukleideen algoritmi

$15 = 3 \cdot 4 + 3 \quad \leftarrow \quad 3 = 15 - 3 \cdot 4$

$4 = 1 \cdot 3 + 1 \quad \leftarrow \quad 1 = 4 - 1 \cdot 3$

$3 = 3 \cdot 1 \boxed{+0}$

syt$(15,4) = 1$ lukujen 4 ja 15 lineaarikombinaationa.

$1 = 4 - 1 \cdot 3$

$= 4 - 1 \cdot (15 - 3 \cdot 4)$

$= 4 - 1 \cdot 15 + 3 \cdot 4$

"kaikki rivit käytetään"

"poista sulkeet"

"yhdistä samanmuotoiset termit"

$1 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 15 \quad | \cdot 3$

$3 = 12 \cdot 4 - 3 \cdot 15$

$4 \cdot 12 - 15 \cdot 3 = 3 \quad | \; 4x - 15y = 3$

V: $\begin{cases} x = 12 \\ y = 3 \end{cases}$ yksittäisratkaisu

E2 Ratkaise Diofantoksen yhtälö kirjoita tähän

$4x - 15y = 3$

Ratk. – Eukleideen algoritmi
– syt (a, b)
– lineaarikombinaatio (lineaariyhdistely)
– muokataan saatua yhtälöä alkuperäiseen yhtälön kaltaiseksi
– (x_0, y_0) yksittäinen ratkaisu
– kaikki ratkaisut

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \frac{b}{syt(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \frac{a}{syt(a,b)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eukleideen ratkaisu $\boxed{4x - 15y = 3}$

$15 =$
$4 =$
$3 =$

syt (15, 4) = 1 lukujen 4 ja 15 lineaarikombinaationa:

$1 =$

$1 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 15 \quad | \cdot 3$
$3 = 4 \cdot 12 - 3 \cdot 15$
$4 \cdot 12 - 15 \cdot 3 = 3$

$4x - 15y = 3$
$ax + by = c$

yksittäinen ratkaisu

$$\begin{cases} x_0 = 12 \\ y = 3 \end{cases}$$

yleinen ratkaisu

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \frac{b}{syt(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \frac{a}{syt(a,b)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = 12 + n \cdot \frac{-15}{1} \\ y = 3 - n \cdot \frac{4}{1} \end{cases}$$

V: $\begin{cases} x = 12 - 15n \\ y = 3 - 4n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$

E2 Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$4x - 15y = 3$$

Ratk.
- Eukleideen algoritmi
- syt (a, b)
- lineaarikombinaatio (lineaariyhdistely)
- muokataan saatua yhtälöä alkuperäisen yhtälön kaltaiseksi
- (x_0, y_0) yksittäinen ratkaisu
- kaikki ratkaisut

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \dfrac{b}{\text{syt}(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \dfrac{a}{\text{syt}(a,b)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eukleideen ratkaisu $\boxed{4x - 15y = 3}$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$ $\qquad 3 = 15 - 3 \cdot 4 \leftarrow$

$4 = 1 \cdot 3 + \boxed{1}$ $\qquad 1 = 4 - 1 \cdot 3 \leftarrow$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

syt $(15, 4) = 1$ lukujen 4 ja 15 lineaarikombinaationa.

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 1 \cdot 3 \\ &= 4 - 1 \cdot (15 - 3 \cdot 4) \\ &= \underline{4} - 1 \cdot 15 + \underline{3 \cdot 4} \end{aligned}$$

$1 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 15 \quad | \cdot 3$

$3 = 4 \cdot 12 - 3 \cdot 15$

$4 \cdot \underline{12} - 15 \cdot \underline{3} = 3$ $\qquad 4x - 15y = 3$

$\qquad ax + by = c$

yksittäinen ratkaisu

$$\begin{cases} x_0 = \underline{12} \\ y = \underline{3} \end{cases}$$

yleinen ratkaisu

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \dfrac{b}{\text{syt}(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \dfrac{a}{\text{syt}(a,b)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \underline{12} + n \cdot \dfrac{-15}{1} \\ y = \underline{3} - n \cdot \dfrac{4}{1} \end{cases}$$

V: $\begin{cases} x = 12 - 15n \\ y = 3 - 4n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Esim 2

Veikko oli velkaa Teuvolle 7 euroa. Veikolla oli ainoastaan 2 euron kolikoita ja Teuvolla ainoastaan 5 euron seteleitä. Maksu tapahtui siten, että he vaihtoivat rahansa keskenään. Paljonko rahaa oli kummallakin, kun heillä oli rahaa vähemmän kuin 30 euroa?

E2 Veikko → Teuvolle −7e
Veikolla 2e kolikoita
Teuvolla 5e seteleitä

Rahaa oli vähemmän kuin 30 euroa?

Ratk. V 2e kol. x kpl
T 5e set. y kpl

Velan maksu
Diofantoksen yhtälö

$$2x - 5y = 7$$

syt $(2,5) = 1$

$5 = 2\cdot 2 + 1$ $\quad 1 = 5 - 2\cdot 2$

$2 = 2\cdot 1 + 0$

$$1 = 5 - 2\cdot 2$$

$2\cdot(-2) + 5\cdot 1 = 1 \quad |\cdot 7 \qquad 2x - 5y = 7$

$2\cdot(-14) - 5\cdot(-7) = 7$

eräs yksittäinen ratkaisu $x = -14$ ja $y = -7$

yleinen ratkaisu

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{\text{syt}(a,b)} \\ y = y_0 - \dfrac{a}{\text{syt}(a,b)} \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = -14 + n\cdot\dfrac{-5}{1} \\ y = -7 - n\cdot\dfrac{2}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -14 - 5n \\ y = -7 - 2n \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}$$

$2x + 5y < 30$ | $x =$

$2\cdot(-14-5n) + 5(-7-2n) < 30$ | $y =$

$\vdots$

$$n > -4\tfrac{13}{20}, \ n \in \mathbb{Z}$$

$n: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

V & T oli rahaa .

$n = -4$

$2x = 2\cdot(-14 - 5\cdot(-4)) = 12$ käy

$5y = 5\cdot(-7 - 2\cdot(-4)) = 5$ käy $\quad$ V

$n = -3$

$2x = 2\cdot(-14 - 5\cdot(-3)) = 2$ käy

$5y = 5\cdot(-7 - 2(-3)) = -5$ ei käy

V: Veikolla oli rahaa 12 euroa ja Teuvolla oli 5 euroa.