Kertaus

K1. **a)** $72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

$252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$\text{syt}(72, 252) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) $252 = 72 \cdot 3 + 36$
$72 = 36 \cdot 2$

$\text{syt}(72, 252) = 36$

c) $\text{pym}(72, 252) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 72 \cdot 7 = (70 + 2) \cdot 7 = 490 + 14 = 504$

K2. **a)** $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

$41405 = 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2$

$\text{syt}(1001, 41405) = 7 \cdot 13 = 91$

b) $41405 = 1001 \cdot 41 + 364$
$1001 = 364 \cdot 2 + 273$
$364 = 273 \cdot 1 + 91$
$273 = 91 \cdot 3$

$\text{syt}(1001, 41405) = 91$

K3. Alkuluvut voidaan määrittää esimerkiksi Eratostheneen seulalla: Eliminoidaan (eli väritetään/vedetään yli) ensin luvulla 2 jaolliset kokonaisluvut. Jäljelle jääneistä luvuista pienin on 3, joka on siis alkuluku. Eliminoidaan sitten luvulla 3 jaolliset kokonaisluvut. Jäljellä olevista kokonaisluvuista suurin 5, joka on siis alkuluku. Eliminoidaan sitten luvulla 5 jaolliset kokonaisluvut jne.
Kun on suoritettu vastaava päättelyketju loppuun saakka, niin jäljelle jääneet värittämättömät luvut ovat kysyttyjä alkulukuja:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Kysytyt luvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ja 47.

K4. **a)** $\frac{143}{4}=\frac{120+20+3}{4}=30+5+\frac{3}{4}=35+\frac{3}{4}$

Jakoyhtälöksi saadaan
$143 = 4 \cdot 35 + 3$.

b) $\frac{1892}{3}=\frac{1800+90+2}{3}=600+30+\frac{2}{3}=630+\frac{2}{3}$

Jakoyhtälöksi saadaan
$1892 = 3 \cdot 630 + 2$.

K5. $7653 = 7000 + 630 + 21 + 2 = 7 \cdot 1000 + 7 \cdot 90 + 7 \cdot 3 + 2$

Koska luku 2 ei ole jaollinen luvulla 7, luku 7653 ei ole jaollinen luvulla 7.

K6. **a)** Ratkaistaan ensin syt(12, 45) Eukleideen algoritmilla.

$45 = 12 \cdot 3 + 9$
$12 = 9 \cdot 1 + 3$
$9 = 3 \cdot 3$
$\text{syt}(12, 45) = 3$

Koska luku 3 on jaollinen luvulla syt(12, 45) = 3, on yhtälöllä kokonaislukuratkaisuja.

Ratkaistaan sitten jakojäännökset.
$3 = 12 - 9 \cdot 1$
$9 = 45 - 12 \cdot 3$

Esitetään yhtälö muodossa syt(12, 45) = $12x + 45y$ jakojäännöksiä apuna käyttäen.

$3 = 12 - 9 \cdot 1$
$3 = 12 - (45 - 12 \cdot 3) \cdot 1$
$3 = 12 + 45 \cdot (-1) + 12 \cdot 3$
$3 = 12 \cdot 4 + 45 \cdot (-1)$

Siispä $x_0 = 4$ ja $y_0 = -1$ on yhtälön eräs ratkaisu.

Selvitetään vielä yhtälön yleinen ratkaisu.

$$x = x_0 + \frac{nb}{syt(a,b)} \qquad y = y_0 - \frac{na}{syt(a,b)}$$
$$x = 4 + \frac{45n}{3} \qquad y = -1 - \frac{12n}{3} \quad \text{, missä } n \in \mathbb{Z}\text{ .}$$
$$x = 4 + 15n \qquad y = -1 - 4n$$

b) a-kohdassa ratkaistiin, että syt(12, 45) = 3.

Koska luku 120 on jaollinen luvulla syt(12, 45) = 3, on yhtälöllä kokonaislukuratkaisuja.

a-kohdassa saatiin
$3 = 12 \cdot 4 + 45 \cdot (-1)$

Kerrotaan tämä yhtälö puolittain luvulla 40, jolloin saadaan
$120 = 12 \cdot 160 + 45 \cdot (-40)$.

Yhtälön $12x + 45y = 120$ eräs ratkaisu on siis $x_0 = 160$ ja $y_0 = -40$.

Selvitetään vielä yhtälön yleinen ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{nb}{\text{syt}(a,b)} & \qquad y &= y_0 - \frac{na}{\text{syt}(a,b)} \\
x &= 160 + \frac{45n}{3} & \qquad y &= -40 - \frac{12n}{3} \qquad \text{, missä } n \in \mathbb{Z}\text{ .} \\
x &= 160 + 15n & \qquad y &= -40 - 4n
\end{aligned}
$$

K7. Olkoon x aloittavien opiskelijoiden lukumäärä. Nyt tiedetään, että $800 \le x \le 1000$. Lisäksi tiedetään, että luvun x pitää olla jaollinen luvuilla 3, 7 ja 13, koska ilmoitetut osuudet ovat tarkkoja arvoja.

Voidaan siis kirjoittaa $x = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot k$, missä k on kokonaisluku.
Tästä saadaan $x = 273k$.

Jos $k = 1$, niin $x = 273 \cdot 1 = 273 < 800$ eli ei käy
Jos $k = 2$, niin $x = 273 \cdot 2 = 546 < 800$ eli ei käy
Jos $k = 3$, niin $x = 273 \cdot 3 = 819$, jolloin $800 \le x \le 1000$ eli kelpaa.
Jos $k = 4$, niin $x = 273 \cdot 4 = 1092 > 1000$ eli ei käy

Siispä opiskelijoiden määrän täytyy olla 819.

K8. **a)** Luvut 120 ja 156 ovat kongruentteja modulo 8 täsmälleen silloin, kun erotus $156 - 120$ on jaollinen luvulla 8.

$156 - 120 = 36$

Koska 36 ei ole jaollinen luvulla 8, niin luvut eivät ole kongruentteja modulo 8.

b) $204 - 172 = 32 = 8 \cdot 4$

Koska erotus $204 - 172$ on jaollinen luvulla 8, niin $172 \equiv 204 \pmod{8}$.

K9. **a)** Luku 21 on kongruentti kaikkien niiden lukujen kanssa, joilla on sen kanssa sama jakojäännös luvulla 6 jaettaessa.

$21 = 6 \cdot 3 + 3$

Siis $21 \equiv 3 \pmod{6}$.

Pienin luonnollinen luku on siis 3.

b) $542 = 6 \cdot 90 + 2$

Siis $542 \equiv 2 \pmod{6}$.

Pienin luonnollinen luku on 2.

K10. **a)** Ne luvut a, jotka ovat luvun 3 kanssa kongruentteja modulo 7, ovat muotoa $a = 3 + 7q$, jossa q on kokonaisluku.
Ratkaisuksi käy esimerkiksi luvut
$3 + 7 \cdot 3 = 24$,
$3 + 7 \cdot 4 = 31$ ja
$3 + 7 \cdot 5 = 38$.

b) Ratkaisuksi käy esimerkiksi luvut
$3 + 7 \cdot (-2) = -11$,
$3 + 7 \cdot (-3) = -18$ ja
$3 + 7 \cdot (-4) = -25$.

K11. **a)** Tiedetään, että $10 \equiv 1 \pmod 9$.

Nyt saadaan
$156 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \equiv 1^2 + 5 \cdot 1 + 6 = 12 \equiv 3 \pmod 9$
$764 = 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4 \equiv 7 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4 = 17 \equiv 8 \pmod 9$
$34 = 3 \cdot 10 + 4 \equiv 3 \cdot 1 + 4 = 7 \pmod 9$

Täten
$156 + 764 \cdot 34 \equiv 3 + 8 \cdot 7 = 3 + 56 = 59 \equiv 5 \pmod 9$

Jakojäännös luvulla 9 jaettaessa on 5.

b) $134 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 \equiv 1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 8 \equiv -1 \pmod 9$
$876 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6 \equiv 8 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 6 = 21 \equiv 3 \pmod 9$

Täten
$134^{1000} \cdot 876 \equiv (-1)^{1000} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3 \pmod 9$

Jakojäännös luvulla 9 jaettaessa on 3.

K12. Vuodessa on 365 päivää
$365 = 52 \cdot 7 + 1$

365 päivää on 52 täyttä viikkoa ja yksi päivä. Laura täyttää yhden vuoden keskiviikkona.

K13. **a)** Nyt lämpötila on −7 °C eli yli −15 °C. Siispä kaikki oppilaat ovat ulkona välitunnilla.

b) Tilanteesta, jossa ulkolämpötila on alle −15 °C, ei sanota koulun säännössä mitään eli tästä voi seurata, että kaikki oppilaat menevät tai eivät mene välitunnilla ulos. Nyt lämpötila on −19 °C eli alle −15 °C eli tilanteesta ei voida päätellä mitään.

c) Tilanteesta, jossa ulkolämpötila on alle −15 °C, ei sanota koulun säännössä mitään eli tästä voi myös seurata se, että kaikki oppilaat menevät välitunnilla ulos. Näin ollen ei voida päätellä mitään siitä, että kaikki oppilaat ovat ulkona välitunnilla.

K14. **a)** ”Jos kolmio on tasakylkinen, niin kolmio on suorakulmainen.”

Lause ei ole totta. Esimerkiksi kolmio, jonka kulmat ovat 20°, 20° ja 140° on tasakylkinen, muttei suorakulmainen.

b) ”Jos kolmio on suorakulmainen, kolmiossa on 90 asteen kulma.”

Lause on tosi. Jos kolmio on suorakulmainen, niin yksi sen kulmista on suuruudeltaan 90 astetta.

c) ”Jos kolmiossa on 90 asteen kulma, niin kolmio on suorakulmainen.”

Lause on tosi. Jos kolmion yhden kulman suuruus on 90 astetta, niin kolmio on suorakulmainen.

d) ”Kolmio on suorakulmainen täsmälleen silloin, kun kolmiossa on 90 asteen kulma.”

Lause on tosi. Lauseiden B ja C välillä on voimassa implikaatio molempiin suuntiin b- ja c-kohtien perusteella. Siispä niiden välillä on voimassa myös ekvivalenssi.

K15. Kirjoitetaan ensin lauseet symbolikielelle. Olkoon
A = ” KeuPa voittaa” ja
B = ” KeuPa nousee Liigaan”.

Nyt
$A \Rightarrow B$ = ”jos KeuPa voittaa, se nousee Liigaan” ja
$\neg A \vee B$ = ” KeuPa ei voita tai Keupa nousee Liigaan”.

Tutkitaan lauseiden totuusarvoja totuustaulukon avulla.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Lauseiden totuusarvot ovat aina samat eli lauseet ovat keskenään ekvivalentit.

K16. Tutkitaan lauseen totuusarvoa totuustaulun avulla.

A	B	C	$A \vee C$	$B \Rightarrow (A \vee C)$	$A \wedge (B \Rightarrow (A \vee C))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Lause on tosi, kun A on tosi.

K17. a)

A	B	$A \wedge B$	$A \Rightarrow (A \wedge B)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause ei ole aina tosi eli implikaatio ei ole tautologia.

b)

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause on tosi kaikilla totuusarvoilla. Siispä implikaatio on tautologia.

c)

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause on tosi kaikilla totuusarvoilla. Siispä implikaatio on tautologia.

d)

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

Huomataan, että lause ei ole aina tosi eli implikaatio ei ole tautologia.

K18. Kirjoitetaan ensin lauseet symbolikielelle. Merkitään
D = ”Dima on rehti”,
E = ”Elmo on rehti” ja
F = ”Fanni on rehti”

Tällöin
$D \wedge E \wedge F$ = ”Olemme kaikki rehtejä.”
$(D \wedge \neg E \wedge \neg F) \vee (\neg D \wedge E \wedge \neg F) \vee (\neg D \wedge \neg E \wedge F)$ = ”Täsmälleen yksi meistä on rehti.”

Tutkitaan lauseiden totuusarvoja totuustaulukolla.

			D:n väite	E:n väite
D	E	F	kaikki rehtejä	täsmälleen yksi rehti
1	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Huomataan, että ainoa rivi, jolla henkilön ja hänen väitteensä totuusarvo on sama, on toisiksi alin rivi. Tämä vastaa tilannetta, jossa Dima ja Fanni ovat retkuja ja Elmo rehti.

K19. Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla.

Esimerkiksi, kun $x = 1$ ja $y = -1$, niin
$|x + y| = |1 + (-1)| = 0$ ja
$|x| + |y| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$

Siispä tällöin $|x + y| \neq |x| + |y|$.

Näin ollen yhtälö ei pidä paikkaansa kaikille reaaliluvuilla x ja y.

K20. *Oletus*: a on jaollinen luvulla b eli $a = kb$, missä $a, b, k \in \mathbb{Z}$.
Väite: a^2 on jaollinen luvulla b^2 eli $a^2 = nb^2$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Todistetaan väite.
Oletuksesta saadaan
$a^2 = a \cdot a = kb \cdot kb = (k \cdot k) \cdot b^2$,

missä $k \cdot k$ on kahden kokonaisluvun tulona kokonaisluku.

Siispä a^2 on jaollinen luvulla b^2.

K21. *Oletukset:* $n \in \mathbb{Z}$ ja $7n + 9$ on parillinen.
Väite: n on pariton.

Todistetaan väite epäsuoraa todistusta käyttäen.
Jos väite on epätosi, niin n on parillinen eli $n = 2p$, missä $p \in \mathbb{Z}$.

Tästä seuraa
$7n + 9 = 7 \cdot 2p + 9 = 7 \cdot 2p + 8 + 1 = 2(7p + 4) + 1$,
missä $7p + 4$ on kokonaisluku, koska p on kokonaisluku.

Nyt $7n + 9$ olisi pariton luku. Tämä on ristiriidassa oletuksen ”$7n + 9$ on parillinen” kanssa. Siispä n ei voi olla parillinen ja sen tulee siis olla pariton.

K22. **a)** Väite pitää paikkansa. Todistetaan väite suoralla todistuksella.

Oletus: a, b ja c ovat jaollisia kuudella $a = 6m$, $b = 6n$ ja $c = 6l$, missä $n, m, l \in \mathbb{Z}$.
Väite: Lukujen a, b ja c keskiarvo on parillinen.

Todistetaan väite.
Oletuksesta saadaan lukujen keskiarvoksi

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{6n+6m+6l}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}(n+m+l)}{\cancel{3}} = 2(n+m+l),$$

missä $n + m + l$ on kolmen kokonaisluvun summana kokonaisluku.

Siispä kolmen 6:lla jaollisen luvun keskiarvo on parillinen.

b) Väite ei pidä paikkansa.
Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla.

Esimerkiksi luku $18 = 9 \cdot 2$ on jaollinen luvulla 9. Kuitenkin nyt tämän luvun neliöjuuri $\sqrt{18} = 4{,}2426...$ ei ole kokonaisluku. Siispä se ei ole myöskään jaollinen luvulla 3.

K23. Halutaan siis osoittaa, että $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^n=\frac{1}{3}(4^{n+1}-4)$ kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

Alkuaskel
Kun $n = 1$, summassa on vain yksi termi $4^1 = 4$.
Tällöin $\frac{1}{3}(4^{1+1}-4)=\frac{1}{3}(4^2-4)=\frac{1}{3}(16-4)=\frac{1}{3}\cdot 12=4$
Väite on siis tosi, kun $n = 1$ eli alkuaskel on todistettu.

Induktioaskel
Induktio-oletus: $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^k=\frac{1}{3}(4^{k+1}-4)$.

Induktioväite: $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^k+4^{k+1}=\frac{1}{3}(4^{(k+1)+1}-4)$

Osoitetaan, että induktioväite seuraa induktio-oletuksesta.

$$\underbrace{4^1+4^2+4^3+\ldots+4^k}_{\substack{\textit{induktio–oletus}\\ =\frac{1}{3}(4^{k+1}-4)}}+4^{k+1}$$

$$=\frac{1}{3}(4^{k+1}-4)+4^{k+1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 4^{k+1}-\frac{1}{3}\cdot 4+4^{k+1}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 4^{k+1}-\frac{1}{3}\cdot 4$$

$$=\frac{1}{3}(4\cdot 4^{k+1}-4) \qquad \| \, a^n a^m=a^{n+m}$$

$$=\frac{1}{3}(4^{(k+1)+1}-4)$$

Näin ollen induktioväite pätee.

Nyt sekä alkuaskel että induktioaskel on todistettu.

Induktioperiaatteen perusteella $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^n=\frac{1}{3}(4^{n+1}-4)$, kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$