

EUKLEIDEEN ALGORITMI JA DIOFANTOKSEN YHTÄLÖ

Esim. Määritä lukuja 69 ja 84 suurin yhteinen tekijä ja ilmaise se lukuja 69 ja 84 lineaarikombinaationa.

Ratk. Käytetään lukuja 69 ja 84 syt:n hakemiseen Eukleideen algoritmia.

$$84 = 1 \cdot \underline{69} + \underline{15}$$

$$\underline{69} = 4 \cdot \underline{15} + 9$$

$$15 = 1 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + \underline{3}$$

$$6 = 2 \cdot 3 + \underline{0}$$

$$15 = 84 - 1 \cdot 69 \quad \neq$$

$$9 = 69 - 4 \cdot 15 \quad \neq$$

$$6 = 15 - 1 \cdot 9 \quad \neq$$

$$3 = 9 - 1 \cdot \underline{6} \quad \neq$$

"kaikki rivit, missä on jakojäännös, käytetään"

$$\begin{aligned} \underline{3} &= 9 - 1 \cdot \underline{6} \\ &= 9 - 1 \cdot (15 - 1 \cdot 9) \\ &= \underline{9} - 1 \cdot 15 + \underline{1 \cdot 9} \\ &= 2 \cdot 9 - 1 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot (69 - 4 \cdot 15) - 1 \cdot 15 \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 69 - \underline{8 \cdot 15} - \underline{1 \cdot 15}$$

$$= 2 \cdot 69 - 9 \cdot 15$$

$$= 2 \cdot 69 - 9 \cdot (84 - 1 \cdot 69)$$

$$= \underline{2 \cdot 69} - 9 \cdot 84 + \underline{9 \cdot 69}$$

$$3 = 11 \cdot 69 - 9 \cdot 84 \quad \leftarrow$$

lineaarikombinaatio

Esim 2

Veikko oli velkaa Teuville 7 euroa. Veikolla oli ainoastaan 2 euron kolikoita ja Teuvolla ainoastaan 5 euron seteleitä. Maksu tapahtui siten, että he vaihtoivat rahansa keskenään. Paljonko rahaa oli kummallakin, kun heillä oli rahaa vähemmän kuin 30 euroa?

Ratk. Veikko 2 € kolikot x kpl
 Teuvo 5 € setelit y kpl
 Velan maksu $2x - 5y = 7$
 Diofantoksen yhtälö

$\text{sytt}(2,5)$

$$\begin{array}{l} 5 = 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 = 1 \cdot 2 + 0 \end{array} \quad \uparrow \quad 1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$\text{sytt}(2,5) = 1$

$1 = 5 - 2 \cdot 2$ muokataan yhtälön
 $2 \cdot (-14) - 5 \cdot (-7) = 7$ | $2x - 5y = 7$
 Oros ylös. rath. on $x_0 = -14$ ja $y_0 = -7$.

Yleinen ratkaisu

$$\begin{cases} x = x_0 + n \cdot \frac{b}{\text{sytt}(a,b)} \\ y = y_0 - n \cdot \frac{a}{\text{sytt}(a,b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -14 + n \cdot \frac{-5}{1} \\ y = -7 - n \cdot \frac{2}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -14 - 5n \\ y = -7 - 2n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Veikolle ja Teuville oli rahaa yhteensä vähemmän kuin 30 euron.

$$2x + 5y < 30 \quad \begin{array}{l} x = -14 - 5n \\ y = -7 - 2n \end{array}$$

$$2(-14 - 5n) + 5(-7 - 2n) < 30$$

$$-28 - 10n - 35 - 10n < 30$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ -20n < 93 \\ n > -4 \frac{13}{20} \end{array}$$

ksom $n > -4 \frac{13}{20}$ ja $n \in \mathbb{Z}$, n on $-4, -3, -2, \dots$

Veikolle ja Teuville oli rahaa enemmän kuin 0 €.

$n = -4$:

V: $2x = 2 \cdot (-14 - 5 \cdot (-4)) = 12$

T: $5y = 5 \cdot (-7 - 2 \cdot (-4)) = 5$ ✓

$n = -3$:

V: $2x = 2 \cdot (-14 - 5 \cdot (-3)) = 2$

T: $5y = 5 \cdot (-7 - 2 \cdot (-3)) = -5$ ei kään

V: Veikolle oli rahaa 12 euron ja Teuville oli 5 euron.