Lukion

Calculus 6

MAA11 Lukuteoria ja logiikka

Paavo Jäppinen Alpo Kupiainen Matti Räsänen Otava

Opettajan aineisto

Sisällys

1. painos

Taitto: Paavo Jäppinen

Painopaikka:
Otavan Kirjapaino Oy
Keuruu 2005
ISBN 951-1-20313-4

Alkusanat

Tämä aineisto liittyy pitkän matematiikan oppikirjaan **Lukion Calculus 6**:een, ja se on tarkoitettu helpottamaan opettajan työtä ja nopeuttamaan tehtäviin tutustumista. Aineisto sisältää syventävän kurssin **Lukuteoria ja logiikka** tehtävien ratkaisut.

Lähes kaikkien tehtävien ratkaisut on esitetty. Helpommista tehtävistä on ilmoitettu vain vastaukset. Samoin on menetelty, jos tehtävän ratkaiseminen ei ole edellyttänyt erityistä päättelyä tai välivaiheiden kirjaamista. Vaikka ratkaisut ovat monesti lyhennettyjä, on opiskelijat syytä totuttaa esittämään tarpeelliset perustelut ja laatimaan vastauksensa niin, että siitä käy ilmi, miten ratkaisu on ajateltu. Tämä edellyttää usein juuri täydentävän sanallisen selvityksen käyttöä.

Helmikuussa 2005
Tekijät

Tehtävien ratkaisuja
Lukuteoria ja logiikka

Joukko-oppia

1. Peruskäsitteitä

Tämän oppaan tekstissä luonnollisten lukujen, kokonaislukujen, rationaalilukujen ja reaalilukujen joukot merkitään vastaavasti kirjaimin **N, Z, Q** ja **R**.

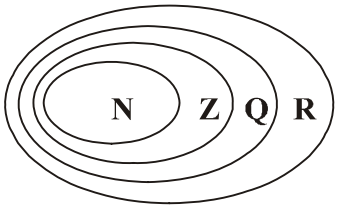
1. **a)** $\{0,1,2,3,4,5\}$ **b)** $\{-4,-3,-2,\ldots,10,11\}$ **c)** $\{0,1,2\}$

2. **a)** $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ **b)** $\{1,3,5,7,\ldots\}$ **c)** $\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$

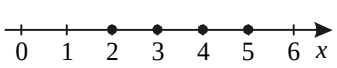
3. **a)** $\{x \mid |x| < 10, x \in \mathbf{Z}\}$ **b)** $\left\{x \mid \frac{x}{3} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}\right\}$ **c)** $\{x \mid x^2 < 2\}$

4. *A*:n osajoukkoja ovat kohtien a, b, d, e ja f joukot. Kohdan d joukko on sama kuin joukko *A*.

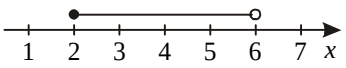
5. Merkintä ilmaisee, että luonnollisten lukujen joukko on kokonaislukujen osajoukko. Tämä puolestaan on rationaalilukujen osajoukko. Rationaalilukujen joukko on vastaavasti reaalilukujen osajoukko.



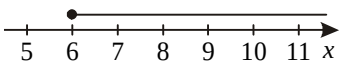
6. **a)**



b)



c)



7. Merkintä $2k$ tarkoittaa parillista kokonaislukua ja merkitä $2k + 1$ vastaavasti paritonta kokonaislukua, kun $k \in \mathbf{Z}$.

a) $\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$ **b)** $\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$ **c)** $\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}$

8. Joukon $\{a, b, c\}$ osajoukot ovat $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ ja $\{a, b, c\}$.

2. Yhdiste, leikkaus ja erotus

9. On annettu joukot $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ ja $C = \{1, 2, 3\}$.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **b)** $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $A \cap B = \{3, 4\}$ **d)** $A \cap C = \{1, 2, 3\}$

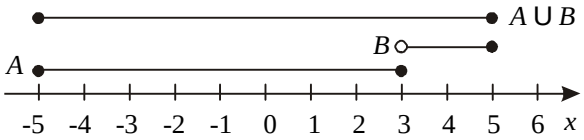
10. Joukot A, B ja C ovat edellisen tehtävän joukot.

a) $A \setminus B = \{1, 2\}$ **b)** $A \setminus C = \{4\}$

c) $B \setminus C = \{4, 5\}$ **d)** $C \setminus B = \{1, 2\}$

11. **a)** $A \cup B = \{x \mid -5 \le x \le 5\} = [-5, 5]$

b) $A \cap B = \varnothing$



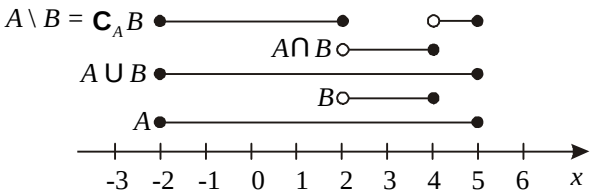
12. **a)** $A \cup B = [-2, 5]$

b) $A \cap B =]2, 4]$

c) $A \setminus B = [-2, 2] \cup]4, 5]$

d) $B \setminus A = \varnothing$

e) $\mathbf{C}_A B = [-2, 2] \cup]4, 5]$



13. **a)** $A \cup A = A$ **b)** $A \cap A = A$ **c)** $A \cup \varnothing = A$ **d)** $A \cap \varnothing = \varnothing$

14. E = {lukion oppilaat}, A = {tyttöoppilaat} ja B = {alle 18-vuotiaat oppilaat}

a) $\overline{A}$ = {lukion pojat}

b) $\overline{B}$ = {vähintään 18-vuotiaat oppilaat}

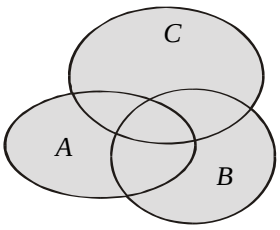
c) $A \cup B$ = {tytöt ja alle 18-vuotiaat oppilaat}

d) $A \cap B$ = {alle 18-vuotiaat tytöt}

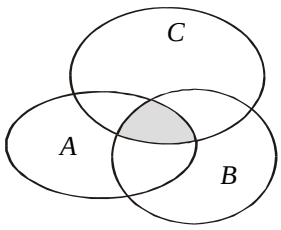
e) $\overline{A \cup B}$ = {vähintään 18-vuotiaat pojat}

15. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A \cap B \cap C = \{3\}$

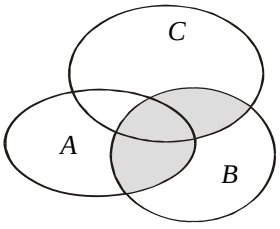
16. **a)** $A \cup B \cup C$



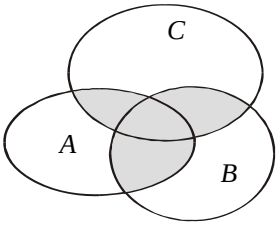
b) $A \cap B \cap C$



c) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$



d) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$



17. **a)** 8 **b)** 4

18. **a)** Koska $\overline{A} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, on $\overline{A} \cup B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$.

b) Koska $A \cup B = \{1,2,3,6,7,8,9\}$, on $\overline{A \cup B} = \{4,5,10\}$.

c) Koska $B \cap C = \{8\}$ ja $\overline{B \cap C} = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10\}$, on $A \cup \overline{B \cap C} = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10\}$.

19. **a)** $A \cup \overline{A} = E$ **b)** $A \cap \overline{A} = \varnothing$ **c)** $\overline{\overline{A}} = A$ **d)** $\overline{\varnothing} = E$ **e)** $\overline{E} = \varnothing$

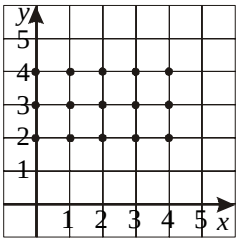
3. Tulojoukko

20. **a)** $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5),(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3),(3, 5), (4, 2), (4, 3),(4, 5)\}$

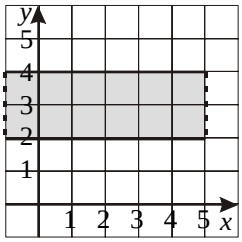
b) $A \times B = \{(e, p), (e, q),(e, r),(f, p), (f, q), (f, r), (g, p), (g, q), (g, r)\}$

21. Molemmissa joukoissa on 12 alkiota.

22. **a)**



b)



23. **a)** Koska $B \cap C = \{c, d\}$, on $A \times (B \cap C) = \{(2,c),(2,d),(4,c),(4,d),(6,c),(6,d)\}$.

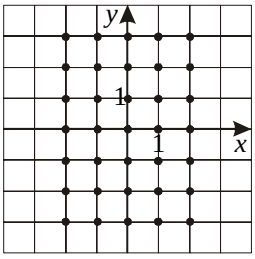
b) $A \times B = \{(2,a),(2,b),(2, c),(2,d),(4,a),(4,b),(4,c),(4,d),(6,a),(6,b),(6,c),(6,d)\}$ ja $A \times C = \{(2, c), (2, d), (2, e), (4, c), (4, d), (4, e), (6, c), (6, e), (6, d)\}$.
Tällöin $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(2,e),(4, a), (4, b), (4, c), (4, d), (4, e), (6, a), (6, b), (6, c), (6, d), (6, e)\}$

24. Kolmesta puserosta ja kolmesta hameesta saa 9 erilaista asuyhdistelmää.

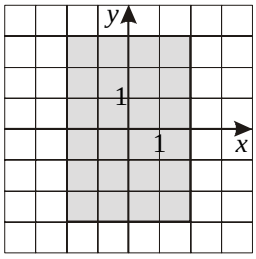
25. $A \times B = B \times A$ vain silloin, kun $A = B$.

26. $A \times B \times C = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,3),(1,3,4),(2,2,3),(2,2,4),(2,3,3),(2,3,4)\}$

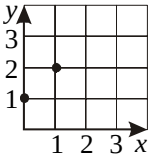
27. **a)**



b)

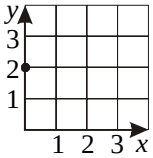


28. **a)**



$S = \{(0,1), (1,2)\}$

b)



$T = \{(0,2)\}$

Logiikkaa

2. Logiikan konnektiivit

29. Kohdat a, c ja e ovat propositioita, muut eivät ole.

30. **a)** Kaikki eivät ole läsnä. Tai: Ainakin yksi on poissa.
b) Poikia on vähintään viisi.
c) Molemmat linnut eivät ole sorsia. Tai: Ainakaan toinen lintu ei ole sorsa.
d) Kukaan ei kuuntele.
e) Luku on nolla tai negatiivinen.
f) Silmälukujen summa on enintään yhdeksän.

31. **a)** Hän on nuori tai kaunis.
b) Hän on nuori ja kaunis.
c) Jos hän on kaunis, niin hän on nuori.
d) Jos hän on nuori, niin hän ei ole kaunis.

32. **a)** $A \Rightarrow B$ **b)** $\neg A \wedge \neg B$ **c)** $A \Rightarrow B$

33. **a)** $A \Rightarrow B$ **b)** $A \Rightarrow B$ **c)** $\neg B \Rightarrow \neg A$

34. Lauseita ovat a, b ja d.
c- kohta ei ole lause, koska implikaatio on aina kahden lauseen välinen.
e- kohta ei ole lause, koska siinä on kaksi atomilausetta (B) peräkkäin ilman konnektiivia.

35. **a)** Lause $P \Rightarrow Q$ on tosi, samoin lause $Q \Rightarrow P$ on tosi.
b) Lause $P \Rightarrow Q$ on tosi, lause $Q \Rightarrow P$ on epätosi.
c) Lause $P \Rightarrow Q$ on tosi, samoin lause $Q \Rightarrow P$ on tosi.

36. **a)** Implikaatio $A \Rightarrow B$ on tosi, samoin implikaatio $B \Rightarrow A$ on tosi.
b) Implikaatio $A \Rightarrow B$ on tosi, samoin implikaatio $B \Rightarrow A$ on tosi.

3. Yhdistetyn lauseen totuusarvo

37. Kaikissa kohdissa uloimmat sulkumerkit ovat tarpeettomat.
a) $(P \Rightarrow Q) \vee R$. Sulkumerkit tarvitaan osoittamaan, että implikaatio, joka on disjunktiota heikompi, suoritetaan ensin.
b) $P \Rightarrow Q \vee R$. Sisempiä sulkumerkkejä ei tarvita, koska disjunktio on vahvempi kuin implikaatio.
c) $\neg\neg P \Rightarrow Q \wedge R$. Sisempiä sulkumerkkejä ei tarvita, koska konjunktio on vahvempi kuin implikaatio.
d) $P \vee (Q \wedge R \Leftrightarrow S) \Rightarrow \neg S$. Sulkumerkit tarvitaan, koska ekvivalenssi on heikompi kuin disjunktio.

38. Sarake $A \wedge B$ pitää olla *t, e, e, e*. Sarake $\neg A$ pitää olla *e, e, t, t*.

39. **a)** *A*: ”Lähden lenkille.”, *B*: ”Ulkona sataa.”
$\neg B \Rightarrow A$

b) *A*: ”Opin logiikkaa.”, *B*: ”Luen teoriaosuuden.”, *C*: ”Teen harjoitustehtävät.”
$B \wedge C \Rightarrow A$

c) *A*: ”Teemme työtä.”, *B*: ”Elämme.”
$\neg A \Rightarrow \neg B$

40. **a)** Humbatti on pussieläin ja se elää Kiinassa.

b) Jos Ville on metsästäjä ja metsästäjät jahtaavat pussieläimiä, niin humbatti on pussieläin tai humbatti elää Kiinassa.

c) Humbatti on pussieläin ja se elää Kiinassa, tai ei ole totta se, että jos Ville on metsästäjä, niin metsästäjät jahtaavat pussieläimiä.

41. Tiedetään, että *A* on tosi ja *B* epätosi.

a) $A \wedge (B \vee \neg B)$
t ***t*** *e t t e*
Yhdistetty lause on tosi.

b) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
e t e e ***e*** *t t t e*
Yhdistetty lause on epätosi.

c) $(B \vee A) \Rightarrow \neg B$
e t t ***t*** *t e*
Yhdistetty lause on tosi.

d) $(B \wedge A) \Leftrightarrow B$
e e t ***t*** *e*
Yhdistetty lause on tosi.

42 **a)**

A	$\neg A$	$A \vee \neg A)$
t	*e*	***t***
e	*t*	***t***
1	2	**3**

b)

$\neg (A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	A
e	*t*	*t*	***e***	*t*
e	*t*	*t*	***e***	*t*
e	*e*	*t*	***e***	*e*
t	*e*	*e*	***e***	*e*
3	1	2	**4**	1

c)

$(A$	$\Rightarrow$	$B) \wedge (\neg$	A	$\Rightarrow$	$B)$
t	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
t	*e*	***e***	*e*	*t*	*e*
e	*t*	***t***	*t*	*e*	*t*
e	*t*	***e***	*t*	*e*	*e*
1	3	**4**	2	1	3

43.

A	B	$(A \vee B) \wedge$		$\neg$	A
t	*t*	*t*	***e***	*e*	*t*
t	*e*	*t*	***e***	*e*	*t*
e	*t*	*t*	***t***	*t*	*e*
e	*e*	*e*	***e***	*t*	*e*
1	1	2	**4**	3	1

$\neg$	A	$\wedge$	B
e	*t*	***e***	*t*
e	*t*	***e***	*e*
t	*e*	***t***	*t*
t	*e*	***e***	*e*
2	1	**3**	1

Lauseilla on sama totuusarvo, koska lihavoitujen sarakkeiden totuusarvot ovat samat.

44. *A*: ”Koira haukkuu.” *B*: ”Pihapiirissä liikkuu joku.”

B	$\Rightarrow$	A
t	***t***	*t*
e	***t***	*t*
t	***e***	*e*
e	***t***	*e*

$\neg$	A	$\Rightarrow$	$\neg$	B
e	*t*	***t***	*e*	*t*
e	*t*	***t***	*t*	*e*
t	*e*	***e***	*e*	*t*
t	*e*	***t***	*t*	*e*

Lauseet ”Jos pihapiirissä liikkuu joku, koira haukkuu” ja ”Jos koira ei hauku, pihapiirissä ei liiku kukaan” ovat ekvivalentteja.

45.

S	T	$\neg S \wedge T$	$S \wedge \neg T$	$(\neg S \wedge T) \vee (S \wedge \neg T)$	$(\neg S \wedge T) \wedge (S \wedge \neg T)$
t	t	e	e	e	e
t	e	e	t	t	e
e	t	t	e	t	e
e	e	e	e	e	e

46.

$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$Q)$
t	t	t	***e***	e	t	t	t
t	t	e	***t***	t	t	e	e
e	t	t	***t***	t	e	e	t
e	e	e	***e***	t	e	e	e

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
t	t	***e***
t	e	***t***
e	t	***t***
e	e	***e***

47. a)

A	B	$A \vee B$
t	t	***t***
t	e	***t***
e	t	***t***
e	e	***e***

A	B	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
t	t	***t*** e e e
t	e	***t*** e e t
e	t	***t*** t e e
e	e	***e*** t t t

Vertaamalla taulukoiden lihavoidulla merkittyjä totuusarvoja havaitaan, että $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

b)

A	B	$A \Rightarrow B$
t	t	***t***
t	e	***e***
e	t	***t***
e	e	***t***

A	B	$\neg A \vee B$
t	t	e ***t*** t
t	e	e ***e*** e
e	t	t ***t*** t
e	e	t ***t*** e

Vertaamalla lihavoidulla merkittyjä totuusarvoja havaitaan, että $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

c)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
t	t	***t***
t	e	***e***
e	t	***e***
e	e	***t***

A	B	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
t	t	t ***t*** e e e
t	e	e ***e*** e e t
e	t	e ***e*** t e e
e	e	e ***t*** t t t

Vertaamalla lihavoidulla merkittyjä sarakkeita havaitaan lauseet yhtäpitäviksi eli

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

48. Shefferin viiva

P	Q	$P \mid Q$
t	*t*	***e***
t	*e*	***t***
e	*t*	***t***
e	*e*	***t***

Peircen nuoli

P	Q	$P \downarrow Q$
t	*t*	***e***
t	*e*	***e***
e	*t*	***e***
e	*e*	***t***

4. Tautologia

49. **a)** Lapsi ei vartu tai ei viisastu. **b)** Sulho kuuluu tai näkyy.
c) Tippuu tai lirisee.

50.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg\ B \Rightarrow \neg\ A)$								
t	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*	*e*	*t*
t	*e*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*	*e*	*t*
e	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*	*t*	*e*
e	*t*	*e*	***t***	*t*	*e*	*t*	*t*	*e*

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa kontraposition tautologiaksi.

51. **a)**

$A \vee B \Rightarrow B$				
t	*t*	*t*	***t***	*t*
t	*t*	*e*	***e***	*e*
e	*t*	*t*	***t***	*t*
e	*e*	*e*	***t***	*e*

Lause ei ole tautologia.

b)

$A \Rightarrow A \vee B$				
t	***t***	*t*	*t*	*t*
t	***t***	*t*	*t*	*e*
e	***t***	*e*	*t*	*t*
e	***t***	*e*	*e*	*e*

Lause on tautologia.

c)

$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$						
t	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*
t	*e*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*
e	*e*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
e	*t*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*

Lause on tautologia.

52. Jos Paavon päivänä paukkuu pakkanen, niin tulee hyvä kesä. Ja Paavon päivänä ei pauku pakkanen. Siis ei tule hyvä kesä.

$((P \Rightarrow K) \wedge \neg P) \Rightarrow \neg K$						
t	*t*	*t*	*e*	*e*	***t***	*e*
t	*e*	*e*	*e*	*e*	***t***	*t*
e	*t*	*t*	*t*	*t*	***e***	*e*
e	*t*	*e*	*t*	*t*	***t***	*t*
1	3	1	4	2	**5**	2

Päättely ei ole tosi kaikilla atomilauseiden totuusarvoyhdistelmillä, joten lause ei ole tautologia.

53.

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$							
e	*t*	*t*	*t*	***t***	*e*	*e*	*e*
e	*t*	*t*	*e*	***t***	*e*	*e*	*t*
e	*e*	*t*	*t*	***t***	*t*	*e*	*e*
t	*e*	*e*	*e*	***t***	*t*	*t*	*t*

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa de Morganin lain tautologiaksi.

4. A: "Sataa", B: "Lähden lenkille"
a) $A \Rightarrow \neg B$, **b)** $\neg(A \wedge B)$

a)

A	$\Rightarrow$	$\neg$	B
t	***e***	e	t
t	***t***	t	e
e	***t***	e	t
e	***t***	t	e

b)

$\neg$	(	A	$\wedge$	B	)
e		t	t	t	
t		t	e	e	
t		e	e	t	
t		e	e	e	

Koska lihavoidulla merkityt sarakkeet ovat samoja, lauseet ovat ekvivalentteja.

55.

C	$\Rightarrow$	(	A	$\wedge$	$\neg$	B	)
t	***e***		t	e	e	t	
e	***t***		t	e	e	t	
t	***t***		t	t	t	e	
e	***t***		t	t	t	e	
t	***e***		e	e	e	t	
e	***t***		e	e	e	t	
t	***e***		e	e	t	e	
e	***t***		e	e	t	e	

(	$\neg$	A	$\vee$	B	)	$\Rightarrow$	$\neg$	C
	e	t	t	t		***e***	e	t
	e	t	t	t		***t***	t	e
	e	t	e	e		***t***	e	t
	e	t	e	e		***t***	t	e
	t	e	t	t		***e***	e	t
	t	e	t	t		***t***	t	e
	t	e	t	e		***e***	e	t
	t	e	t	e		***t***	t	e

Koska lihavoidulla merkityt sarakkeet ovat samoja, lauseet ovat ekvivalentteja.

56. $\neg(x < -2 \vee x > 1) \Leftrightarrow (x \geq -2 \wedge x \leq 1)$ eli $-2 \leq x \leq 1$

57.

(	(	A	$\vee$	B	)	$\wedge$	$\neg$	A	)	$\Rightarrow$	B
	t	t	t	e	e			***t***	t		
	t	t	e	e	e			***t***	e		
	e	t	t	t	t			***t***	t		
	e	e	e	e	t			***t***	e		

Päättely on pätevä.

58. Ensimmäinen osittelulaki

A	$\wedge$	(	B	$\vee$	C	)	$\Leftrightarrow$	(	A	$\wedge$	B	)	$\vee$	(	A	$\wedge$	C	)
t	t		t	t	t		***t***		t	t	t		t		t	t	t	
t	t		t	t	e		***t***		t	t	t		t		t	e	e	
t	t		e	t	t		***t***		t	e	e		t		t	t	t	
t	e		e	e	e		***t***		t	e	e		e		t	e	e	
e	e		t	t	t		***t***		e	e	t		t		e	e	t	
e	e		t	t	e		***t***		e	e	t		e		e	e	e	
e	e		e	t	t		***t***		e	e	e		e		e	e	t	
e	e		e	e	e		***t***		e	e	e		e		e	e	e	

Toinen osittelulaki

A	$\vee$	$(B$	$\wedge$	$C)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge($	A	$\vee$	$C)$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*t*	*e*	*e*	***t***	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*e*
t	*t*	*e*	*e*	*t*	***t***	*t*	*t*	*e*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*e*	*e*	*e*	***t***	*t*	*t*	*e*	*t*	*t*	*t*	*e*
e	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*	*t*	*e*	*t*	*t*
e	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*e*	*t*	*t*	*e*	*e*	*e*	*e*
e	*e*	*e*	*e*	*t*	***t***	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*t*
e	*e*	*e*	*e*	*e*	***t***	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*

59. $\neg(P \Rightarrow Q) = \neg(\neg P \vee Q) = \neg(\neg(P \wedge \neg Q) = P \wedge \neg Q$

60. **a)** $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$

b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A))$

61. **a)** $A \wedge B \wedge \neg A$ **b)** $\neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ **c)** $A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)$

62. Merkitään: *P*: "Tiedän olevani kuollut" ja *Q*: "Olen kuollut".

$((P$	$\Rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(P$	$\Rightarrow$	$\neg Q))$	$\Rightarrow$	$\neg P$
t	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*e*
t	*e*	*e*	*e*	*t*	*t*	*t*	***t***	*e*
e	*t*	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	***t***	*t*
e	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*t*	***t***	*t*

Päättely $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg P$ on tautologia.

5. Predikaattilogiikkaa

63. Sijoittamalla epäyhtälöön annetut *x*:n ja *y*:n arvot havaitaan, että a-kohta on tosi ja muut kohdat epätosia.

64. **a)** Kaikkien reaalilukujen neliöt ovat positiivisia. Lause on epätosi, sillä luvun nolla neliö ei ole positiivinen.
b) On olemassa kokonaisluku, joka on käänteislukuaan pienempi. Lause on tosi, sillä esimerkiksi –2 on pienempi kuin sen käänteisluku $-\frac{1}{2}$.
c) Kaikille reaaliluvuille *x* ja *y* on voimassa ehto $xy = yx$. Kyseessä on kertolaskun vaihdantalaki, joka on voimassa kaikille reaaliluvuille.

65. **a)** Jokaisen reaaliluvun neliö on nolla tai negatiivinen luku. Lause on epätosi, sillä jokaisen reaaliluvun neliö on ei-negatiivinen luku.

b) On olemassa ainakin yksi reaaliluku, jonka neliö on 2. Tosi. Tällaisia reaalilukuja ovat $-\sqrt{2}$ ja $\sqrt{2}$.

c) Jokainen kokonaisluku kahdella jaettuna on kokonaisluku. Lause on epätosi, sillä esimerkiksi luvun kolme puolikas ei ole kokonaisluku.

d) Jokaisen rationaaliluvun neliöjuuri on reaaliluku. Epätosi, sillä esimerkiksi luvun –2,4 neliöjuuri ei ole reaaliluku.

66. **a)** Lause on epätosi. Jos x on esimerkiksi 5, saadaan yhtälöstä $x = 2y$ y:lle arvo 2,5. Tämä ei kokonaisluku.

b) Lause on tosi. Olkoonpa x mikä reaaliluku tahansa, aina on sellainen reaaliluku y, että $x = 2y$, nimittäin $y = \frac{x}{2}$.

67. **a)** Lause on epätosi, sillä annetun joukon alkiot –2 ja –1 eivät ole luonnollisia lukuja.

b) Lause on tosi. Alkioksi x sopii 0. Tällöin $x + y \in A$ kaikille A:n alkioille y.

c) Lause on epätosi, sillä esimerkiksi tulojen $(-2)\cdot 1$ ja $(-1)\cdot 1$ arvot eivät ole luonnollisia lukuja.

68. $\forall x, y \in \mathbf{R}: x > y \Leftrightarrow x - y > 0$

69. **a)** $\forall x, y \in \mathbf{N}: xy \in \mathbf{N}$. Tosi.
b) $\neg(\exists x \in \mathbf{N} : x < 0)$. Tosi
c) $\forall x \in \mathbf{R}: x^2 > 0$. Epätosi

70. **a)** $\exists x \in \mathbf{R} : x \leq 3$
b) $\forall x \in \mathbf{Q} : x \leq 1 \vee x \geq 3$
c) $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} : x + y \neq 0$

71. Lauseet eivät ole sisällöltään samoja. Edellinen lause on tosi, sillä jokaisen luonnollisen luvun neliö on luonnollinen luku. Jälkimmäinen lause on epätosi, sillä esimerkiksi luonnolliselle luvulle $y = 10$ ei löydy ehdon $10 = x^2$ täyttävää luonnollista lukua x.

72. a ja c ovat tosia, b ja d epätosia

73.

x:n arvot	$\lvert x \rvert = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$		
$x < -1$	*e*	***t***	*e*
$x = -1$	*t*	***t***	*t*
$-1 < x < 1$	*e*	***t***	*e*
$x = 1$	*t*	***t***	*t*
$x > 1$	*e*	***t***	*e*

Ekvivalenssi on tosi.

74. Kahden reaaliluvun välissä on aina kolmas reaaliluku.

75. Tutkitaan, millä *a*:n arvoilla toisen asteen yhtälöllä $x^2 + 4x + a = 0$ on ratkaisuja. Yhtälöllä on (reaalisia) ratkaisuja, kun $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \geq 0$. Tällöin $a \leq 4$.

a) Kun $A = \mathbf{R}$, $a \in]-\infty, 4]$. **b)** Kun $A = \mathbf{N}$, $a \in \{0,1,2,3,4\}$.

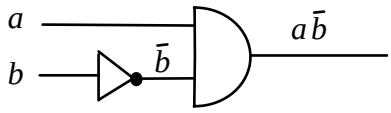
76. **a) B** **b) C** **c) A** **d) E**

* 6. Loogiset virtapiirit

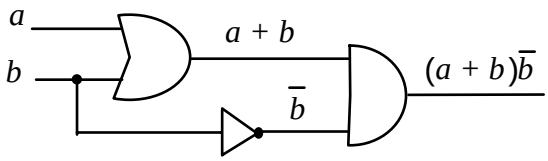
77. **a)** $a + b$ **b)** $a + bc$

78. **a)** $a + b(c + d)$ **b)** $\overline{\overline{ab} + b}$

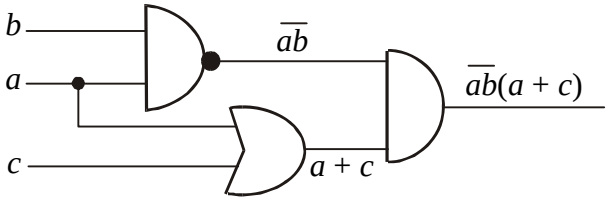
79. **a)**



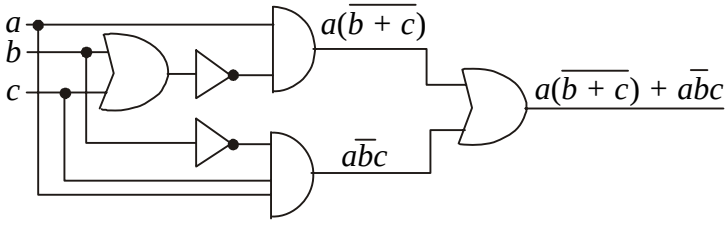
b)



80. **a)**



b)

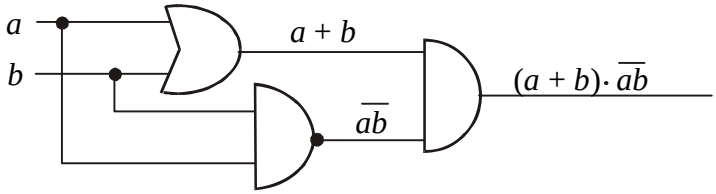


81. **a)** Kun otetaan huomioon, että $A \Rightarrow B$ saadaan muotoon $\neg A \vee B$, vastaava loogisen piirin lauseke on $\bar{a} + b$.

b) Ekvivalenssi $A \Leftrightarrow B$ voidaan korvata yhtäpitävällä lauseella $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$. Tällöin loogisen piirin lauseke saa muodon $ab + \bar{a}\bar{b}$.

c) Logiikan lauseketta $(A \vee \neg(A \vee B)) \vee (A \wedge B)$ vastaava loogisen piirin lauseke on $a + \overline{a + b} + ab$.

82. a)



b)

a	b	$a + b$	ab	$\overline{ab}$	$(a+b)\overline{ab}$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

P	Q	$P \veebar Q$
t	*t*	***e***
t	*e*	***t***
e	*t*	***t***
e	*e*	***e***

Todistusmenetelmiä

1. Yleistä

83. **a)** *Oletus*: Kuvio on kolmio.
Väite: Kulmien summa on 180°.

b) *Oletus*: Kulmalle ja sen vieruskulmalle on piirretty puolittajat.
Väite: Puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

84. **a)** *Oletus*: Olkoon n luonnollinen luku.
Väite: Summa $n+n^2$ on jaollinen kahdella.

b) *Oletus*: Kokonaisluku päättyy nollaan.
Väite: Luku on jaollinen kymmenellä.

c) *Oletus*: Funktio on lineaarinen.
Väite: Funktiolla on enintään yksi nollakohta.

d) *Oletus*: Ympyrän kaaret ovat yhtä suuret.
Väite: Kaaria vastaavat keskuskulmat ovat yhtä suuret.

2. Suora todistus

85. Pythagoraan lause: Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.
Käänteislause: Jos kolmion kahden sivun neliöiden summa on yhtä suuri kuin kolmannen sivun neliö, niin kolmio on suorakulmainen.

86. **a)** Jos menestyn koulussa, niin olen ahkera.
b) Jos luvun neliö on positiivinen, niin luku on positiivinen.

87. **a)** Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä, on kulman puolittajalla.
b) Jos luvun numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä, luku on jaollinen yhdeksällä.

88.

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$										
t	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*e*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*t*
e	*e*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*
e	*t*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*t*
1	2	1	**4**	1	2	1	3	1	2	1

Taulukko osoittaa lauseet $A \Leftrightarrow B$ ja $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ yhtäpitäviksi.

89. Olkoon $a = 2m + 1$ ja $b = 2n + 1$ ($m, n \in \mathbf{Z}$). Tällöin $a + b = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$. Saadusta summan arvosta nähdään parillisuus.

90. Pariton luku kirjoitetaan muotoon $2n + 1$ ($n \in \mathbf{Z}$). Tällöin $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n$.

a) Kun edellä saatu tulos kirjoitetaan muotoon $4n^2 + 4n = 4(n^2 + n)$, nähdään neljällä jaollisuus.

b) Kirjoitetaan $4n^2 + 4n$ muotoon $4 \cdot n \cdot (n+1)$. Koska saadussa tulossa jompikumpi tekijöistä n tai $n + 1$ on jaollinen kahdella, on tulo jaollinen $4 \cdot 2$:lla eli kahdeksalla.

91. **a)** Sataa.
Jos sataa, niin on pilvistä.

Siis on pilvistä.

b) Luku n on parillinen.
Jos n on parillinen, niin n +1 on pariton.

Siis n +1 on pariton.

92. Kaikki päättelyt ovat päteviä.

93. Päättely ei ole pätevä, sillä Kalle voi saada logiikan kurssista huonon arvosanan esimerkiksi siksi, ettei hän osaa muita logiikkaan kuuluvia asioita.

Oheinen totuustaulu liittyy ko. päättelyyn.

$(\neg A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow \neg B$
e t t t t t ⓔ *e t*

94. Oletetaan, että n on pariton kokonaisluku eli $n = 2k + 1$. Tällöin $\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 1} = \frac{n(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{(2k+1)(2k+3)}{2k(2k+2)}$. Koska molemmat osoittajan tekijät ovat parittomia, lauseke ei supistu kahdella.

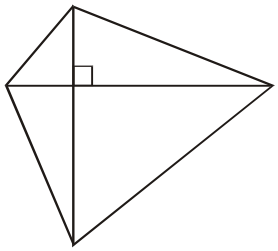
Oletetaan seuraavaksi, että n on parillinen kokonaisluku eli muotoa $2k$. Tällöin $\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 1} = \frac{n(n+2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2k \cdot (2k+2)}{(2k-1)(2k+1)}$. Molemmat nimittäjän tekijät ovat parittomia. Näin ollen lauseke ei supistu luvulla kaksi.

3. Vastaesimerkin käyttö

95. **a)** Valitaan kokonaisluvut 1 ja 3. Niiden summa on parillinen, mutta kumpikaan yhteenlaskettavista ei ole parillinen.

b) Kun esimerkiksi $n = 4$, niin $n^3 + n + 1$ saa arvon 69, joka ei ole alkuluku. Näin ollen lause on epätosi.

96. Esimerkiksi kuvan nelikulmio ei ole suunnikas, vaikka lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite ei siis pidä paikkaansa.



97. **a)** Valitaan esimerkkiluvuksi 100. Esitetty lause on epätosi, sillä $100 \overset{-10\,\%}{\rightarrow} 90 \overset{+10\,\%}{\rightarrow} 99$.

b) Valitaan luvut 5 ja 6. Niiden summa on 11 ja sen käänteisluku $\frac{1}{11}$. Lukujen 5 ja 6 käänteislukujen $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{6}$ summa puolestaan on $\frac{11}{30}$. Lause on epätosi, koska $\frac{1}{11} \neq \frac{11}{30}$.

c) Lause on epätosi, sillä esimerkiksi $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.

98. **a)** Oletus: $x \in \mathbf{Z}$. Väitteen mukaan $x^2 \geq x$ eli $x^2 - x \geq 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $x \leq 0 \vee x \geq 1$. Tämän mukaan väite on tosi kaikille kokonaisluvuille.

b) Oletus: $x \in \mathbf{R}$. Edellisen kohdan mukaan ehdon täyttäviä lukuja x ovat täsmälleen ne, joille $x \leq 0 \vee x \geq 1$. Väite ei siis pidä paikkaansa kaikille reaaliluvuille.

99. **a)** Väite ei pidä paikkaansa, sillä arvolla $x = -10$ epäyhtälön vasen puoli on nolla.

b) Väite ei pidä paikkaansa, sillä esimerkiksi $x = 0$ on yhtälön reaalinen ratkaisu.

4. Epäsuora todistus

100. **a)** Jos jokaisella oppilaalla olisi enintään kuusi oppikirjaa, niin luokan 28 oppilaalla olisi yhteensä enintään 168 kirjaa. Tämä on vastoin oletusta, joten ainakin yhdellä oppilaalla on enemmän kuin kuusi kirjaa.

b) Jos jokaisella suomalaisella olisi eri määrä hiuksia, olisi jollakulla yli viisi miljoonaa hiusta. Se ei kuitenkaan ole mahdollista oletuksen mukaan. Näin ollen ainakin kahdella suomalaisella on sama määrä hiuksia.

101.

A	$\wedge$	$(\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	$A)$	$\Rightarrow$	B
t	*t*	*e*	*t*	*t*	*e*	*t*	***t***	*t*
t	*e*	*t*	*e*	*e*	*e*	*t*	***t***	*e*
e	*e*	*e*	*t*	*t*	*t*	*e*	***t***	*t*
e	*e*	*t*	*e*	*t*	*t*	*e*	***t***	*e*

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa epäsuoran päättelyn säännön päteväksi.

102. *Oletus*: $2a(a-3) \le 0$. *Väite*: $a \ge 0$. *Todistus*: Tehdään vastaväite eli oletetaan, että $a < 0$, jolloin $2a < 0$ ja $a - 3 < 0$. Tällöin $2a(a-3) > 0$, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa. Vastaväite on siis väärä ja alkuperäinen väite oikea.

103. Ei ole riittävä ehto. Jos esimerkiksi $x = 2 \ge 0$, niin $2(2-1) > 0$.

104. **a)** *Oletus*: *n* on parillinen luonnollinen luku.
Väite: *n* + 3 on pariton luonnollinen luku.
Todistus: Tehdään vastaväite, että *n* + 3 on parillinen luonnollinen luku. Silloin on sellainen kokonaisluku *k*, että $n + 3 = 2k$. Nyt $n = 2k - 3$, joka on pariton luku. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaväite on väärä ja väite oikea.

b) *Oletus*: *a* on irrationaaliluku
Väite: *a* + 7 on irrationaaliluku
Todistus: Esitetään vastaväite, että *a* + 7 on rationaaliluku. Koska kahden rationaaliluvun erotus on aina rationaaliluku, on myös $a + 7 - 7 = a$ rationaaliluku. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen esitetty vastaväite on väärä ja alkuperäinen väite oikea.

105. *Oletus*: $5n + 2$ on pariton ja $n \in \mathbf{N}$.
Väite: *n* on pariton.
a) Suora todistus:
Oletuksen mukaan $5n + 2$ on pariton, joten $5n + 2 = 2k + 1$ jollekin kokonaisluvulle *k*. Tästä saadaan $n = \dfrac{2k-1}{5}$. Murtolausekkeen osoittaja on pariton, ja kun se jaetaan parittomalla luvulla 5, on tuloksena pariton luku *n*.

b) Epäsuora todistus:
Tehdään vastaväite, jonka mukaan *n* on parillinen. Silloin on olemassa sellainen kokonaisluku *k*, että $n = 2k$, joten $5n + 2 = 5(2k) + 2 = 10k + 2 = 2(5k + 1)$. Saatu luku on parillinen, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Koska vastaväite on väärä, väite on oikea.

106. *Oletus*: Luku *x* on irrationaaliluku.

Väite: Luku $\dfrac{x-1}{x+2}$ on irrationaaliluku.

Todistus: Tehdään vastaväite, että luku $\dfrac{x-1}{x+2}$ on rationaaliluku. Tällöin on sellaiset kokonaisluvut *m* ja *n*, että $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{m}{n}$. Kun tästä ratkaistaan *x*, saadaan $x = \dfrac{2m+n}{n-m}$, jos $n \ne m$.

Koska *m* ja *n* ovat kokonaislukuja, ovat myös 2*m* + *n* ja *n* – *m* kokonaislukuja, joten luku *x* on rationaaliluku. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaväite on väärä ja väite oikea.

Tutkitaan vielä mahdollisuus, että *n* = *m*. Tällöin $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{m}{m} = 1$. Yhtälön sieventäminen antaa –1 = 2, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Näin on todistettu, että luku $\dfrac{x-1}{x+2}$ on irrationaaliluku, kun *x* on irrationaaliluku.

107. Suora todistus:
Parillisena lukuna m on muotoa $m = 2k$, parittomana n on muotoa $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Tällöin summa $m + n = 2k + 2k + 1 = 4k + 1$. Tästä nähdään summa parittomaksi.

Epäsuora todistus:
Merkitään $m = 2k$ ja $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Tehdään vastaväite, että summa $m + n$ on parillinen eli $m + n = 2s$. Tällöin $m = 2s - n = 2s - (2k + 1) = 2s - 2k - 1 = 2(s - k) - 1$. Viimeksi saatu muoto osoittaa, että luku m on pariton. Tämä on vastoin oletusta. Koska vastaväite on väärä, väite on oikea.

108. *Oletus*: Kahden luvun m ja n tulo mn on parillinen.
Väite: Ainakin toinen luvuista m ja n on parillinen.
Todistus: Tehdään vastaväite, että molemmat luvut ovat parittomia eli $m = 2k + 1$ ja $n = 2s + 1$, $k, s \in \mathbf{Z}$. Tällöin $mn = (2k + 1)(2s + 1) = 4ks + 2k + 2s + 1$ $= 2(2ks + k + s) + 1$. Saatu luku on pariton. Koska tulos on ristiriidassa oletuksen kanssa, vastaväite on väärä ja väite oikea.

109. Tehdään vastaväite, että $2(2a + 1)$ on jonkin luvun neliö eli $2(2a + 1) = k^2$, $k \in \mathbf{Z}$. Jos k on parillinen luku eli muotoa $2p$, $p \in \mathbf{Z}$, on $2(2a + 1) = 4p^2$. Tästä saadaan edelleen $a = p^2 - \frac{1}{2}$, joka ei ole kokonaisluku. Tulos on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaväite on väärä ja väite oikea.

Vastaavasti käsitellään tapaus k on pariton eli muotoa $k = 2p + 1$.

110. *Oletus*: $A \subset B$ ja $B \subset A$
Väite: $A = B$
Todistus: Tehdään vastaväite, että $A \neq B$. Silloin on olemassa alkio x, joka kuuluu toiseen näistä joukoista, mutta ei kuulu toiseen. Jos $x \in A$ ja $x \notin B$, niin ei voi olla $A \subset B$. Vastaavasti, jos $x \notin A$ ja $x \in B$, ei voi olla $B \subset A$. Molemmat tulokset ovat ristiriidassa oletuksen kanssa, mistä johtuen vastaväite on väärä ja väite oikea.

111. Tehdään vastaväite, että $\mathbf{R}_+$:n pienin luku on r. Tällöin myös $\frac{r}{2} \in \mathbf{R}_+$. Mutta koska $\frac{r}{2} < r$, on seurauksena ristiriita. Tämän perusteella luku r ei voi olla $\mathbf{R}_+$:n pienin luku. Siis joukossa $\mathbf{R}_+$ ei ole pienintä lukua.

*5. Induktiotodistus

112. Arvolla $n = 1$ yhtälö $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ on tosi, sillä $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$.

Oletetaan yhtälö oikeaksi, kun $n = k$, jolloin $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Osoitetaan yhtälö oikeaksi, kun $n = k + 1$ eli osoitetaan, että

$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\underbrace{1+2+3+...+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Induktioperiaatteen mukaan yhtälö $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ on tosi kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$.

113. **a)** Kun $n=1$, kaavan voimassaolo nähdään suoraan.
Oletetaan kaava oikeaksi, kun $n = k$, jolloin $2 + 4 + 6 +...+ 2k = k(k + 1)$.
Osoitetaan kaava oikeaksi, kun $n=k+1$:

$$\underbrace{2+4+6+...+2k}_{k(k+1)}+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)=(k+1)(k+2).$$

Induktioperiaatteen mukaan annettu kaava on tosi kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$.

b) Kun $n=1$, kaava on voimassa, koska $3=3\cdot1^2$.
Osoitetaan kaavan paikkansapitävyys, kun $n=k+1$:

$$\underbrace{3+9+15+(6k-3)}_{3k^2}+\underbrace{(6(k+1)-3)}_{6k+3}=3k^2+6k+3=3(k^2+2k+1)=3(k+1)^2.$$

Induktioperiaatteen mukaan annettu kaava on tosi kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$.

114. *Tapa* 1: Kirjoitetaan luku n^3-n muotoon $n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1)$. Kun $n = 1$, tulo on nolla ja jaollinen kolmella. Kun $n\geq 2$, tulon tekijöinä on kolme peräkkäistä positiivista kokonaislukua. Koska näistä yksi on aina jaollinen kolmella, tulo on jaollinen kolmella.

Tapa 2: Induktiotodistus.
Kun $n=1$, saadaan $1^3-1=0,$ joka luku on jaollinen kolmella.

Oletetaan väite oikeaksi, kun $n=k$. Koska k^3-k on jaollinen kolmella, voidaan merkitä $k^3-k=3m,$ jossa $m\in\mathbf{N}$. Arvolla $n=k+1$ saadaan

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=\underbrace{k^3-k}_{3m}+3(k^2+k)$$
$$=3m+3(k^2+k)=3(m+k^2+k).$$

Viimeksi saadusta muodosta näkyy kolmella jaollisuus.

Induktioperiaatteen mukaan n^3-n on jaollinen kolmella aina, kun $n\in\mathbf{Z}_+$.

115. Arvolla $n = 1$ yhtälö on tosi, sillä $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Oletetaan yhtälö todeksi, kun $n = k$, jolloin $1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Osoitetaan yhtälö todeksi, kun $n=k+1$:

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\frac{k^2(k+1)^2}{4}}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Induktioperiaatteen mukaan annettu yhtälö on tosi kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$.

116. Kun $n = 1$, saadaan $7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$, joka on viidellä jaollinen.

Oletetaan väite todeksi, kun $n = k$, jolloin voidaan kirjoittaa $7^k - 2^k = 5m$, $m \in \mathbf{Z}_+$.
Osoitetaan, että myös luku $7^{k+1} - 2^{k+1}$ on jaollinen viidellä. Ratkaistaan edellisestä erotuksesta 7^k ja sijoitetaan se jälkimmäiseen erotukseen, jolloin saadaan
$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k = 7(5m + 2^k) - 2 \cdot 2^k = 5 \cdot 7m + 7 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k = 5(7m + 2^k)$.
Tästä muodosta nähdään viidellä jaollisuus.

Induktioperiaatteen mukaan $7^n - 2^n$ on viidellä jaollinen, kun $n \in \mathbf{Z}_+$.

117. Kun $n = 5$, saadaan tosi epäyhtälö $5^2 = 25 < 2^5 = 32$.

Oletetaan epäyhtälö todeksi, kun $n = k > 5$, jolloin on voimassa $k^2 < 2^k$.
Osoitetaan todeksi myös epäyhtälö $(k+1)^2 < 2^{k+1}$.
Ratkaisemalla epäyhtälö varmistutaan ensin, että $2k + 1 < k^2$, kun $k > 5$. Sen jälkeen voidaan päätellä, että $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 2k^2 \overset{\text{ind.oletus}}{<} 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

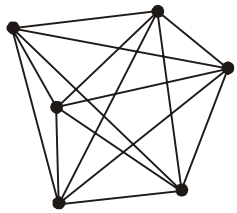
Induktioperiaatteen mukaan $n^2 < 2^n$, kun $n \geq 5$.

118. Väite on tosi, kun $n = 1$, sillä $\frac{1^3 + 5 \cdot 1}{6} = 1$, joka on kokonaisluku.

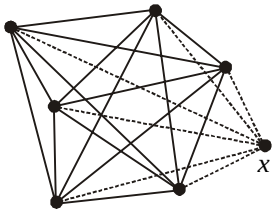
Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väite on tosi, kun $n = k$ (k on kokonaisluku, $k \geq 1$), eli oletetaan, että $\frac{k^3 + 5k}{6}$ on kokonaisluku.
Osoitetaan väite todeksi, kun $n = k + 1$. Saadaan aluksi
$\frac{(k+1)^3 + 5(k+1)}{6} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5}{6} = \frac{k^3 + 5k}{6} + \frac{3k^2 + 3k + 6}{6}$. Ensimmäinen yhteenlaskettava on kokonaisluku induktio-oletuksen mukaan. Jälkimmäinen yhteenlaskettava on $\frac{3k^2 + 3k + 6}{6} = \frac{k^2 + k + 2}{2} = \frac{k(k+1) + 2}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Se on kokonaisluku, sillä toinen peräkkäisistä kokonaisluvuista k ja $k + 1$ on parillinen, joten tulo $k(k + 1)$ on jaollinen kahdella.

Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

119. Olkoon $n = 2$. Kahden pisteen välille voi piirtää vain yhden janan. Arvolla $n = 2$ lauseke $\frac{n(n-1)}{2}$ saa arvon $\frac{2(2-1)}{2} = 1$.



Oletetaan, että k:n pisteen kautta voidaan piirtää $\frac{k(k-1)}{2}$ janaa.
Osoitetaan, että $k + 1$:n pisteen kautta voidaan piirtää $\frac{(k+1)((k+1)-1)}{2}$ eli $\frac{k(k+1)}{2}$ janaa.
Piirretään uusi kuvio, jossa on yksi piste (piste x) enemmän kuin sitä edellisessä, joten entisten $\frac{k(k-1)}{2}$ janan lisäksi voidaan piirtää k uutta janaa (kuviossa katkoviivoilla).



Yhteensä janoja on nyt $\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k(k-1)+2k}{2}=\frac{(k+1)k}{2}$, kuten pitikin.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikilla $n = 2, 3, ...$

120. Arvolla $n = 1$ yhtälö on tosi, sillä $1^2=\frac{1\cdot(4-1)}{3}$.

Oletetaan yhtälö todeksi, kun $n = k$, jolloin $1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$.

Osoitetaan yhtälö todeksi, kun $n = k + 1$:

$$\underbrace{1\ +3^2+5^2+...+(2k-1)^2}_{\frac{k(4k^2-1)}{3}}+(2k+1)^2=\frac{k\overbrace{(4k^2-1)}^{(2k-1)(2k+1)}}{3}+\frac{3(2k+1)^2}{3}$$

$$=\frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3}=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Kun oikean puolen lausekkeeseen $\frac{n(4n^2-1)}{3}=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ sijoitetaan $n = k +1$, päädytään muotoon $\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$, joka on sama kuin edellä saatu.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikilla $n\in\mathbf{Z}_+$.

121. Kirjoitetaan kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun kuutioiden summa muotoon $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$.

Kun n =1, summa $1^3+2^3+3^3=36$ on jaollinen yhdeksällä. Oletetaan, että väite on tosi, kun $n=k,$ jolloin $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9m,\ m\in\mathbf{Z}_+$. Osoitetaan lauseen paikkansapitävyys, kun $n=k+1.$ Tällöin

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=9m-k^3+(k+3)^3$

$=9m-k^3+k^3+9k^2+27k+27=9(m+k^2+3k+3).$

Viimeksi saadusta muodosta nähdään yhdeksällä jaollisuus.

Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, ...$

***122.** Kun $n=0$, epäyhtälö saa muodon $(1+x)^0\geq 1+0\cdot x$ eli $1\geq 1$, joka on tosi.

Oletetaan väite oikeaksi, kun $n=k$, jolloin $(1+x)^k\geq 1+kx$.

Osoitetaan kaava oikeaksi, kun $n=k+1$, eli osoitetaan, että $(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$.

Koska oletuksen mukaan $x>-1$ ja siis $1+x>0$, alkuperäinen epäyhtälömerkki säilyttää suuntansa kerrottaessa $(1+x)$:llä. Saadaan

$(1+x)(1+x)^k\geq(1+x)(1+kx)$ ja edelleen

$(1+x)^{k+1}\geq 1+kx+x+kx^2=1+(k+1)x+\underbrace{kx^2}_{\geq 0}\geq 1+(k+1)x.$

Näin väite $(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$ on todistettu oikeaksi, joten induktioperiaatteen mukaan Bernoullin epäyhtälö on voimassa kaikilla luonnollisilla luvuilla.

Lukuteoriaa

2. Paikkajärjestelmä

123. **a)** $8\cdot10^6+4\cdot10^4+2\cdot10^1=8\,040\,020$

b) $9\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-3}+1\cdot10^{-5}+3\cdot10^{-7}=0{,}9020103$

124. **a)** $576=5\cdot10^2+7\cdot10^1+6\cdot10^0$

b) $7\,006=7\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10^1+6\cdot10^0$

c) $825\,033=8\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3+0\cdot10^2+3\cdot10^1+3\cdot10^0$

d) $27{,}72=2\cdot10^1+7\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}$

e) $0{,}08642=0\cdot10^0+0\cdot10^{-1}+8\cdot10^{-2}+6\cdot10^{-3}+4\cdot10^{-4}+2\cdot10^{-5}$

125. **a)** $111111_2=1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$
$=32+16+8+4+2+1=63$

b) $4321_5=4\cdot5^3+3\cdot5^2+2\cdot5^1+1\cdot5^0$
$=500+75+10+1=586$

c) $7245{,}3_8=7\cdot8^3+2\cdot8^2+4\cdot8^1+5\cdot8^0+3\cdot8^{-1}$
$=3584+128+32+5+\frac{3}{8}$
$=3\,749\frac{3}{8}=3\,749{,}375$

d) $\mathrm{AB3E7FC}_{16}=10\cdot16^6+11\cdot16^5+3\cdot16^4+14\cdot16^3+7\cdot16^2+15\cdot16^1+12\cdot16^0$
$=167\,772\,160+11\,534\,336+196\,608+57\,344+1\,792+240+12$
$=179\,562\,492$

126. **a)** $100_{10}=64+32+4=1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^2=1100100_2$

b) $100_{10}=1\cdot8^2+4\cdot8^1+4\cdot8^0=144_8$

c) $100_{10}=6\cdot16^1+4\cdot16^0=64_{16}$

127.

•	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

128. **a)** Annetusta ehdosta saadaan toisen asteen yhtälö $5k^2 + 2k + 3 = 262$ ja edelleen $5k^2 + 2k - 259 = 0$. Kantaluvuksi kelpaa ainoastaan kokonaislukuratkaisu $k = 7$.

b) Annetusta ehdosta saadaan kolmannen asteen yhtälö $2k^3 + 3k^2 + 3 = 328$ ja edelleen $2k^3 + 3k^2 - 325 = 0$. Yhtälön ainoa soveltuva ratkaisu on $k = 5$.

129. Ehdosta $234_k + 56_k = 312_k$ saadaan k-kantaisessa järjestelmässä yhtälö $2k^2 + 3k + 4 + 5k + 6 = 3k^2 + k + 2$, joka sievenee muotoon $k^2 - 7k - 8 = 0$. Yhtälön ratkaisuista kantaluvuksi kelpaa $k = 8$.

130. **a)** $\text{CAFE}_{16} = 12 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 51\,966_{10}$

$\text{ABBA}_{16} = 10 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 43\,962_{10}$

$\text{BABA}_{16} = 11 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 47\,802_{10}$

b) Muunnetaan luku 1101011_2 ensin 10-järjestelmän luvuksi.

$1101011_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 107_{10}$

$107_{10} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 153_8$

c) $345_{10} = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 2340_5$

$534_{10} = 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 4133_5$

Summa $2340_5 + 4133_5 = 12023_5$

Tulo $2340_5 \cdot 4133_5 = 21443320_5$

131. Muunnetaan 7-järjestelmän luvut 10-järjestelmän luvuiksi.

$11_7 = 1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 8_{10}$

$111_7 = 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 49 + 7 + 1 = 57_{10}$

$1111_7 = 1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 343 + 49 + 7 + 1 = 400_{10}$

Muunnetaan 10-järjestelmän luvut 7-järjestelmän luvuiksi.

$11_{10} = 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 14_7$

$111_{10} = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 216_7$

$1111_{10} = 3 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 3145_7$

132. **a)**

+	0	1
0	0	1
1	1	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

b) $101_2 + 111_2 = 1100_2$

c) $101_2 \cdot 111_2 = 100011_2$

d) $100011_2 + 1011_2 \cdot 110_2 = 1100101_2$

3. Kokonaislukujen jaollisuus

134. **a)** ei, **b)** kyllä, **c)** kyllä, **d)** kyllä

135. b- ja d- kohdan luvut

136. **a)** Merkinnän $a \mid b$ mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku *r*, että $b = ra$. Kun yhtälö kerrotaan *k*:lla, saadaan $kb = kr \cdot a$. Tämä tulos osoittaa kb:n olevan jaollinen *a*:lla eli $a \mid kb$.

b) Oletuksen perusteella voidaan kirjoittaa $a = rk$ ja $b = sk$. Tällöin $ma + nb = mrk + nsk = k(mr + ns)$, josta nähdään, että $k \mid (ma + nb)$.

137. **a)** $62 = 2 \cdot 31$ **b)** $119 = 7 \cdot 17$ **c)** $555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$
d) $1\,173 = 3 \cdot 17 \cdot 23$ **e)** $60\,060 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

138. **a)** 101 on alkuluku **b)** $123 = 3 \cdot 41$ **c)** $341 = 11 \cdot 31$
d) 631 on alkuluku **e)** $979 = 11 \cdot 89$

139. Kolmella jaollisia ovat luvut 363, 11 106, 111 222 333 ja 99 000 999 450.
Yhdeksällä jaollisia ovat luvut 11 106, 111 222 333 ja 99 000 999 450.

140. **a)** 2:lla, kun *c* on 0, 2, 4, 6 tai 8
b) 5:llä, kun *c* on 0 tai 5
c) 10:llä, kun *c* on 0

141. Luku $1000a + 100b + 10c + d$ voidaan kirjoittaa muotoon $999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$, josta selviää kolmella (yhdeksällä) jaollisuus.

142. Pariton luku *k* voidaan esittää muodossa $k = 2p + 1$, $p \in \mathbf{Z}$. Tällöin
$k^2 - 1 = (k-1)(k+1) = (2p + 1 - 1)(2p + 1 + 1) = 2p(2p + 2) = 4p(p + 1)$.
Tulossa $4p(p+1)$ toinen tekijöistä p ja $p + 1$ on parillinen eli jaollinen luvulla kaksi. Näin ollen tulo $4p(p+1)$ eli luku $k^2 - 1$ on jaollinen kahdeksalla, kun *k* on pariton luku.

143. Väitteen todistamisessa voidaan käyttää apuna esimerkiksi taulukkokirjasta löytyvää polynomin jakoyhtälöä $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Sen mukaan $a - b$ on polynomin $a^n - b^n$ tekijä eli $a - b \mid a^n - b^n$. Jos tähän sijoitetaan $a = 10$ ja $b = -1$, saadaan $11 \mid 10^n - (-1)^n$. Kun *n* on parillinen, on $(-1)^n = 1$. Tästä seuraa a-kohdan väite $11 \mid 10^n + 1$. Vastaavalla tavalla *n*:n parittomilla arvoilla saadaan $(-1)^n = -1$, josta seuraa b-kohdan väite $11 \mid 10^n - 1$.

4. Jakoyhtälö

144. $718 = 143 \cdot 5 + 3$**.** Saadaan 143 pakkausta. Kolme palloa jää yli.

145. **a)** $322 = 21 \cdot 15 + 7$ **b)** $42\,537 = 123 \cdot 345 + 102$
c) $100\,111\,002 = 99\,911 \cdot 1002 + 180$

146. Kysytty luku on $93 \cdot 32 + 27 = 3\,003$.

147.
$$\begin{aligned} 658_{10} &= 8 \cdot 82 + 2 \\ &= 8 \cdot (8 \cdot 10 + 2) + 2 \\ &= 8 \cdot (8 \cdot (8 + 2) + 2) + 2 \\ &= 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8^0 \\ &= 1222_8 \end{aligned}$$

149. Jako tehtiin jollakin luvuista 21, 30, 35, 42, 70, 105 tai 210.

150. **a)** Koska $9\,876\,543 = 987\,654 \cdot 10 + 3$, jakojäännös on 3.
b) Koska $9\,876\,543 = 987\,65 \cdot 100 + 40 + 3$, jakojäännös on 3.
c) Koska $9\,876\,543 = 987\,654 \cdot 10 + 3$, jakojäännös on 3.

151. Koska $(3^{19} + 1) : (3^{12} - 6) = 3^7 + 13\,123$, jakojäännös on 13 123.

152. **a)** Merkki ⊗ on 0, 1 tai 2, koska kolmannen ja neljännen numeron yhdistelmä 1⊗ tarkoittaa kuukausia. Kun ⊗ = 1, jakoyhtälö saa muodon 301 191 200 = 9 715 845 · 31 + **5**, eli tällä arvolla tarkistusmerkki on oikea.

b) Merkki ⊗ voi olla 0, 1 tai 2, koska ensimmäisen ja toisen numeron yhdistelmä tarkoittaa päiviä.
Kun ⊗ = 2, jakoyhtälö saa muodon 230 704 133 = 7 442 068 · 31 + **25**. Saatua jakojäännöstä 25 vastaa tarkistusmerkki **T**.

5. Eukleideen algoritmi

153. **a)** 6 **b)** 1 **c)** 6 **d)** 2

154. **a)** 112 **b)** 1 008 **c)** 2 520

155. **a)** Koska lähtöväliaikojen 10, 12, 15 ja 24 pienin yhteinen jaettava on 120, seuraavan kerran kaikki junat ovat yhtä aikaa lähdössä kahden tunnin kuluttua eli kello 7:00.

b) Kaikki junat ovat yksitoista kertaa yhtä aikaa lähdössä.

156. **a)**
$$\begin{aligned} 150 &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 315 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ &\text{--------} \\ \text{syt} &= 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 252 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \\ 792 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \\ &\text{---------} \\ \text{syt} &= 2^2 \cdot 3^2 = 36 \end{aligned}$$

157. a) $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$
$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$
$819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
$---------$
$\text{syt} = 3^2 \cdot 13 = 117$

b) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
$189 = 3^3 \cdot 7$
$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$
$441 = 3^2 \cdot 7^2$
$---------$
$\text{syt} = 3 \cdot 7 = 21$

158. Lähdetään liikkeelle jakolaskun lopusta.
$\mathbf{2} \cdot 41 = 82$
$\mathbf{1} \cdot 82 + 41 = 123$
$\mathbf{1} \cdot 123 + 82 = 205$
$\mathbf{3} \cdot 205 + 123 = 738$
$\mathbf{1} \cdot 738 + 205 = 943$

Luvut ovat 943 ja 738.

159. a) Vuoden 2006 ensimmäinen päivä on **sunnuntai,** sillä $365 = 52 \cdot 7 + \mathbf{1}$.

b) Vuoden 2008 ensimmäinen päivä on **tiistai**, sillä $3 \cdot 365 = 3 \cdot 52 \cdot 7 + \mathbf{3}$.

c) Laskuissa otettava huomioon, että vuosi 2008 on karkausvuosi. Vuoden 2011 ensimmäinen päivä on **lauantai**, sillä $6 \cdot 365 + 1 = 6 \cdot 52 \cdot 7 + \mathbf{7}$.

160. a) $851 = 1 \cdot 667 + 184$
$667 = 3 \cdot 184 + 115$
$184 = 1 \cdot 115 + 69$
$115 = 1 \cdot 69 + 46$
$69 = 1 \cdot 46 + 23$
$46 = 2 \cdot \mathbf{23}$
$\text{syt}(851,\ 667) = 23$

$23 = 851 \cdot 11 + 667 \cdot (-14)$

b) $5768 = 3 \cdot 1545 + 1133$
$1545 = 1 \cdot 1133 + 412$
$1133 = 2 \cdot 412 + 309$
$412 = 1 \cdot 309 + 103$
$309 = 3 \cdot \mathbf{103}$
$\text{syt}(5768,\ 1545) = 103$

$103 = 5768 \cdot (-4) + 1545 \cdot 15$

c) $4\,757 = 2 \cdot 1769 + 1219$
$1769 = 1 \cdot 1219 + 550$
$1219 = 2 \cdot 550 + 119$
$550 = 4 \cdot 119 + 74$
$119 = 1 \cdot 74 + 45$
$74 = 1 \cdot 45 + 29$
$45 = 1 \cdot 29 + 16$
$29 = 1 \cdot 16 + 13$
$16 = 1 \cdot 13 + 3$
$13 = 4 \cdot 3 + \mathbf{1}$

$\text{syt}(4\,757,\ 1769) = 1$

$1 = 4\,757 \cdot (-550) + 1769 \cdot 1479$

161. a) $25 = 5^2$
$35 = 5 \cdot 7$
$45 = 3^2 \cdot 5$
$------$
$\text{pyj} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575$

b) $100 = 2^2 \cdot 5^2$
$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$----------$
$\text{pyj} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600$

162. a) $\frac{15)}{5}2 + \frac{5)}{15}4 + \frac{3)}{25}3 = \frac{59}{75}$

b) $\frac{43)}{216}1 + \frac{18)}{516}2 = \frac{79}{9288}$

c) $\frac{273)}{25}17 + \frac{105)}{65}12 - \frac{65)}{105}11 = \frac{5186}{6825}$

163. **a)** $1748 = 1 \cdot 1426 + 322$
$1426 = 4 \cdot 322 + 138$
$322 = 2 \cdot 138 + 46$
$138 = 3 \cdot \mathbf{46}$
syt = 46
pyj saadaan yhtälöstä
$46 \cdot \text{pyj} = 1426 \cdot 1748.$
pyj = 54 188

b) $105105 = 94864 + 10241$
$94864 = 9 \cdot 10241 + 2695$
$10241 = 3 \cdot 2695 + 2156$
$2695 = 1 \cdot 2156 + 539$
$2156 = 4 \cdot \mathbf{539}$
syt = 539
pyj saadaan yhtälöstä
$539 \cdot \text{pyj} = 94864 \cdot 105105.$
pyj = 18 498 480

164. Määritetään Eukleideen algoritmilla syt(34 086, 14 630).

$$\begin{aligned} 34\,086 &= 2 \cdot 14\,630 + 4\,826 \\ 14\,630 &= 3 \cdot 4\,826 + 152 \\ 4\,826 &= 31 \cdot 152 + 114 \\ 152 &= 1 \cdot 114 + 38 \\ 114 &= 3 \cdot 38 \end{aligned}$$

Jakoyhtälön perusteella syt(34 086, 14 630) = 38.
Määritetään seuraavana yhtälön 38 = 34 086*a* + 14 630*b* kertoimet *a* ja *b*.

$$\begin{aligned} 38 &= 152 - 114 \\ &= 152 - (4\,826 - 31 \cdot 152) \\ &= 32 \cdot 152 - 4\,826 \\ &= 32 \cdot (14\,630 - 3 \cdot 4\,826) - 4\,826 \\ &= 32 \cdot 14\,630 - 97 \cdot 4\,826 \\ &= 32 \cdot 14\,630 - 97 \cdot (34\,086 - 2 \cdot 14\,630) \\ &= -\mathbf{97} \cdot 34\,086 + \mathbf{226} \cdot 14\,630 \end{aligned}$$

syt(34 086, 14 630) = 38 sekä *a* = –97 ja *b* = 226.

165. Koska syt(*a*, *b*, *c*) = 7, voidaan kirjoittaa $a = 7 \cdot x$, $b = 7 \cdot y$ ja $c = 7 \cdot z$. Tällöin olisi $a + b + c = 7x + 7y + 7z = 7(x + y + z) = 1\,000$. Koska luku 1 000 ei ole jaollinen luvulla 7, summa *a* + *b* + *c* ei voi olla 1 000.

6. Diofantoksen yhtälö

166. **a)** syt(3, 4) = 1. Koska $1 = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1$, niin yhtälön eräs ratkaisu on $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$

b) syt(3, 4) = 1. Koska $2 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2$, on yhtälön eräs ratkaisu $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2. \end{cases}$

c) syt(3, 4) = 1. Koska $3 = 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 3$, on yhtälön eräs ratkaisu $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 3. \end{cases}$

d) Yhtälöllä 2*x* + 4*y* = 3 ei ole ratkaisua, koska syt(2, 4) ei ole 3:n tekijä.

167. **a)** syt(2, 3) = 1. Koska $1 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1$, niin yksittäinen ratkaisu on $x_0 = -1$ ja $y_0 = 1$.

Kaikki ratkaisut ovat tällöin $\begin{cases} x = -1 + n \cdot \frac{3}{1} = -1 + 3n \\ y = 1 - n \cdot \frac{2}{1} = 1 - 2n. \end{cases} \quad (n \in \mathbf{Z})$

b) syt(2, 3) = 1. Kun a-kohdan yhtälö $1 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1$ kerrotaan 5:llä, saadaan $5 = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 5$, josta nähdään yksittäiseksi ratkaisuksi $x_0 = -5$ ja $y_0 = 5$. Kaikki ratkaisut ovat näin ollen $\begin{cases} x = -5 + 3n \\ y = 5 - 2n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$

c) syt(91, 49) = 7. Kun yhtälö $7 = 91 \cdot (-1) + 49 \cdot 2$ kerrotaan luvulla 27, saadaan $189 = 91 \cdot (-27) + 49 \cdot 54$. Kaikki ratkaisut ovat tällöin

$$\begin{cases} x = -27 + n \cdot \frac{49}{7} = -27 + 7n \\ y = 54 + n \cdot \frac{91}{7} = 54 - 13n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$$

168. **a)** syt(18, 14) = 2. Tällöin $2 = 18 \cdot (-3) + 14 \cdot 4$ ja edelleen $4 = 18 \cdot (-6) + 14 \cdot 8$, josta havaitaan yksittäiseksi ratkaisuksi $x_0 = -6$ ja $y_0 = 8$. Diofantoksen yhtälön kaikki ratkaisut ovat tällöin $\begin{cases} x = -6 + n \cdot \frac{14}{2} = -6 + 7n \\ y = 8 - n \cdot \frac{18}{2} = 8 - 9n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$

b) Koska syt(33, 18) = 3, saadaan $3 = 33 \cdot (-1) - 18 \cdot (-2)$ ja edelleen kertomalla 35:llä $105 = 33 \cdot (-35) - 18 \cdot (-70)$. Ratkaisut ovat siis $\begin{cases} x = -35 + n \cdot \frac{-18}{3} = -35 - 6n \\ y = -70 - n \cdot \frac{33}{3} = -70 - 11n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$

c) syt(28, 36) = 4. Tällöin $4 = 28 \cdot 4 + 36 \cdot (-3)$ ja edelleen $8 = 28 \cdot 8 + 36 \cdot (-6)$. Kaikki ratkaisut ovat tällöin $\begin{cases} x = 8 + n \cdot \frac{36}{4} = 8 + 9n \\ y = -6 - n \cdot \frac{28}{4} = -6 - 7n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$

169. Yhtälö $10x + 4y = 36$ voidaan esittää muodossa $5x + 2y = 18$.

Koska syt(5, 2) = 1, saadaan $1 = 5 - 2 \cdot 2$ ja edelleen $18 = 5 \cdot 18 + 2 \cdot (-36)$.

Yhtälön kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 18 + n \cdot \frac{2}{1} = 18 + 2n \\ y = -36 - n \cdot \frac{5}{1} = -36 - 5n. \end{cases} (n \in \mathbf{Z})$

170. Tertun ostoksista saadaan yhtälö $1{,}95x + 2{,}45y = 31{,}30$, jossa x tarkoittaa halvemman ja y kalliimman kahvipaketin hintaa. Kertomalla tämä sadalla saadaan Diofantoksen yhtälö $195x + 245y = 3\,130$, sievennettynä $39x + 49y = 626$.

Koska syt(39, 49) = 1, saadaan $1 = 39 \cdot (-5) + 49 \cdot 4$ ja edelleen kertomalla luvulla 626 yhtälö $626 = 39 \cdot (-3\,130) + 49 \cdot 2\,504$.

Kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = -3\,130 + 49n \\ y = 2\,504 - 39n. \end{cases}$

Ehdoista $x > 0$ ja $y > 0$ seuraa $-3\,130 + 49n > 0$ ja $2\,504 - 39n > 0$. Ratkaisuna saadaan $63{,}9 < n < 64{,}2$, joten $n = 64$. Tällöin $x = -3130 + 49 \cdot 64 = 6$ ja $y = 2\,504 - 39 \cdot 64 = 8$.

Tertun ostoskori sisälsi 6 pakettia halvempaa ja 8 pakettia kalliimpaa kahvia.

171. Suoran yhtälö $2\,520x + 936y = 144$ saadaan luvulla 72 supistamalla muotoon $35x + 13y = 2$. Koska syt(35, 13) = 1, saadaan $1 = 35 \cdot 3 + 13 \cdot (-8)$ ja edelleen $2 = 35 \cdot 6 + 13 \cdot (-16)$.

Yhtälön kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 6 + n \cdot \frac{13}{1} = 6 + 13n \\ y = -16 - n \cdot \frac{35}{1} = -16 - 35n. \end{cases}$ $(n \in \mathbf{Z})$

Suora $2\,520x + 936y = 144$ kulkee siis pisteiden $\begin{cases} x = 6 + 13n \\ y = -16 - 35n \end{cases}$ $(n \in \mathbf{Z})$ kautta.

172. Lukujen 19 046 ja 15 622 syt on 214. Tämä luku voidaan lausua muodossa $214 = 19\,046 \cdot 32 + 15\,622 \cdot (-39)$, josta $29\,746 = 19\,046 \cdot 4\,448 + 15\,622 \cdot (-5\,421)$. Yhtälön kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 4\,448 + n\frac{15\,622}{214} = 4\,448 + 73n \\ y = -5\,421 - n\frac{19\,046}{214} = -5\,421 - 89n. \end{cases}$ $(n \in \mathbf{Z})$

173. Vähentämällä yhtälöt puolittain saadaan $3x + 2y = 5$. Luvulle syt(3, 2) = 1 pätee yhtälö $1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)$, josta saadaan muoto $5 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-5)$. Näin ollen yhtälön $3x + 2y = 5$ yleinen ratkaisu on $x = 5 + 2n$, $y = -5 - 3n$. Kun saadut x ja y sijoitetaan yhtälöparin jälkimmäiseen yhtälöön, saadaan $z = 20 + n$.

Siis $\begin{cases} x = 5 + 2n \\ y = -5 - 3n \\ z = 20 + n. \end{cases}$ $(n \in \mathbf{Z})$

7. Kongruenssit

174. **a)** Kongruenssi on tosi, sillä 89 – 25 = 64 on jaollinen 4:llä.
b) Kongruenssi ei ole tosi, sillä 89 – 98 = – 9 ei ole jaollinen 6:lla.
c) Kongruenssi ei ole tosi, sillä –243 – (–167) = – 76 ei ole jaollinen 7:lla.

175. **a)** Koska oletuksen mukaan $a \equiv b \pmod{n}$ ja $c \equiv d \pmod{n}$, on voimassa $a - b = pn$ ja $c - d = qn$, $(p, q \in \mathbf{Z})$. Laskemalla yhteen (vähentämällä) yhtälöt saadaan $(a \pm c) - (b \pm d) = n(p \pm q)$. Tulos osoittaa, että yhtälön vasen puoli on jaollinen n:llä. Näin ollen $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$.

b) Lähtien tiedosta, että $a \equiv b \pmod{n}$ ja $k \equiv k \pmod{n}$, saadaan $a - b = pn$ ja $k - k = qn$, $(p, q \in \mathbf{Z})$. Kun yhtälöt lasketaan yhteen (vähennetään), saadaan $(a \pm k) - (b \pm k) = n(p \pm q)$. Tulos osoittaa, että yhtälön vasen puoli on jaollinen n:llä, jolloin $a \pm k \equiv b \pm k \pmod{n}$.

Oletuksen mukaan $a \equiv b \pmod{n}$, jolloin $a - b = pn$. Kerrotaan yhtälö k:lla, minkä tuloksena $k(a - b) = k \cdot pn$ ja edelleen $ka - kb = n \cdot (kp)$. Saatu tulos osoittaa, että vasen puoli on jaollinen n:llä, jolloin voidaan kirjoittaa $ka \equiv kb \pmod{n}$.

176. Oletuksen mukaan $a \equiv b \pmod{n}$, jolloin $a - b = pn$. Kerrotaan yhtälö ensin *a*:lla ja sitten *b*:llä ja lasketaan saadut yhtälöt yhteen, jolloin $(a^2 - ab) + (ab - b^2) = npa + npb$ eli $a^2 - b^2 = n(pa + pb)$. Tulos osoittaa, että $a^2 - b^2$ on jaollinen *n*:llä. eli $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$. Seuraavaksi yhtälö $a^2 - b^2 = n(pa + pb)$ kerrotaan *a*:lla ja yhtälö $a - b = pn$ kerrotaan b^2:llä sekä lasketaan näin saadut yhtälöt yhteen. Tällöin saadaan $a^3 - b^3 = n(pa^2 + pab + pb^2)$, jonka perusteella $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$. Yleistämällä päästään tulokseen $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Toisin: Kongruenssin laskusäännön 3 (oppikirja s. 68) perusteella kongruenssin $a \equiv b \pmod{n}$ voi kertoa itsellään, jolloin saadaan $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$. Tämä voidaan edelleen kertoa kongruenssilla $a \equiv b \pmod{n}$, jolloin tuloksena on $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$. Yleistämällä päästään tulokseen $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

177. Koska $7 \equiv -1 \pmod{8}$, niin $7^{220} \equiv (-1)^{220} \equiv 1 \pmod{8}$. Jakojäännös on siis yksi.

178. Havaitaan, että $9 \equiv 2 \pmod{7}$ ja edelleen $9^9 \equiv 2^9 \pmod{7}$. Tämä tarkoittaa, että $7 \mid 9^9 - 2^9$ eli luku on jaollinen seitsemällä.

179. Koska $16 \equiv 1 \pmod{3}$, niin $16^7 \equiv 1^7 \equiv 1 \pmod{3}$. Vastaavasti $315 \equiv 0 \pmod{3}$ ja $315^{23} \equiv 0 \pmod{3}$. Tällöin $16^7 \cdot 315^{23} \equiv 0 \pmod{3}$. Pienin luku on nolla.

180. Luvun viimeinen numero saadaan selville tutkimalla kymmenellä jaollisuutta. Koska $1999 \equiv -1 \pmod{10}$, niin $1999^{2005} \equiv (-1)^{2005} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$. Luvun 1999^{2005} viimeinen numero on 9.

181. Kellonaika on sama kuin nyt, koska $1799\,368\,344 \equiv 0 \pmod{24}$.

182. Viikonpäivän selvittämiseksi voidaan käyttää joko jakoyhtälöä tai kongruenssia. Vuoden 2014 jouluaattoon mennessä on kaksi karkausvuotta (2008 ja 2012), joten päiviä kertyy kyseiselle aikavälille 3 652. Kongruenssiyhtälön $3\,652 \equiv x \pmod{7}$ ratkaisuna $x = 5$. Tämä tarkoittaa, että vuonna 2014 jouluaatto on keskiviikkona.

183. **a)** $x = 6 + 7n$, **b)** $x = 1 + 5n$, **c)** Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

184. **a)** Ratkaistaan Diofantoksen yhtälö $13x - 25y = 9$. Luvulle syt(13, 25) = 1 pätee yhtälö $1 = 13 \cdot 2 - 25 \cdot 1$ ja edelleen $9 = 13 \cdot 18 - 25 \cdot 9$. Tästä saadaan $x = 18 + n \cdot \frac{-25}{1} = 18 - 25n$.

b) Kongruenssista saadaan Diofantoksen yhtälö $11x - 40y = 8$. Ottamalla huomioon, että syt(11, 40) = 1 saadaan $1 = 11 \cdot 11 - 40 \cdot 3$ ja edelleen $8 = 11 \cdot 88 - 40 \cdot 24$. Kongruenssin ratkaisuna on $x = 88 + n \cdot \frac{-40}{1} = 88 - 40n$.

c) Ratkaistaan yhtälö $7x - 256y = 5$. syt(7, 256) = 1. Tällöin $1 = 7 \cdot (-73) - 256 \cdot (-2)$ ja edelleen $5 = 7 \cdot (-365) - 256 \cdot (-10)$. Kongruenssin ratkaisu on tällöin $x = -365 - 256n$ eli $x = 147 - 256n$.

185. Koska $6 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$, niin $6^{30} \equiv (-1)^{30} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$. Tiedetään, että $6 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$. Kerrotaan kongruenssit $6^{30} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ ja $6 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$ keskenään, jolloin saadaan $6^{31} \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 7)$.

186. Luku 200 300 400 on jaollinen yhdeksällä, sillä numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä. Siksi $200\,300\,403 \equiv 3 \pmod 9$. Koska $8 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 9)$, niin $8^{1999} \equiv (-1)^{1999} \equiv -1 \pmod 9$. Näin ollen $8^{1999} + 200\,300\,403 \equiv -1 + 3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$. Jakojäännös on 2.

187. $3^4 \equiv 81 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$, $3^{4n} \equiv (3^4)^n \equiv 1^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$,
$11 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$, $11^{3n+1} \equiv 1^{3n+1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$,
$3^{4n} - 11^{3n-1} \equiv 1 - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)$.
Saatu tulos osoittaa, että luku $3^{4n} - 11^{3n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, on jaollinen kymmenellä.

188. 1° Koska $10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, niin $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + ... + a_1 10 + a_0$
$\equiv a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + ... + a_1 \cdot 1 + a_0$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \pmod 3$.
Luku $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + ... + a_1 10 + a_0$ on jaollinen kolmella, jos ja vain jos $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ on jaollinen kolmella.

2° Koska $7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ ja $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, on
$7^{2502} + 2^{1573} \equiv 1^{2502} + (-1)^{1573} \equiv 1 - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, eli luku $7^{2502} + 2^{1573}$ on jaollinen kolmella.

189. Todistus etenee edellisen tehtävän kohdan 1° tavoin.

*8. Tunnettuja lukuteorian lauseita ja ongelmia

191. $6 = 1 + 2 + 3$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$
$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$

192. **a) 10**, $1 + 2 + 5 = 8$ (köyhä)
b) 12, $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ (rikas)
c) 20, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22$ (rikas)
d) 28, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ (täydellinen)
e) 220, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ (rikas)
f) 284, $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ (köyhä). Vertaa e- ja f-kohdan lukuja ja tuloksia!
g) 496, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$ (täydellinen)

193. 3, 7, 31, 127, 8 191, 131 071, 524 287 ja 2 147 483 647

194. $M_{61} = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$

$M_{89} = 618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111$

195. $M_{67} = 147\,573\,952\,202\,260\,970\,927$

196. Esimerkiksi:

a) 94 = 11 + 83

b) 130 = 41 + 89

c) 262 = 131 + 131

d) 1 970 = 541 + 1 429

197. **a)** Fermat'n pienen lauseen mukaan $3^{10} = 3^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$

b) Koska $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, niin $(3^{10})^6 \equiv 1^6 \pmod{11}$ eli $3^{60} \equiv 1 \pmod{11}$. Edelleen $3^{61} \equiv 3^{60} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{11}$.

198. Luku 2003 on alkuluku. Jos 2003 on luonnollisen luvun n tekijä eli $n = 2003k$, niin

$n^{2003} - n = (2003k)^{2003} - 2003k = k((2003k)^{2002} - 1) \cdot 2003 = s \cdot 2003$, jossa $s = k((2003k)^{2002} - 1)$ on kokonaisluku. Tällöin $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$.

Jos 2003 ei ole luvun n tekijä, niin Fermat'n pienen lauseen mukaan

$n^{2002} - 1 = 2003k$, $k \in \mathbf{Z}$. Tällöin $n^{2003} - n = n(n^{2002} - 1) = nk \cdot 2003$, jossa nk on kokonaisluku. Siis $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$. Näin väite on todistettu.

199. Fermat'n pienen lauseen perusteella $3^{12} = 3^{13-1} \equiv 1 \pmod{13}$. Edelleen $3^{996} = (3^{12})^{83} \equiv 1^{83} \equiv 1 \pmod{13}$. Koska $3^4 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, saadaan $3^{1000} = 3^{996} \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$. Jakojäännös on siis kolme.

200. Luvut ovat Pythagoraan lukuja, jos $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$. Sievennyksen tuloksena saadaan

$$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

ja edelleen

$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4.$$

Tulos osoittaa annetut luvut Pythagoraan luvuiksi.

Lisätehtäviä

Joukko-oppia

1. **a)** $\{0,1,2,3,4\}$

b) $\{1,2\}$. Yhtälöllä $x^2 + 4 = 0$ ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa.

2. Y on tyhjä joukko.

3. $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ ja $B = \{n \in \mathbf{Z} \mid |n| < 5\} = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

a) $A \cap B = \{2,4\}$

b) $A \cup B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,8,10,12,14\}$

c) $A \setminus B = \{6,8,10,12,14\}$

4. **a)** $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ **b)** $A \cap B = \{1,3,5,7\}$ **c)** $A \setminus B = \{2, 4, 6\}$

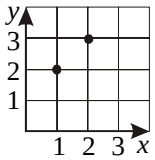
d) $B \setminus A = \varnothing$ **e)** $A \setminus \mathbf{N} = \varnothing$ **f)** $\mathbf{N} \setminus A = \{0, 8, 9, 10, 11, ...\}$

g) $A \setminus \varnothing = A$

5. **a)** $\varnothing$ **b)** $\varnothing, \{1\}$ **c)** $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ **d)** $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

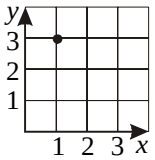
Osajoukkoja on 2^n kappaletta, kun n on joukon alkioiden lukumäärä.

6. **a)**



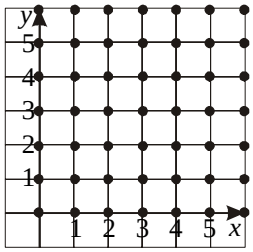
$S = \{(1,2), (2,3)\}$

b)

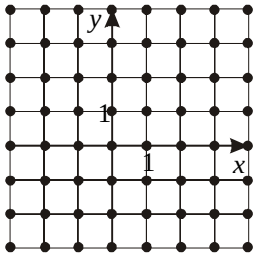


$T = \{(1,3)\}$

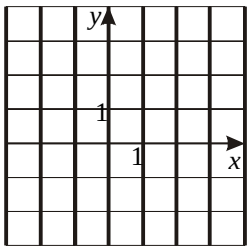
7. **a)**



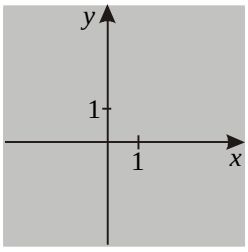
b)



c)



d)



Logiikkaa

1. **a)** epätosi propositio **b)** ei ole propositio

c) propositio, jonka totuus voi muuttua ilmaisuajankohdan mukaan

d) ei ole propositio **e)** tosi propositio

2. **a)** $B \Rightarrow A$ **b)** $\neg(A \wedge B)$ **c)** $B \Rightarrow \neg A$

3.

$\neg$	(	A	$\wedge$	B	)	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
e	*t*	*t*	*t*	***t***		*e*	*e*		*e*		
t	*t*	*e*	*e*	***t***		*e*	*t*		*t*		
t	*e*	*e*	*t*	***t***		*t*	*t*		*e*		
t	*e*	*e*	*e*	***t***		*t*	*t*		*t*		

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa de Morganin ensimmäisen lain oikeaksi.

4. **a)** Saku ei itke eikä naura. **b)** Äiti ei toru tai isä ei moiti

5.

(	P	$\vee$	Q	)	$\wedge$	$\neg$	P	$\Rightarrow$	Q
t	*t*	*t*		*e*	*e*		*e*	***t***	*t*
t	*t*	*e*		*e*	*e*		*e*	***t***	*e*
e	*t*	*t*		*t*	*t*		*t*	***t***	*t*
e	*e*	*e*		*e*	*t*		*t*	***t***	*e*
1	2	1		3	2		2	**4**	1

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa lauseen tautologiaksi.

6.

(A	$\Rightarrow$	B)	$\wedge$	(B	$\Rightarrow$	C)	$\Rightarrow$	(A	$\Rightarrow$	C)
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*
t	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*
t	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*
e	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
e	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*
e	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
e	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*
1	2	1	3	1	2	1	**4**	1	2	1

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa lauseen tautologiaksi.

7.

A	$\Rightarrow$	$\neg$	B
t	***e***	*e*	*t*
t	***t***	*t*	*e*
e	***t***	*e*	*t*
e	***t***	*t*	*e*
1	**3**	2	1

B	$\Rightarrow$	$\neg$	A
t	***e***	*e*	*t*
e	***t***	*e*	*t*
t	***t***	*t*	*e*
e	***t***	*t*	*e*
1	**3**	2	1

Vertaamalla taulukoiden lihavoidulla merkittyjä sarakkeita havaitaan lauseet $A \Rightarrow \neg B$ ja $B \Rightarrow \neg A$ yhtäpitäviksi.

8. **a)** Lause on tosi, sillä esimerkiksi 0 on ehdon täyttävä luku.
b) Lause on tosi, sillä x^4 on kaikilla reaaliarvoilla ei-negatiivinen.
c) Lause on epätosi. Yhtälö toteutuu vain, jos $x = 1$ ja $y = -1$. Jälkimmäinen luku ei ole luonnollinen luku.

9. **a)** $\exists x \in \mathbf{N} : x^3 > 1$**;** tosi
b) $\forall x \in \mathbf{R} : -x < 0$ **;** epätosi. Nollan ja negatiivisen luvun vastaluku ei ole negatiivinen.
c) $\forall x \in \mathbf{Q}\, \exists y \in \mathbf{Z} : xy \in \mathbf{Z}$ **;** tosi. Ehdon täyttävä luku y on esimerkiksi luvun $x \neq 0$ käänteisluku. Kun $x = 0$, luvuksi y sopii mikä kokonaisluku tahansa.

10. **a)** On olemassa reaaliluku, jonka neliö on negatiivinen. Lause on epätosi. Lauseen negaatio: Jokaisen reaaliluvun neliö on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla.
b) $\forall x \in \mathbf{Z} : x^2 > x$

11.

a)	$\exists x : (P(x) \wedge \neg P(x))$	ei missään ryhmässä
b)	$(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : (\neg P(x)))$	sekaryhmässä
c)	$\forall x : (P(x) \vee \neg P(x))$	kaikissa ryhmissä
d)	$(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : (\neg P(x)))$	samaa sukupuolta olevissa ryhmissä

Todistusmenetelmiä

1. Neljän peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summalle saadaan muoto $(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + (2k + 7) = 8k + 16 = 8(k + 2)$, $k \in \mathbf{Z}$**.** Tuloksesta $8(k + 2)$ nähdään kahdeksalla jaollisuus.

2. Päättely ei ole pätevä, sillä voin olla väsynyt muustakin syystä kuin liiasta lukemisesta.

3. Esitetään vastaväite, jonka mukaan $x < 0$. Tällöin $-x^2 < 0$ ja $2x < 0$ eli $-x^2 + 2x < 0$, mikä on vastoin oletusta. Koska vastaväite on väärä, väite on oikea.

4. *Oletus*: Luku $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

Väite: Luku $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku.

Todistus: Esitetään vastaväite, jonka mukaan luku $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on rationaaliluku. Tällöin on sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{m}{n}$. Ratkaistaan yhtälöstä $\sqrt{2}$, jolloin $\sqrt{2} = \dfrac{m-n}{m+n}$, jos $m \neq -n$.

Koska *m* ja *n* ovat kokonaislukuja, ovat $m - n$ ja $m + n$ kokonaislukuja. Myös niiden osamäärä eli luku $\sqrt{2}$ on rationaaliluku. Saatu tulos on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaväite on väärä ja väite oikea.

Tutkitaan vielä tapaus $m = -n$. Tällöin $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{m}{n} = -1$, josta edelleen $1 = -1$, mikä on mahdotonta. Näin on todistettu, että luku $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku.

5. Olkoot $a = \frac{m}{n}$ ja $b = \frac{p}{r}$ rationaalilukuja. Tässä m, n, p ja $r \in \mathbf{Z}$.

a) $a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{r} = \frac{mr + np}{nr}$ on rationaaliluku, koska kokonaislukujen summa, tulo ja osamäärä (jakaja $\neq 0$) ovat rationaalilukuja.

b) $a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} = \frac{mp}{nr}$ on rationaaliluku, koska kokonaislukujen tulo ja osamäärä ovat rationaalilukuja.

c) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} : \frac{p}{r} = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{p} = \frac{mr}{np}$ on rationaaliluku, koska kokonaislukujen tulo ja osamäärä ovat rationaalilukuja.

6. **a)** Päättely on pätevä. **b)** Päättely ei ole pätevä.

***7.** Huomautus: Tehtävän ratkaiseminen edellyttää logaritmiopin tietoja.

Irrationaaliluku on reaaliluku, jota ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Irrationaaliluvun desimaaliesitys on päättymätön ja jaksoton.

Oletus: *n* on pariton luonnollinen luku ja $\neq 1$.
Väite: $\log_2 n$ on irrationaaliluku
Todistus: Koska $n > 1$, niin $\log_2 n > 0$. Esitetään vastaväite, jonka mukaan $\log_2 n$ on rationaaliluku eli $\log_2 n = \frac{p}{r}$, jossa $p, r \in \mathbf{Z}_+$, $r \neq 0$. Tällöin $2^{\frac{p}{r}} = n$, josta potenssiin *r* korottamalla saadaan $(2^{\frac{p}{r}})^r = n^r \Leftrightarrow 2^p = n^r$. Koska *n* on oletuksen mukaan pariton, on myös n^r pariton. Toisaalta 2^p on parillinen. On päädytty ristiriitaan, joten vastaväite on väärä ja väite, että $\log_2 n$ on irrationaaliluku, on oikea.

***8.** Arvolla $n = 1$ yhtälö on tosi, sillä $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot (1+1)(1+2)}{3}$.

Oletetaan yhtälö todeksi, kun $n = k$, jolloin $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Osoitetaan yhtälö todeksi, kun $n = k + 1$.

$\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+...+k(k+1)}_{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}+(k+1)(k+2)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$. Saatu lauseke on sama kuin annetun kaavan oikea puoli arvolla $n = k+1$.

Induktioperiaatteen mukaan annettu yhtälö on tosi kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$.

Lukuteoriaa

1. **a)** $1110101_2 = 1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$
$= 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117$

b) $654321_7 = 6\cdot 7^5+5\cdot 7^4+4\cdot 7^3+3\cdot 7^2+2\cdot 7^1+1\cdot 7^0$
$= 100\,842+12\,005+1\,372+147+14+1 = 114\,381$

c) $8837{,}12_9 = 8\cdot 9^3+8\cdot 9^2+3\cdot 9^1+7\cdot 9^0+1\cdot 9^{-1}+2\cdot 9^{-2}$
$= 5\,832+648+27+7+\frac{1}{9}+\frac{2}{81} = 6\,514\frac{11}{81}$

d) $BCEF249_{16} = 11\cdot 16^6+12\cdot 16^5+14\cdot 16^4+15\cdot 16^3+2\cdot 16^2+4\cdot 16^1+9\cdot 16^0$
$= 184\,549\,376+12\,582\,912+917\,504+61\,440+512+64+9 = 198\,111\,817$

2. Muutetaan yhteenlaskettavat 10-järjestelmän luvuiksi.
$2042_5 = 2\cdot 5^3+0\cdot 5^2+4\cdot 5^1+2\cdot 5^0 = 250+20+5 = 272_{10}$
$6362_7 = 6\cdot 7^3+3\cdot 7^2+6\cdot 7^1+2\cdot 7^0 = 2\,058+147+42+2 = 2\,249_{10}$
$2042_5+6362_7 = 272_{10}+2\,249_{10} = 2\,521_{10}$

3. Luku 213 ei ole alkuluku, sillä $213 = 3\cdot 71$. Riittää, kun 213 jaetaan luvuilla 2 ja 3.

4. **a)** $1\,665 = 3^2\cdot 5\cdot 37$ **b)** $2\,346 = 2\cdot 3\cdot 17\cdot 23$
c) $12\,012 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ **d)** $83\,538 = 2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17$

5. **a)** Jos *m* on *n*:n tekijä ja *n* on *m*:n tekijä, niin on sellaiset kokonaisluvut *k* ja *p*, että $n = km$ ja $m = pn$. Näin ollen $n = km = kpn$. Yhtälö toteutuu vain, jos $n = 0$ tai $kp = 1$.

Jos $n = 0$, on $m = p\cdot 0 = 0$. Jos luvuille *k* ja *p* on voimassa ehto $kp = 1$, on joko $k = p = 1$ tai $k = p = -1$. Edellinen merkitsee, että $m = n$ ja jälkimmäinen $m = -n$, ja yhdistettynä, että $m = \pm n$.

b) Jos on olemassa luvut *k* ja *r* siten, että $n = km$ ja $p = rn$, niin $p = rkm$, mikä osittaa, että *m* on *p*:n tekijä.

6. Jakoyhtälö antaa tuloksen:
$1\,234 = 176\cdot 7+2$, $176 = 25\cdot 7+1$, $25 = 3\cdot 7+4$

Tällöin

$$1\,234_{10} = 176 \cdot 7 + 2 = (25 \cdot 7 + 1) \cdot 7 + 1 = 25 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0$$
$$= (3 \cdot 7 + 4) \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 3412_7$$

7. Lukujen syt $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, pyj $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 = 882\ 000$

8. **a)** syt(84,120) = 12, $12 = 84 \cdot 3 + 120 \cdot (-2)$
b) syt(77, 91) = 7, $7 = 77 \cdot 6 + 91 \cdot (-5)$
c) syt(4 757, 1 769) = 1, $1 = 4\,757 \cdot (-550) + 1\,769 \cdot 1\,479$

9. Jaetaan annetut luvut alkutekijöihin.

$29\,700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$
$1\,576\,575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
$1\,422\,960 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2$

syt $= 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$
pyj $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 = 832\,431\,600$

10. Ostoksista saadaan Diofantoksen yhtälö $99x + 113y = 3\,477$, jossa x tarkoittaa halvempien ja y kalliimpien laskinten kappalehintaa.
Koska syt(99, 113) = 1, saadaan $1 = 99 \cdot 8 + 113 \cdot (-7)$ ja edelleen
$3\,377 = 99 \cdot 27\,816 + 113 \cdot (-24\,339)$.
Yhtälön kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 27\,816 + 113n \\ y = -24\,339 - 99n, \end{cases}$ $n \in \mathbf{Z}$.

Ehdoista $x > 0$ ja $y > 0$ seuraa $27\,816 + 113n > 0$ ja $-24\,339 - 99n > 0$. Ratkaisuna saadaan $-246{,}2 < n < -245{,}8$, joten $n = -246$. Tällöin $x = 27\,816 + 113 \cdot (-246) = 18$ ja $y = -24\,339 - 99 \cdot (-246) = 15$.
Hankinta sisälsi 18 halvempaa ja 15 kalliimpaa laskinta.

11. **a)** Kongruenssi ei ole tosi, sillä 98 – 89 = 9 ei ole jaollinen luvulla 6.
b) Kongruenssi on tosi, sillä –102 – (–3) = –99 on jaollinen luvulla 11.

12. Koska $3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod 5$, niin $3^{2002} \equiv (3^2)^{1001} \equiv (-1)^{1001} \equiv -1 \equiv 4 \pmod 5$.
Jakojäännös on tällöin 4.

13. **a)** Ratkaistaan Diofantoksen yhtälö $153x - 12y = 6$. Luvulle syt(153, 12) = 3 pätee yhtälö $3 = 153 \cdot (-1) - 12 \cdot (-13)$ ja edelleen $6 = 153 \cdot (-2) - 12 \cdot (-26)$. Yhtälön $153 \equiv 6 \pmod{12}$ ratkaisuna on $x = -2 - 4n$, $n \in \mathbf{Z}$. Vastaus saadaan haluttaessa muotoon $x = -2 - 4(n-1) = 2 - 4n$, $n \in \mathbf{Z}$.

b) Kun yhtälö $x + 1 \equiv 3 \pmod 7$ kirjoitetaan muotoon $x \equiv 2 \pmod 7$, nähdään helposti ratkaisu $x = 2 + 7n$, $n \in \mathbf{Z}$.

c) Ratkaistaan Diofantoksen yhtälö $363x - 624y = 345$. Koska syt(363, 624) = 3, saadaan $3 = 363 \cdot (-55) - 624 \cdot (-32)$, josta edelleen kertomalla yhtälö 115:lla muoto $345 = 363 \cdot (-6\,325) - 624 \cdot (-3\,680)$. Yhtälön $363x \equiv 345 \pmod{624}$ ratkaisuna on $x = -6\,325 - 208n$, joka saadaan haluttaessa muotoon $x = -6\,325 - 208(-n - 31)$ $= 123 + 208n$, $n \in \mathbf{Z}$.

14. **a)** $x = 9$, sillä $13 \mid (256 - 9)$

b) $x = 0$, sillä $7 \mid 1001$

c) $x = 25$, sillä $5^3 \equiv 25 \pmod{100}$ ja edelleen $5^{12} \equiv (5^3)^4 \equiv 25^4 \equiv 25 \pmod{100}$

15. Koska n on pariton luku, ovat molemmat luvut $n - 1$ ja $n + 1$ parillisia, ja toinen niistä on jaollinen luvulla 4. Tällöin $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{8}$. Siis $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Pikatesti

1. **a)** $\{0, 3, 6, 9, 12\}$. Annetun joukon muodostavat kolmella jaolliset luonnolliset luvut.
b) {0, 2, 4, 6, 8, …}

2. **a)** $[-3, 5]$. Avoimeen väliin]3, 5[liitetään välin päätepisteet.
b) $[-3, 5[$. Suljetusta välistä $[-3, 5]$ poistetaan oikeanpuoleinen päätepiste.
c) $\{3, 5\}$. Kun suljetusta välistä poistetaan vastaava avoin väli, jää jäljelle välin päätepisteet.

3. Jos tänään on maanantai tai ulkona sataa, en halua mennä kouluun.

4. **a)** $\exists x \in \mathbf{R} : x > -1$ **b)** $\forall x \in \mathbf{R} : 1 \le x < 3$

5. **a)** $147 = 3 \cdot 7^2$ **b)** $285 = 3 \cdot 5 \cdot 19$
c) 541 on jaoton luku. Tutkitaan jaollisuutta luvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ja 23.

6. Väitetään, että ainakin yhden oppilaan kotimatka on yli kolme kilometriä. Mikäli tämä ei ole tosi, jokaisen oppilaan kotimatka olisi enintään kolme kilometriä. Silloin 25 oppilaan yhteenlaskettu kotimatka olisi enintään 75 kilometriä. Tämä on annetun tiedon mukaan mahdotonta, joten alkuperäinen väite kotimatkan pituudesta on totta.

7. Sadan päivän päästä lauantaista on maanantai, sillä $100 = 14 \cdot 7 + \mathbf{2}$.

8. **a)**
$24 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$\text{syt} = 2^2 \cdot 3 = 12$
$\text{pyj} = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

b)
$50 = 2 \cdot 5^2$
$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$
$225 = 3^2 \cdot 5^2$
$405 = 3^4 \cdot 5$
$\text{syt} = 5$
$\text{pyj} = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13 = 52\,650$

9. Koska $6 \equiv 1 \pmod{5}$ ja $126 \equiv 1 \pmod{5}$, niin $6^{12} \equiv 1^{12} \equiv 1 \pmod{5}$ ja $126^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{5}$. Tällöin $6^{12} \cdot 126^{10} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{5}$. Pienin luonnollinen luku on 1.

10. Koska luku 1 001 on jaollinen seitsemällä, pienin kongruenssin toteuttava luku on nolla.

Kertauskoe 1

1. Annetut joukot alkioittain lueteltuina ovat
$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) $\{7\}$ **b)** $\varnothing$ **c)** $\{7\}$

2. **a)** En ole lukiolainen.
b) Opiskelen matematiikkaa.
c) Olen lukiolainen ja opiskelen matematiikkaa.
d) Ei pidä paikkaansa, että olen lukiolainen enkä opiskele matematiikkaa

3.

$((A$	$\Rightarrow$	$C)$	$\wedge$	$(C$	$\Rightarrow$	$B))$	$\Rightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*
t	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*t*	***t***	*t*	*t*	*t*
t	*e*	*e*	*e*	*e*	*t*	*e*	***t***	*t*	*e*	*e*
e	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
e	*t*	*t*	*e*	*t*	*e*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*
e	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*t*	***t***	*e*	*t*	*t*
e	*t*	*e*	*t*	*e*	*t*	*e*	***t***	*e*	*t*	*e*

Lihavoidulla merkitty sarake osoittaa, että lause on tautologia.

4. **a)** $\exists x \in A\ \exists y \in B: x = y$, tosi
b) $\forall x \in A\ \forall y \in B: xy \in \mathbf{Z}_+$, tosi
c) $\exists x \in A \forall y \in B: x < y$, tosi

5. Väitetään, että ainakin yhdellä veljeksistä on enemmän kuin yksi hevonen. Mikäli tämä ei ole totta, jokaisella veljeksistä olisi enintään yksi hevonen. Silloin seitsemällä veljeksellä olisi yhteensä enintään seitsemän hevosta. Tämä on annetun perustiedon (10 hevosta) mukaan mahdotonta, joten jollakin veljeksistä täytyy olla enemmän kuin yksi hevonen.

6. $175_{10} = 10101111_2$
$43_{10} = 101011_2$
$93_{10} = 1011101_2$
$333_{10} = 101001101_2$

7. Etsitään ensin lukujen syt.

$1\,486\,660 = 1 \cdot 1\,319\,864 + 166\,796$
$1\,319\,864 = 7 \cdot 166\,796 + 152\,292$
$166\,796 = 1 \cdot 152\,292 + 14\,504$
$152\,292 = 10 \cdot 14\,504 + 7\,252$
$14\,504 = 2 \cdot 7\,252$

Lukujen syt on siis 7 252. Pyj saadaan yhtälöstä 7 252 · pyj = 1 486 660 · 1 319 864, jolloin pyj = 270 572 120.

8. **a)** Koska $2^2 \equiv -1 \pmod 5$, niin $2^{42} = (2^2)^{21} \equiv -1 \pmod 5$. Vastaavasti $7 \equiv 2 \pmod 5$, joten $2^{42} + 7 \equiv 1 \pmod 5$. Pienin luonnollinen luku on siis 1.

b) Havaitaan, että $52 \equiv -3 \pmod{11}$, $169 \equiv 4 \pmod{11}$ ja $87 \equiv -1 \pmod{11}$. Kun otetaan huomioon, että $169^9 \equiv 4^9 \equiv 3 \pmod{11}$ ja $87^7 \equiv -1 \pmod{11}$, saadaan kongruensseja muokkaamalla $52 \cdot (169^9 + 87^7) \equiv -6 \equiv 5 \pmod{11}$. Pienin luonnollinen luku on näin ollen 5.

***9.** Kaava on voimassa, kun $n = 1$, sillä $\frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1$. Oletetaan, että kaava on voimassa, kun $n = k$, jolloin $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$. Osoitetaan kaava oikeaksi, kun $n = k + 1$ eli että $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$.

Yhtälön vasen puoli saa muodon
$\frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$, joka on sama kuin yhtälön oikea puoli. Induktioperiaatteen mukaan kaava on voimassa kaikille $n \in \mathbf{Z}_+$.

Kertauskoe 2

1. **a)** $A \cup B =]-3, 2]$, $A \cap B =]-1, 1]$, $A \setminus B =]-3, -1]$
b) $A \cup B =]1, \infty[$, $A \cap B = [2, 5]$, $A \setminus B =]1, 2[$
c) $A \cup B =]-\infty, 4]$, $A \cap B = [0, 3]$, $A \setminus B =]-\infty, 0[\cup]3, 4]$

2. **a)** Jos Pertti on abiturientti, hän osallistuu ylioppilaskirjoituksiin.
b) Ei pidä paikkaansa, että Pertti on abiturientti eikä osallistu ylioppilaskirjoituksiin.

$A \Rightarrow B$
t ***t*** *t*
t ***e*** *e*
e ***t*** *t*
e ***t*** *e*

$\neg (A \wedge \neg B)$
t *t* *e* *e* *t*
e *t* *t* *t* *e*
t *e* *e* *e* *t*
t *e* *e* *t* *e*

Lihavoidulla tekstillä merkityt rivit osoittavat, että lauseilla on sama totuusarvo.

3. Merkitään *P*:n totuusarvoa *t*:llä ja *Q*:n totuusarvoa *e*:llä.

$(P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee Q)$
t t e ***e*** *e t e e*

Lause on epätosi.

4. Lihavoidulla merkitty kirjain (***e*** tai ***t***) ilmaisee lauseen totuusarvon.

I

a)	**b)**	**c)**	**d)**
$A \wedge B \Rightarrow C \wedge D$	$A \wedge B \Leftrightarrow C \wedge D$	$A \wedge B \Rightarrow C \vee D$	$A \wedge B \Leftrightarrow C \vee D$
t t t ***e*** *e e t*	*t t t* ***e*** *e e t*	*t t t* ***t*** *e t t*	*t t t* ***t*** *e t t*

II

a)	**b)**	**c)**	**d)**
$A \wedge B \Rightarrow C \wedge D$	$A \wedge B \Leftrightarrow C \wedge D$	$A \wedge B \Rightarrow C \vee D$	$A \wedge B \Leftrightarrow C \vee D$
t e e ***t*** *t e e*	*t e e* ***t*** *t e e*	*t e e* ***t*** *t t e*	*t e e* ***e*** *t t e*

5. **a)** Lause on epätosi. Kahden irrationaaliluvun summa ei ole aina irrationaaliluku, sillä esimerkiksi $\pi + (-\pi) = 0$. Yhteenlaskun tuloksena saatu luku on rationaaliluku.

b) Lause on epätosi, sillä kahden irrationaaliluvun tulo ei ole aina irrationaaliluku, esimerkiksi $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

6. $141_{10} = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 2031_4$

$152_{10} = 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 2120_4$

$2031_4 + 2120_4 = 10211_4$

$2031_4 \cdot 2120_4 = 11032320_4$

7. Ostoksista saadaan yhtälö $1{,}20x + 1{,}30y = 9{,}90$, jossa *x* tarkoittaa omenien ja *y* banaanien kilohintaa. Kertomalla yhtälö 10:llä saadaan Diofantoksen yhtälö $12x + 13y = 99$. Koska syt(12, 13) = 1, saadaan $1 = 12 \cdot (-1) + 13 \cdot 1$ ja edelleen kertomalla 99:llä yhtälö $99 = 12 \cdot (-99) + 13 \cdot 99$.

Kaikki ratkaisut ovat $\begin{cases} x = -99 + 13n \\ y = 99 - 12n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}$.

Ehdoista $x > 0$ ja $y > 0$ seuraa $-99 + 13n > 0$ ja $99 - 12n > 0$ eli yhdistettynä $7{,}6 < n < 8{,}3$, joten $n = 8$. Tällöin $x = 5$ ja $y = 3$.

Ostoksessa oli 5 kg omenoita ja 3 kg banaaneita.

8. **a)** $7 = 616 \cdot (-9) + 427 \cdot 13$ **b)** $1 = 1137 \cdot (-15) + 41 \cdot 416$

9. **a)** Käyttämällä hyväksi tietoa, että $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, saadaan $3^{256} = (3^4)^{64} \equiv 1^{64} \equiv 1 \pmod 5$.

b) Yhdistämällä tiedot $3^{512} = (3^{256})^2 \equiv 1 \pmod 5$ ja $3^2 \equiv 4 \pmod 5$ saadaan $3^{514} = 3^{512} \cdot 5^2 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 5$.

c) b-kohdan perusteella saadaan $3^{1024} = (3^{512})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 5$.