INTEGRAALILASKENTAA

Info s. 6-7

Historiaa

Leibniz 1600-1700-luvuilla

Newton

Kepler

torus

Yhdistyminen on alku,
yhdessä pysyminen on kehitystä,
työnteko yhdessä on menestystä.

Määritelmä

kirja s. 10

Lause

kirja s. 11

Esim 1. Funktion $f(x) = 4x^3$ eräs integraalifunktio on
x^4 tai x^4+1 tai x^4-3

$F(x) = x^4 - 3$, koska
$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$

Annetulla funktiolla voi olla useita integraalifunktioita.

Esim 2 Osoita, että funktio
$G: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ on funktion
$g: x \mapsto x - 3$ integraalifunktio.

Tod. $G'(x) = D\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x - 3 + 0$

$= x - 3 = g(x)$

$\square$

Esim 3 Onko $F(x) = \ln(x+2) - x^2$
funktion $f(x) = -\frac{2x}{x+2}$, $x > -2$,
integraalifunktio?

$F'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \cdot 2x$

$= \frac{1 - 2x(x+2)}{x+2}$

$= \frac{1 - 2x^2 - 4x}{x+2}$

$= \frac{-2x^2 - 4x + 1}{x+2} \neq -\frac{2x}{x+2} = f(x)$

$D \ln x = \frac{1}{x}$

$D \ln(s(x)) = \frac{1}{s(x)} \cdot s'(x)$

$s(x) = x + 2$

$s'(x) = 1$

V: Ei ole.

Integroimisvakio

Esim 4 Määritä funktion $f(x)=3x^2$ kaikki integraalifunktiot.

Ratk. $F(x)=x^3$

Eräs integraalifunktio on $F(x)=x^3+1$

Kaikki integraalifunktiot saadaan kaavasta $F(x)=x^3+C$, C kuuluu reaalilukujoukkoon, C on integroimisvakio

Piirrä kuvaajat: GG

$F(x)=x^3$

$F(x)=x^3-2$

$F(x)=x^3-4$

$F(x)=x^3+5$

Esim 5 Määritä integraalifunktioista $F(x)=x^3+C$ se, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(-1,-4)$ kautta.

108c) $f(x) = ?$

$f(x) = e^x$

x y

$(0, \frac{1}{2})$

$F(x) = e^x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

$y = e^x + C$

$\frac{1}{2} = e^0 + C$

$e^0 = 1$

$\frac{1}{2} = 1 + C$

$\frac{1}{2} - 1 = C$

$-\frac{1}{2} = C$

$C = -\frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{F(x) = e^x - \frac{1}{2}}}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

E1

$$\int (3x^2 - 1)\,dx$$
$$= \int 3x^2\,dx - \int 1\,dx$$
$$= x^3 - x + C$$

E2

$$\int x^5\,dx$$
$$= \frac{1}{5+1}x^{5+1} + C$$
$$= \frac{1}{6}x^6 + C$$

E3

$$\int (5x^9 - 4x^7)\,dx$$
$$= 5\int x^9\,dx - 4\int x^7\,dx$$
$$= 5\cdot\frac{1}{9+1}x^{9+1} - 4\cdot\frac{1}{7+1}x^{7+1} + C$$
$$= \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{10}_{\,2}}x^{10} - \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,2}}x^8 + C$$
$$= \frac{1}{2}x^{10} - \frac{1}{2}x^8 + C$$

E4

$$\int (3x - 2t)\,dx$$
$$= \int 3x\,dx - \int 2t\,\overset{\text{muuttuja}}{dx}$$
$$= 3\int x\,dx - 2\int \overset{\text{vakio}}{t}\,dx$$
$$= 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - 2tx + C$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - 2tx + C$$

E5

$$\int (\overset{\text{vakio}}{3x} - 2t)\,\overset{\text{muuttuja}}{dt}$$
$$= \int 3x\,dt - \int 2t\,dt$$
$$= 3\int x\,dt - 2\int t\,dt$$
$$= 3xt - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}t^2 + C$$
$$= 3xt - t^2 + C$$
$$= -t^2 + 3xt + C$$