Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Päättely ei ole tehty oikein.

Jakolaskua 29 : 4 vastaava jakoyhtälö olisi $29 = 4 \cdot 7 + 1$ eli jakojäännös olisi 1. Jakojäännös on aina jakajaa pienempi ei-negatiivinen kokonaisluku.

b) Päättely on tehty oikein.

Jakoyhtälössä $29 = 6 \cdot 4 + 5$ jakojäännös 5 on jakajaa pienempi ei-negatiivinen kokonaisluku.

c) Päättely on tehty oikein.

Jos $54 = 6 \cdot 9$, niin $54 : 6 = 9$ ja $54 : 9 = 6$. Sekä 6 että 9 ovat siis luvun 54 tekijöitä.

d) Päättely ei ole tehty oikein.

4,5 ei voi olla luvun 54 tekijä, sillä tekijöiden tulee olla kokonaislukuja. Tällöin myöskään 12 ei ole luvun 54 tekijä.

2. Luvut a ja b ovat kongruentteja modulo n, jos $a = b + nq$ jollakin kokonaisluvulla q. Näin ollen saadaan pareiksi:

A–II
B–III
C–I

3. **a)** Luvuilla 3 ja 8 ei ole yhteisiä tekijöitä. Luku 15120 on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 8, jos se on jaollinen luvulla $3 \cdot 8 = 24$.

Selvitetään jaollisuus luvulla 24 laskemalla jakolasku 15120 : 24 allekkain.

$$\begin{array}{l} \;\;15120 : 24 = 630 \\ \underline{-144}\,\text{xx} \\ \;\;\;\;\;\;720 \\ \;\;\;\;\underline{-720} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Jakolasku meni tasan eli luku 15120 on jaollinen luvulla 24 ja siten myös luvuilla 3 ja 8.

b) Kirjoitetaan kertolaskuissa esiintyvien lukujen alkulukuhajotelmat.

$80 = 2 \cdot 40 = 2 \cdot 2 \cdot 20 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5$
$315 = 3 \cdot 105 = 3 \cdot 5 \cdot 21 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
$240 = 10 \cdot 24 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

Nyt saadaan:
$80 \cdot 315 = (2^4 \cdot 5) \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ ja
$105 \cdot 240 = (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^4 \cdot 3 \cdot 5) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Huomataan, että lukujen alkulukuhajotelmat ovat samat. Siispä luvut ovat yhtä suuret.

4. Jos $x + y = -7$, niin $y = -7 - x$.

Nyt saadaan vastauslukupareiksi esimerkiksi:

Kun $x = 0$, niin $y = -7 - 0 = -7$.
Kun $x = 1$, niin $y = -7 - 1 = -8$.
Kun $x = -3$, niin $y = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$.

Esimerkiksi lukuparit $(0, -7)$, $(1, -8)$ ja $(-3, -4)$ kelpaavat yhtälön ratkaisuiksi.

5. **a)** Luku on jaollinen luvulla 3, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3. Nyt numeroiden summaksi saadaan

$$\begin{aligned}&1 + 2 + n + 3 + 4 + n + 5 + 6 + 7 + n + 8 + 9 + n\\&= 45 + 4n\\&= 45 + 3n + n\\&= 3(15 + n) + n.\end{aligned}$$

Luku $3(15 + n)$ on jaollinen luvulla 3, joten $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun n on jaollinen luvulla 3. Siispä $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$ tai $n = 9$.

b) Luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 6 jos se on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 2.

a-kohdan mukaan luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3, kun $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$ tai $n = 9$. Lisäksi luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 2 vain ja ainoastaan, jos sen viimeinen numero n on parillinen.

a-kohdan vastauksista parillisia ovat vain luvut, joissa $n = 0$ tai $n = 6$. Siispä luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 6, kun $n = 0$ tai $n = 6$.

c) Luku on jaollinen luvulla 9, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 9. Numeroiden summa on a-kohdan perusteella $45 + 4n$.

Luku 45 on jaollinen luvulla 9, joten luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 9 täsmälleen silloin, kun $4n$ on jaollinen luvulla 9. Siispä $n = 0$ tai $n = 9$.

6. Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla.
Olkoon $n = 5$. Tällöin

$$n^2 - n + 5 = 5^2 - 5 + 5 = 5^2 = 5 \cdot 5.$$

Nyt luku 5^2 ei ole alkuluku, koska se voidaan esittää kahden lukua 1 suuremman kokonaisluvun tulona. Näin ollen väite ei päde jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja on siis väärä.

7. Tutkitaan luvun kongruenssia modulo 10.

$843 = 84 \cdot 10 + 3$ eli $843 \equiv 3 \pmod{10}$
$3^2 = 9 = 1 \cdot 10 - 1$ eli $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$

Nyt
$843^{1000} \equiv 3^{1000} \equiv (3^2)^{500} \equiv (-1)^{500} \equiv 1 \pmod{10}$

Jakojäännös on siis 1.

8. Induktioperiaatteen perusteella riittää näyttää, että
1) $a_1 \equiv 1 \pmod 4$
2) jos $a_n \equiv 1 \pmod 4$, niin tästä seuraa, että myös $a_{n+1} \equiv 1 \pmod 4$.

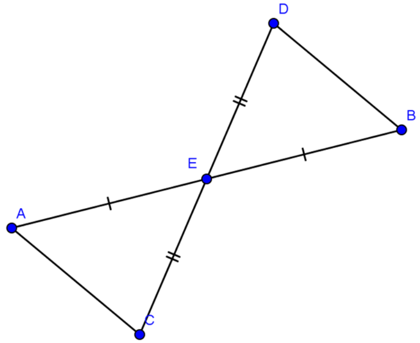
Alkuaskel
Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja $1 \equiv 1 \pmod 4$, joten alkuaskel on todistettu.

Induktioaskel
Induktio-oletus: $a_k \equiv 1 \pmod 4$.
Induktioväite: $a_{k+1} \equiv 1 \pmod 4$.
Lukujonon määritelmän perusteella
$a_{k+1} = 3a_k + 2$.

Induktio-oletuksen perusteella saadaan
$3a_k + 2 \equiv 3 \cdot 1 + 2 = 5 \equiv 1 \pmod 4$.

Siispä $a_n \equiv 1 \pmod 4$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

9. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kolmiosta *ACE* ja *BDE* havaitaan:

1. sivut $AE = EB$, koska piste E on janan AB keskipiste.
2. $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$ koska ne ovat toistensa ristikulmia.
3. sivut $CE = ED$, koska piste E on janan CD keskipiste.

sks-lauseen perusteella kolmiot *ACE* ja *BDE* ovat yhteneviä.

10. **a)** $F_1 = 1$
$F_2 = 1$
$F_3 = 1 + 1 = 2$
$F_4 = 1 + 2 = 3$
$F_5 = 2 + 3 = 5$
$F_6 = 3 + 5 = 8$

b) Osoitetaan induktiolla, että kaava $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ pätee kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots$

Alkuaskel
Kun $n = 2$, on $F_{2-1} \cdot F_{2+1} - F_2^2 = F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ ja $(-1)^2 = 1$.
Alkuaskel pätee.

Induktioaskel
Induktio-oletus: $F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$
Induktioväite: $F_{(k+1)-1} \cdot F_{(k+1)+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ eli
$F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$

Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite.

Kirjoitetaan Fibonaccin lukujonon määritelmän perusteella
$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ ja $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$

$$
\begin{aligned}
F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2 \\
&= F_k((F_k + F_{k-1}) + F_k) - (F_k + F_{k-1})^2 \\
&= F_k(2F_k + F_{k-1}) - (F_k + F_{k-1})^2 \\
&= 2F_k^2 + F_k \cdot F_{k-1} - F_k^2 - 2F_k \cdot F_{k-1} - F_{k-1}^2 \\
&= F_k^2 - F_{k-1}(F_k + F_{k-1}) \quad \| \ F_k + F_{k-1} = F_{k+1} \\
&= -1 \cdot (F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2) \quad \| \ \text{induktio-oletus} \\
&= -1 \cdot (-1)^k \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Viisinumeroinen luku *abcde* voidaan esittää summana
$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$,

Luvut 10 000, 1000, 100, 10 ja 1 eivät ole jaollisia luvulla 7, joten luku *abcde* on jaollinen luvulla 7, vain jos jokainen kertoimista *a, b, c, d* ja *e* on jaollinen luvulla 7. Ainoat yksinumeroiset luvut, jotka ovat jaollisia luvulla 7, ovat 7 ja 0. Näin ei siis pystytty päättelemään viidestä eri numerosta koostuvaa lukua.

Kirjoitetaan lukua *abcde* vastaava summa toisella tavalla siten, että muodostetusta summasta pystytään tekemään päättely. Kymmeniä tuhansia ja tuhansia kuvaavat luvut $a \cdot 10000$ ja $b \cdot 1000$ voidaan kirjoittaa tulona $(a \cdot 10 + b) \cdot 1000$. Vastaavalla tavalla kymmeniä ja ykkösiä vastaavista luvuista saadaan tulo *de*.

$$(a \cdot 10 + b) \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = ab \cdot 1000 + c \cdot 100 + de$$

Nyt lukujen *ab*, *c* ja *de* tulee olla jaollisia luvulla 7.

Lisäksi haluttiin, että kaikki numerot *a, b, c, d* ja *e* olivat eri numeroita. Voidaan siis valita esimerkiksi $ab = 14$, $c = 7$ ja $de = 28$.

Luku 14728 on eräs ehdot täyttävä luku.

b) Viisinumeroinen luku *abcde* voidaan esittää esimerkiksi summana
$ab \cdot 1000 + c \cdot 100 + de$,
missä *ab* on kaksinumeroinen luonnollinen luku, *c* on yksinumeroinen luonnollinen luku ja *de* on kaksinumeroinen luonnollinen luku.

Luku *abcde* on jaollinen luvulla 17, jos jokainen summattavista $ab \cdot 1000$, $c \cdot 100$ ja *de* on jaollinen luvulla 17. Lisäksi haluttiin, että kaikki numerot *a, b, c, d* ja *e* olivat eri numeroita. Voidaan siis valita esimerkiksi $ab = 17$, $c = 0$ ja $de = 34$.

Luku 17034 on eräs ehdot toteuttava luku.

12. Tehdään luvun 308 alkulukuhajotelma.
$308 = 2 \cdot 154 = 2 \cdot 2 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$

Luku 308 on siis jaollinen luvuilla
1,
2,
7,
11,
$2 \cdot 2 = 4$,
$2 \cdot 7 = 14$,
$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$,
$2 \cdot 11 = 22$,
$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$,
$7 \cdot 11 = 77$,
$2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$ ja
308.

13. Selvitetään syt(588, 420).

$588 = 420 \cdot 1 + 168$
$420 = 168 \cdot 2 + 84$
$168 = 84 \cdot 2$

Siispä syt(588, 420) = 84.

Ratkaistaan sitten jakojäännökset.

$168 = 588 - 420 \cdot 1$
$84 = 420 - 168 \cdot 2$

Esitetään syt(588, 420) muodossa $588x + 420y$ jakojäännöksiä apuna käyttäen.

$84 = 420 - 2 \cdot 168$
$84 = 420 - 2 \cdot (588 - 420 \cdot 1)$
$84 = -2 \cdot 588 + 3 \cdot 420$
$84 = 588 \cdot (-2) + 420 \cdot 3$

14. **a)**

A	B	A □ B	A □ (A □ B)
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

b) Lause A □ (A □ B) on tosi vain ja ainoastaan, kun A ja B ovat tosia. Täten se on ekvivalentti lauseen $A \wedge B$ kanssa.

15. Jos $k \equiv n + 23 \pmod{29}$, niin luvuilla k ja $n + 23$ on sama jakojäännös luvulla 29 jaettaessa.

G on 7. aakkonen eli $k = 7$.
Nyt saadaan $7 \equiv 7 + 29 = 36 = 13 + 23 \pmod{29}$.

Näin ollen $n + 23 = 36$, josta saadaan $n = 13$.
Ensimmäinen kirjain on M.

X on 24. aakkonen eli $k = 24$.
Nyt saadaan $24 = 1 + 23 \pmod{29}$.

Nyt $n = 1$, eli toinen ja kolmas kirjain on A.

F on 6. aakkonen, eli $k = 6$.
Nyt saadaan $6 \equiv 6 + 29 \equiv 35 \pmod{29}$.
Nyt $n = 12$, joten neljäs kirjain on siis L

C on 3. aakkonen eli $k = 3$.
Nyt saadaan $3 \equiv 3 + 29 \equiv 32 \pmod{29}$.
Nyt $n = 9$, joten viimeinen kirjain on I.

Purettu viesti on MAALI.

16. **a)** *Oletus*: a ja b ovat parittomia eli $a = 2n + 1$ ja $b = 2m + 1$, jossa $n, m \in \mathbb{Z}$.

Väite: $a + b$ on parillinen.

Todistus: Oletuksen avulla saadaan
$a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$,
missä $n + m + 1$ on kokonaislukujen summana kokonaisluku.

Siispä $a + b$ on parillinen.

b) *Oletus*: a ja b ovat parittomia eli $a = 2n + 1$ ja $b = 2m + 1$, jossa $n, m \in \mathbb{Z}$.

Väite: ab on pariton.

Todistus: Oletuksen avulla saadaan
$ab = (2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$,
missä $2nm + n + m$ on kokonaisluku, koska n ja m ovat kokonaislukuja.

Siispä ab on pariton.

17. Luku a on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun se on jaollinen luvuilla 2 ja 3.

$n^3 + 6n^2 - 7n = n(n - 1)(n + 7)$

Luvut n ja $n - 1$ ovat peräkkäiset kokonaisluvut, joten toinen niistä on varmasti parillinen, jolloin luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 2.

Jos n tai $n - 1$ on kolmella jaollinen, on luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ jaollinen luvulla 3.

Koska joka kolmas luku on kolmella jaollinen ja jos n tai $n - 1$ ei ole kolmella jaollinen, niin $n + 1$ on varmasti kolmella jaollinen.
Tällöin $n + 7 = (n + 1) + 6 = 3q + 6 = 3(q + 2)$ on kolmella jaollinen.
Näin ollen jokin luvuista n, $n + 1$ tai $n + 7$ on kolmella jaollinen.

Luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on siis kuudella jaollinen.

TOISIN:

Kun luonnollinen luku n jaetaan luvulla 6, jakojäännös voi olla vain 0, 1, 2, 3, 4 tai 5. Tarkastellaan nämä eri vaihtoehdot erikseen korvaamalla n omalla jakojäännöksellään.

1) $n \equiv 0 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{6}$

2) $n \equiv 1 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{6}$

3) $n \equiv 2 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 \equiv 18 \equiv 0 \pmod{6}$

4) $n \equiv 3 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \pmod{6}$

5) $n \equiv 4 \equiv -2 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) \equiv 30 \equiv 0 \pmod{6}$

6) $n \equiv 5 \equiv -1 \pmod{6}$:
$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) \equiv 12 \equiv 0 \pmod{6}$

On siis osoitettu, että $n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 0 \pmod{6}$ olipa n mikä tahansa luonnollinen luku. Näin ollen luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 6 aina, kun n on luonnollinen luku.

18. **a)** Summa $n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots +(n + k)$ on aritmeettinen summa, sillä jokainen yhteenlaskettava on aina yhden suurempi kuin edellinen. Jonossa $a_1 = n$ ja $d = 1$ ja siinä on $k + 1$ yhteenlaskettavaa.
$a_{k+1} = n + k$

Summa saadaan laskettua aritmeettisen summan kaavalla

$$S_{k+1} = (k+1)\frac{n+(n+k)}{2} = \frac{(k+1)(2n+k)}{2}.$$

Saadaan yhtälö $\frac{(k+1)(2n+k)}{2} = 1007$, josta

$(k + 1)(2n + k) = 2014.$

b) $2014 = 2 \cdot 1007 = 2 \cdot 19 \cdot 53$

Luvun 2014 alkutekijät ovat 2, 19 ja 53.

c) Yhtälön $(k + 1)(2n + k) = 2014$ toteuttavat sellaiset positiiviset kokonaisluvut k ja n, joille $k + 1$ ja $2n + k$ ovat luvun 2014 tekijät.

$k + 1$	k	$2n + k$	n
1	0	2014	$2n + 0 = 2014$ $n = 1007$
2	1	1007	503
19	18	106	44
53	52	38	−7
$2 \cdot 19 = 38$	37	53	8
$2 \cdot 53 = 106$	105	19	−43
$19 \cdot 53 = 1007$	1006	2	−502
$2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$	2013	1	−1006

Lukujen n ja k tulee olla positiivisia kokonaislukuja. a-kohdan yhtälön toteuttavat luvut $k = 1$ ja $n = 503$, $k = 18$ ja $n = 44$ sekä $k = 37$ ja $n = 8$.

19. Koska rekursiokaavassa jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, alkuaskeleessa täytyy tarkistaa, että kaava pätee kahdelle ensimmäiselle jäsenelle.

Alkuaskel
Kun $n = 1$, $a_1 = 5$ ja kun $n = 2$, $a_2 = 13$.
Kaavalla saadaan $a_1 = 2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$ ja $a_2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.
Alkuaskel on osoitettu.

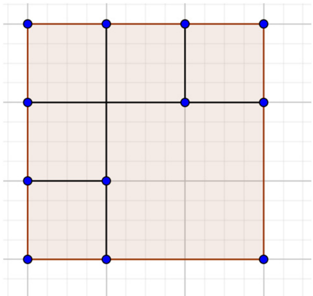
Induktioaskel
Induktio-oletus: $a_k = 2^k + 3^k$ ja $a_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$
Induktioväite: $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$

a_{k+1}
$= 5a_k - 6a_{k-1}$ ‖ induktio-oletus
$= 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1})$
$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 3^{k-1}$
$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1}$
$= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k$
$= 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k$
$= 2^{k+1} + 3^{k+1}$

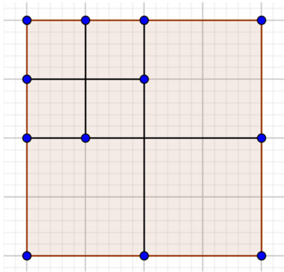
Siispä $a_n = 2^n + 3^n$ kaikilla $n \geq 1$.

20. **a)** Neliön saa jaettua kuuteen, seitsemään ja kahdeksaan neliöön seuraavilla tavoilla:

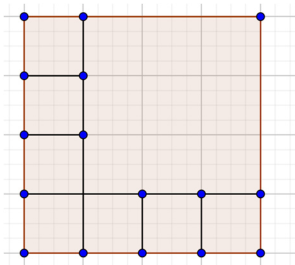
Kuuteen neliöön:
Jaetaan alkuperäisen neliön molemmat sivut kolmeen yhtä pitkään osioon. Piirretään näiden osioiden avulla neliön yhteen nurkkaan 2×2 -osion suuruinen neliö. Jäljellä oleva alue jakautuu viiteen 1×1 -osion suuruiseen neliöön.

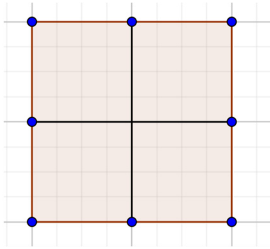


Seitsemään neliöön:
Jaetaan alkuperäisen neliön sivut kahteen yhtä pitkään osioon. Jaetaan tämän avulla neliö neljään yhtä suureen pienempää 1×1 -osion suuruiseen neliöön. Valitaan tämän jälkeen yksi näistä pienemmistä neliöistä ja jaetaan se samalla tekniikalla taas neljään pienempään neliöön.



Kahdeksaan neliöön:
Jaetaan alkuperäisen neliön molemmat sivut neljään yhtä pitkään osioon. Piirretään näiden osioiden avulla neliön yhteen nurkkaan 3×3 -osion suuruinen neliö. Jäljellä oleva alue jakautuu seitsemään 1×1 -osion suuruiseen neliöön.





b) Jos neliö on saatu jaettua n neliöön, niin näistä neliöistä voidaan valita yksi, joka edelleen jaetaan pienemmiksi neliöiksi.

Kun jakaminen tehdään kuvan tavalla, niin alkuperäisen neliön tilalle tuleekin nyt neljä pienempää neliötä. Neliöiden kokonaismäärä kasvaa siis kolmella. Täten neliöitä on tämän jälkeen kokonaisuudessaan $n + 3$ kappaletta. Jaakon havainto oli siis oikea.

c) Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua kuuteen neliöön. Kun tähän yhdistetään Jaakon havainto, niin neliö saadaan jaettua myös $6 + 3 = 9$, $9 + 3 = 12$, $12 + 3 = 15$ jne. neliöön.

Vastaavasti Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua seitsemään neliöön. Jaakon havaintoa käyttäen neliö voidaan jakaa myös $7 + 3 = 10$, $10 + 3 = 13$, $13 + 3 = 16$ jne. neliöön.

Vastaavasti Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua kahdeksaan neliöön. Jaakon havaintoa käyttäen neliö voidaan jakaa myös $8 + 3 = 11$, $11 + 3 = 14$, $14 + 3 = 17$ jne. neliöön.

Yhdistämällä edelliset havainnot huomataan, että neliö voidaan jakaa aina 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17… pienempään neliöön. Neliö voidaan siis jakaa n:ään pienempään neliöön mille tahansa luvulle $n \geq 6$.