Lukion

Calculus

1

MAA1 Funktiot ja yhtälöt
MAA2 Polynomifunktiot

Paavo Jäppinen Alpo Kupiainen Matti Räsänen

Otava

Opettajan aineisto

Sisällys

1. painos

Taitto: Paavo Jäppinen
Toimitus: Riitta Happonen

Painopaikka:
Otavan Kirjapaino Oy
Keuruu 2005
ISBN 951-1-19612-X

Alkusanat

Tämä aineisto liittyy pitkän matematiikan oppikirjaan **Lukion Calculus 1**:een ja se on tarkoitettu helpottamaan opettajan työtä ja nopeuttamaan tehtäviin tutustumista. Aineisto sisältää kurssien **Funktiot ja yhtälöt** ja **Polynomifunktiot** tehtävien ratkaisuja.

Lähes kaikkien tehtävien ratkaisut on esitetty. Mukaan ei kuitenkaan ole otettu aivan kaikkein helpoimpia tehtäviä, joissa harjoitellaan vain käsitteiden käyttöä ja jotka ovat melko mekaanisia. Sitä vastoin kaikki soveltamista, analysointia tai todistamista edellyttävät tehtävät on ratkaistu.

Tehtävien ratkaisuihin on pyritty liittämään sanallista selvitystä ja havainnollistavia piirroksia. Tavoitteena on, että myös oppilaat tottuvat esittämään tarpeelliset perustelut ja laatimaan vastauksensa niin, että siitä käy ilmi, miten ratkaisu on ajateltu. Tämä edellyttää usein juuri täydentävän sanallisen selvityksen käyttöä.

Tammikuussa 2005
Tekijät

Tehtävien ratkaisuja
Funktiot ja yhtälöt

Reaaliluvut

1 Lukualueet

6. **a)** Luonnollisia lukuja ovat $\sqrt{144} = 12$ ja $\frac{-2}{1-2} = 2$.

b) Kokonaislukuja ovat $\sqrt{144}$, $\frac{-2}{1-2}$ ja $-3^2 = -9$.

c) Rationaalilukuja ovat $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{144} = \frac{12}{1}$, $\frac{-2}{1-2} = \frac{-2}{-1}$ ja $-3^2 = \frac{-9}{1}$.

d) Irrationaalilukuja ovat $1-\pi$, $\sqrt{23}$ ja 0,21211211121112...

e) Kaikki esitetyt luvut ovat reaalilukuja.

7. Luku b on suurempi, sillä $a = 0,456\,370\,700\,700\,07\ldots$ ja $b = 0,456\,370\,770\,770\,7\ldots$

8. **a)** $4,44 = \frac{444}{100} = \frac{111}{25}$ **b)** $0,\overline{45} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

c) olkoon $x = 5,4\overline{5} = 5,4555\ldots$, jolloin $100x = 545,555\ldots$ ja $10x = 54,555\ldots$ Edelleen $100x - 10x = 90x = 491$. Tästä $x = \frac{491}{90}$.

9. Lukujen 0,102030405060708090... ja 0,112131415161718191... välillä olevia rationaalilukuja on äärettömän paljon. Esimerkiksi 0,11 on rationaalinen ja on ensimmäistä lukua suurempi ja jälkimmäistä pienempi. Samoin on 0,103; 0,111 jne.

10. Neliön lävistäjän d ja sivun a suhde on $\sqrt{2}$, joka on irrationaaliluku.

(Todistus: Luvut d ja a toteuttavat Pythagoraan yhtälön $a^2 + a^2 = d^2$, josta $\frac{d^2}{a^2} = \left(\frac{d}{a}\right)^2 = 2$ ja edelleen $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$. Jos saatu suhde olisi rationaalinen, olisi $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ eli jokin supistetuksi oletettu murtoluku. Ei voi olla $n = 1$, koska minkään kokonaisluvun neliö ei ole 2. Kuitenkin olisi $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2$, mutta tämä on mahdotonta, koska yhtälön vasen puoli ei supistu kokonaisluvuksi. Siis $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.)

***11.** Oletetaan, että laskimen antama likiarvo π:lle on $p = 3{,}141592654$. Luku $q = \dfrac{355}{113}$ on p:tä suurempi, sillä $q \approx 3{,}141592920$. Lasketaan, kuinka monta prosenttia q on p:tä suurempi

$$\frac{q-p}{p} \approx \frac{3{,}141592920 - 3{,}141592654}{3{,}141592654} \approx 0{,}0000085\ \%$$

***12.** **a)** $\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ ja $\dfrac{577}{408} = 1{,}41421568627\ldots$, joten $\sqrt{2}$:n likiarvo $\dfrac{577}{408}$ on kuuden numeron tarkkuudella oikea.

b) $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots$. Sen likiarvo on $\dfrac{2\,508\,429\,787}{798\,458\,000}$ $= 3{,}14159\ 26535\ 89794\ 32856\ldots$ Tästä nähdään, että likiarvossa on 14 oikeaa desimaalia eli 15 oikeaa numeroa.

Kysymyksessä olevan likiarvon on esittänyt itseoppinut intialainen matemaatikko Srinivasa Ramanujan (1887–1920) muodossa $\dfrac{355}{113}(1 - \dfrac{0{,}0003}{3533})$. Ramanujanilla oli pettämätön intuitio luvuista ja lukusuhteista, ja kyseinen likiarvo on vain yksi monista hänen esittämistään π:n likiarvoista.

***13.** Kertolasku ja jakolasku ovat määriteltyjä annetussa lukujoukossa $A = \{-1,0,1\}$. Yhteenlasku ei ole määritelty joukossa *A*, sillä esimerkiksi summan $-1 + (-1)$ arvo ei ole *A*:ssa. Myöskään vähennyslasku ei ole määritelty joukossa *A*, sillä esimerkiksi erotuksen $-1 - 1$ arvo ei kuulu lukujoukkoon *A*.

Kertolasku on määritelty *A*:ssa, sillä minkä tahansa kahden *A*:n alkion (vaikka samojenkin) tulo on *A*:n alkio. Sanotusta syystä myös jakolasku on määritelty *A*:ssa. Luonnollisesti suljetaan pois tapaus, jolloin jakajana on nolla.

***14.** Alkuluku on jaoton positiivinen kokonaisluku eli sellainen luonnollinen luku, joka on jaollinen vain luvulla 1 ja itsellään. Lukua 1 ei pidetä alkulukuna, joten pienin alkuluku on 2.

Toistaiseksi (joulukuu 2004) suurin tunnettu alkuluku on luku $2^{24\,036\,583} - 1$. Siinä on 7 235 733 numeroa. Ajatellaan, että luku kirjoitettaisiin A4-arkeille niin, että yhdelle arkille tulee 2 500 numeroa. Luvun esittämiseen tarvittaisiin silloin kaikkiaan 2 895 arkkia! Jos nämä kiinnitetään vierekkäin sopivalle alustalle, tulee paperijonon kokonaispituudeksi noin 608 metriä.

Esimerkiksi internetosoitteesta http://www.utm.edu/research/primes/largest.html löytyy mielenkiintoista tietoa alkuluvuista. Alkulukuja käsitellään myös Lukion Calculus-sarjan oppikirjassa syventävällä kurssilla Lukuteoria ja logiikka.

2 Laskulait, vastaluku ja käänteisluku

21. Summa –99 + (–98) + (–97) + … + 97 + 98 + 99 + 100 voidaan laskea helposti soveltamalla yhteenlaskun vaihdanta- ja liitäntälakeja. Summa kirjoitetaan muotoon (–99 + 99) + (–98 + 98) + (–97 + 97) + … + (–1 + 1) + 0 +100, josta nähdään arvo 100.

22. Luvut, jotka ovat käänteislukunsa kanssa samoja, ovat 1 ja –1.

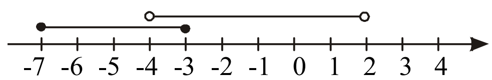
23. Luvun a ja sen vastaluvun $-a$ summa on $a + (-a) = 0$, erotus $a - (-a) = 2a$, tulo $a \cdot (-a) = -a^2$ ja osamäärä $\dfrac{a}{-a} = -1$.

24. **a)** $a - b + (b - a) = a - a + b - b = 0$, joten luvut $a - b$ ja $b - a$ ovat toistensa vastalukuja.
b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{a \cdot b}{b \cdot a} = \dfrac{ab}{ab} = 1$, joten $\dfrac{a}{b}$ ja $\dfrac{b}{a}$ ovat toistensa käänteislukuja, kun $a, b \neq 0$.

***25. a)** $a(1+\dfrac{b}{a}) = a + a \cdot \dfrac{b}{a} = a + b$. Koska a ja b ovat toistensa vastalukuja, summa on 0.
b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} + \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b+a}{ab}$. Koska a ja b ovat toistensa käänteislukuja, on $ab = 1$, joten lauseke sievenee muotoon $b + a = a + b$.

3 Lukujen suuruusjärjestys

30. **a)** Pituuksien suhde on $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
b) Yhteisen välin pituus on 1.



32. **a)** Kun kahteen lukuun lisätään sama luku, alkuperäinen suuruusjärjestys säilyy. Epäyhtälömerkin suunta säilyy, kun epäyhtälön molempiin puoliin lisätään sama luku. Esimerkki: $-5 < 3$. Silloin pätee vaikkapa $-5 + 4 < 3 + 4$ eli $-1 < 7$.

b) Kahden positiivisen luvun tulo on aina positiivinen. Esimerkki: $2 > 0$ ja $5 > 0$. Silloin pätee $2 \cdot 5 > 0$ eli $10 > 0$.

33. **a)** Epäyhtälö $m + 1 > m$ pätee kaikille reaaliluvuille m, koska se on yhtäpitävä identtisesti toden epäyhtälön $1 > 0$ kanssa.
b) Epäyhtälö $m + m > m$ ei päde aina, sillä esimerkiksi mikään negatiivinen reaaliluku ei toteuta sitä.
c) Yhtälö $\dfrac{m}{m} = 1$ pätee aina, kun se on määritelty eli kaikilla $m \neq 0$.

34. Kun $F = \dfrac{9}{5}C + 32$, niin $C = \dfrac{5}{9}F - \dfrac{160}{9}$. Kun $F = 54$, on $C \approx 12{,}2$, ja kun $F = 82$, on $C \approx 27{,}8$. Kun Fahrenheit-lukemat ovat välillä $54° < F < 82°$, ovat vastaavat Celsius-lukemat välillä $12{,}2° < C < 27{,}8°$.

***35.** Jos a ja b ovat kaksi rationaalilukua, niin ainakin keskiarvo eli luku $c = \dfrac{a+b}{2}$ on niiden välissä. Ensinnäkin kyseinen luku on rationaaliluku. Sillä jos $a = \dfrac{m}{n}$ ja $b = \dfrac{p}{q}$ (m, n, p ja q ovat kokonaislukuja, n, $q \neq 0$), niin $c = \dfrac{mq+np}{2nq} \in \mathbf{Q}$. Oletetaan, että $a < b$. Silloin $2a < a+b$, joten $a < c$. Samoin $a+b < 2b$, joten $c < b$.

***36.** **a)** Pienin ei-negatiivinen reaaliluku on 0.

b) Koska väli $[0,1]$ on suljettu, sen suurin luku on 1.

c) Välillä $[0,1[$ ei ole suurinta lukua. Jos se olisi luku b, niin olisi $b < 1$. Mutta silloin luku $\dfrac{b+1}{2}$ olisi sekä b:tä suurempi että lukua 1 pienempi, joten b ei voi olla suurin ko. välillä.

4 Itseisarvo

42. Oletetaan, että $a \neq 0$. Silloin

a) $|a| > 0$ on tosi, koska aina $|a| \geq 0$ ja $|a| = 0$ vain, kun $a = 0$

b) $a > -a$ on epätosi, sillä esimerkiksi a:n arvolla –1 pätee $a < -a$

c) $|a| = |-a|$ on tosi, koska vastalukujen itseisarvot ovat yhtä suuret

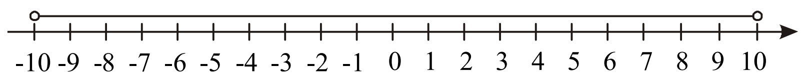
d) $-(-a) = |a|$ eli $a = |a|$ on epätosi esimerkiksi a:n arvolla –1

43. **a)** $|x| = 100$, kun $x = -100$ tai $x = 100$

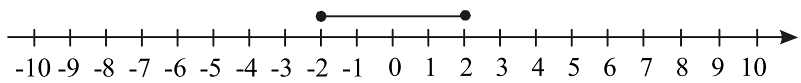
b) $|x+1| = 3$, kun $x + 1 = -3$ tai $x + 1 = 3$. Näistä $x = -4$ tai $x = 2$

c) $|x-1| = 5$, kun $x - 1 = -5$ tai $x - 1 = 5$. Näistä $x = -4$ tai $x = 6$

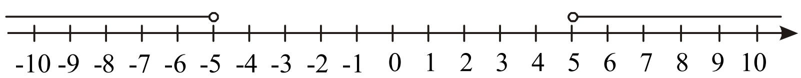
44. **a)** $|x| < 10$, kun $-10 < x < 10$



b) $|x| \leq 2$, kun $-2 \leq x \leq 2$



c) $|x| > 5$, kun $x < -5$ tai $x > 5$



45. Lukusuoran pisteiden a ja b välimatka on $b - a$, jos $a < b$. Jos taas $a > b$, välimatka on $a - b$. Kummassakin tapauksessa välimatka on $|a-b|$. Tulos pätee myös tapauksessa $a = b$.

46. Koska luvun itseisarvo ei ole negatiivinen, niin $|a+2| + |5-b| = 0$ vain, jos $a + 2 = 0$ ja $5 - b = 0$. Saadaan $a = -2$ ja $b = 5$.

Yhtälö ja epäyhtälö

2 Ensimmäisen asteen yhtälö

53. Kirjoitetaan yhtälö $\frac{3}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3+a}{2+4}$ ensin muotoon $\frac{6+a}{4}=\frac{3+a}{6}$. Ristiin kertomalla saadaan 36 + 6a = 12 + 4a, josta 2a = –24 ja a = –12.

54. **a)** $ab = cd \Leftrightarrow a=\frac{cd}{b}$ **b)** $\frac{a}{b}=c \Leftrightarrow a = bc$

c) $bad = c \Leftrightarrow a=\frac{c}{bd}$ **d)** $\frac{ac}{b}=\frac{1}{d} \Leftrightarrow a=\frac{b}{cd}$

55. a) $F = ma \Leftrightarrow a=\frac{F}{m}$ **b)** $s=\frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow a=\frac{2s}{t^2}$

c) $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}at^2 = s-v_0t \Leftrightarrow a=\frac{2(s-v_0t)}{t^2}$

56. Olkoon Jaanan palkka x euroa. Annettujen tietojen perusteella saadaan yhtälö $x=\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{5}+276$ €, jonka ratkaisuna x = 720 €.

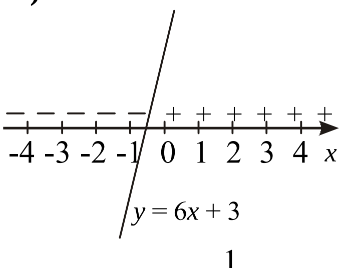
57. Koska yhtälön 6x – 6 – 2ax = 5 – x ratkaisu on x = –1, on –6 – 6 + 2a = 5 + 1, josta 2a = 18 ja a = 9.

58. Olkoon reitin pituus x. Paikallisjunan tähän matkaan käyttämä aika on puoli tuntia pitempi kuin pikajunan käyttämä, mistä saadaan yhtälö $\frac{x}{80\text{ km/h}}-0{,}5\text{ h}=\frac{x}{100\text{ km/h}}$. Matkan pituudeksi tulee $x = 200$ km.

59. Jaettava on jakaja kertaa vaillinainen osamäärä plus jakojäännös. Tämän mukaan saadaan yhtälö $x=4(x-500)+8$, jonka ratkaisuna on x = 664.

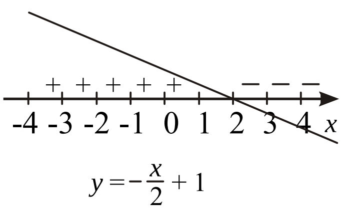
3 Ensimmäisen asteen epäyhtälö

64. **a)**



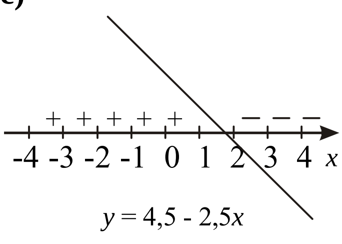
nollakohta $x=-\frac{1}{2}$

b)



nollakohta x = 2

c)



nollakohta x = 1,8

66. $\frac{x}{3}-\frac{x-3}{2}<x+\frac{x+6}{3} \quad \Big|\cdot 6$

$$\begin{aligned} 2x-3(x-3) &< 6x+2(x+6) \\ 2x-3x+9 &< 6x+2x+12 \\ -9x &< 3 \\ x &> -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

67. Nouseva suora $y=\frac{1}{3}x+b$ on x-akselin yläpuolella heti nollakohtansa jälkeen. Siis nollakohta on $x=-\frac{1}{3}$. Saadaan yhtälö $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0$, josta $b=\frac{1}{9}$.

68. Olkoon x pienin tehtävän mainitsemista kokonaisluvuista. Silloin

$$\begin{aligned} x+(x+1)+(x+2)+(x+3) &> 1\,000 \\ 4x &> 994 \\ x &> 248{,}5. \end{aligned}$$

Pienin kokonaisluvuista on siis 249, ja seuraavat 250, 251 ja 252.

69. Epäyhtälön $\frac{x}{3}>\frac{x}{2}-\frac{5}{6}$ ratkaisu on $x<5$, jolloin suurin ehdon täyttävä kokonaisluku on 4.

70. Lukujen $2x+1$ ja $x+3$ erotus on $2x+1-(x+3)=x-2$. Kun $x>2$, erotus on positiivin. Siitä voidaan päätellä, että $2x+1$ on suurempi kuin $x+3$.

71. **a)** $|3-x|=|x-3|=\begin{cases}-x+3, \text{ kun } x<3 \\ x-3, \text{ kun } x\geq 3\end{cases}$

b) $|4-2x|=|2x-4|=\begin{cases}-2x+4, \text{ kun } x<2 \\ 2x-4, \text{ kun } x\geq 2\end{cases}$

c) $x+|x-1|=\begin{cases}x-x+1, \text{ kun } x<1 \\ x+x-1, \text{ kun } x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}1, \text{ kun } x<1 \\ 2x-1, \text{ kun } x\geq 1\end{cases}$

d) $5+|5x+5|-5x=\begin{cases}5-5x-5-5x, \text{ kun } x<-1 \\ 5+5x+5-5x, \text{ kun } x\geq -1\end{cases}=\begin{cases}-10x, \text{ kun } x<-1 \\ 10, \text{ kun } x\geq -1\end{cases}$

72. Olkoon x ajokilometrien määrä. Annettujen tietojen perusteella saadaan epäyhtälö $16\,800 + 0{,}12x > 19\,300 + 0{,}07x$, jonka ratkaisuna $x > 50\,000$ (km).

73. **a)** Kokonaispinta-alalle saadaan ehto $2\cdot 24+2\cdot 18x+2\cdot 12x<228$, josta $x<3$. Koska särmän pituuden pitää olla nollaa suurempi, tulee vastaukseksi $0<x<3$.

b) Tilavuudelle saadaan ehto $6\cdot 4\cdot 3x\geq 360$, josta $x\geq 5$.

3 Prosenttilasku

74. Tyttöjä oli $\dfrac{1\,855}{4\,216+1\,855}=\dfrac{1\,855}{6\,071}\approx 0{,}306=30{,}6\,\%$.

75. Mari sai mehua $(1-0{,}18)\cdot 24\text{ kg}=0{,}82\cdot 24\text{ kg}\approx 19{,}7\text{ kg}$.

76. **a)** 0,025 · 1 500 € = 37,50 €. Koska prosenttiarvo on pienempi kuin 48 €, korotukseksi tulee 48 €, jolloin uusi kuukausipalkka on 1 548 €.

b) 0,025 · 4 050 € = 101,25 €. Uusi kuukausipalkka on 4 151,25 €.

77. **a)** Sinkin määrä esineessä on $0{,}30\cdot 680\text{ g}=204\text{ g}$, joten nikkeliä on $680\text{ g}-(374\text{ g}+204\text{ g})=102\text{ g}$.

b) Nikkelin osuus on $\dfrac{102\text{ g}}{680\text{ g}}=0{,}15=15\ \%$.

78. **a)** Väestökato oli $10\,250-10\,000=250$ henkilöä eli $\dfrac{250}{10\,250}\approx 0{,}024=2{,}4\ \%$.

b) Väkiluvun pitäisi kasvaa 250 henkilön verran eli $\dfrac{250}{10\,000}=0{,}025=2{,}5\ \%$.

79. Olkoon vuokra ennen korotusta x euroa. Korotuksen jälkeen se on $1{,}025\,x = 436{,}60$ euroa. Tästä $x = 425{,}95$ €.

80. Alentamaton hinta x saadaan yhtälöstä $0{,}75x = 14{,}70$ €, josta $x=\dfrac{14{,}70}{0{,}75}$ €

$\approx 19{,}60$ €.

81. Drinkin alkoholipitoisuus on $\dfrac{0{,}40\cdot 5\text{ cl}+0{,}125\cdot 10\text{ cl}}{5\text{ cl}+10\text{ cl}+35\text{ cl}}=0{,}065=6{,}5\,\%$.

82. Seoksen kultapitoisuus on $\dfrac{0{,}825\cdot 150\text{ g}+0{,}625\cdot 350\text{ g}}{150\text{ g}+350\text{ g}}=0{,}685=685\ ‰$.

83. Olkoon x tarvittava määrä sokerijuurikkaita. Merkitään sen ja sokeriliuoksen sisältämät sokerimäärät yhtä suuriksi: $0{,}18x=0{,}10\cdot 10\text{ t}$. Tästä $x\approx 5{,}6\text{ t}$.

84. Maire sai leivästä ja margariinista rasvaa yhteensä $0{,}059\cdot 100\text{ g}+0{,}60\cdot 30\text{ g}=23{,}9\text{ g}$. Merkitsemällä riisin määrää x:llä saadaan yhtälö $0{,}009x=23{,}9\text{ g}$, jonka ratkaisuna $x\approx 2{,}7\text{ kg}$.

85. Olkoon maassa $100a$ asukasta. Tällöin ranskaa puhuvia on $74a$ ja saksaa puhuvia $62a$ eli yhteensä $136a$, joten kahta kieltä puhuvia on $36a$. Tämä on 36 % asukasmäärästä $100a$.

86. Olkoon television alkuperäinen hinta x. Alennusten perusteella saadaan yhtälö

$0{,}98\cdot 0{,}90x=838$ €, jonka ratkaisuna $x=\dfrac{838}{0{,}98\cdot 0{,}90}$ € ≈ 950 €.

87. Uusi myyntihinta oli $1{,}06^3 \cdot 1\,550$ € $\approx 1\,846{,}07$ €. Se oli 296,07 € eli $\dfrac{296{,}07}{1\,550}$ $\approx 0{,}191 = 19{,}1$ % suurempi kuin alkuperäinen hinta. Vertailuprosentin näkee suoraan vertaamalla lukua $1{,}06^3 \approx 1{,}191$ lukuun 1.

88. Olkoon maitomäärä x kg. Siinä on rasvaa $0{,}048x$ kg. Koska kuorittuun maitoon jää rasvaa 0,1 % eli $0{,}001x$ kg, kermaan on käytettävissä rasvaa $0{,}047x$ kg. Tämä on 35 % kerman määrästä, joten $0{,}047x = 0{,}35 \cdot 1{,}0$ kg. Ratkaisuna saadaan tarvittava maitomäärä $x \approx 7{,}4$ kg.

89. Ajatellaan, että kukkapenkissä on $100a$ kasvia. Voikukkia niistä on $0{,}54 \cdot 0{,}61 \cdot 100a$ $\approx 33a$, mikä on 33 % kukkapenkin kasveista.

90. **a)** Työttömyys lisääntyi 80 henkilöllä eli prosentuaalisesti $\dfrac{80}{180} \approx 44{,}4$ %.

b) Paikkakunnan työntekijämäärä $x = 2\,000$ saadaan yhtälöstä $0{,}09x = 180$. Uusi työttömien määrä on 260 eli $\dfrac{260}{2\,000} = 0{,}13 = 13$ %. Uusi työttömyysprosentti on siis 13, joten työttömyys kasvoi 4 prosenttiyksikköä.

91. **a)** Jos makkaran vanha yksikköhinta on a, on korotuksen jälkeinen hinta $1{,}15a$. Olkoon alkuperäinen kulutus b ja uusi kulutus x. Koska makkaramenot säilyvät ennallaan, saadaan uuden kulutuksen x laskemiseksi yhtälö $ab = 1{,}15a \cdot x$, josta

$x = \dfrac{ab}{1{,}15a} \approx 0{,}870b$. Näin ollen kulutusta on vähennettävä 13,0 %.

b) Yhtälöstä $x \cdot 1{,}15a = a$ saadaan kertoimen x arvoksi $x = \dfrac{a}{1{,}15a} = 0{,}870$. Tästä voidaan hinnan laskuksi päätellä 13,0 %.

92. Merkitään osakepääomaa kirjaimella p. Korotuksen jälkeen pääoma oli $1{,}5p$. Voitto edellisenä vuonna oli $t - m = 0{,}1p$, jossa t tarkoittaa tuloja ja m menoja. Tulot ja menot kasvoivat 20 %, joten voitto oli nyt $1{,}2t - 1{,}2m = 1{,}2(t-m) = 1{,}2 \cdot 0{,}1p = 0{,}12p$. Tämä on korotetusta pääomasta $\dfrac{0{,}12p}{1{,}5p} = 0{,}08 = 8$ %.

93. Jos seuramatkan hinta on $100a$, lennon osuus siitä on $50a$ ja polttoainekustannukset $0{,}30 \cdot 50a = 15a$. Hinnan nousun jälkeen polttoainekustannus on $1{,}1 \cdot 15a = 16{,}5a$. Matkan kokonaishinta nousee näin ollen $1{,}5a$:n verran eli 1,5 %.

94. Todellinen matka s lasketaan yhtälöstä $1{,}05s = 205$ km. Tästä $s \approx 195{,}24$ km, jolloin keskinopeus on $\dfrac{195{,}24 \text{ km}}{2\frac{2}{3} \text{ h}} \approx 73{,}2$ km / h.

95. Otetaan päärynämehua määrä a ja omenamehua määrä b. Sokerin määrästä saadaan yhtälö $0{,}14a + 0{,}07b = 0{,}11(a + b)$ eli $0{,}03a = 0{,}04b$. Sekoitussuhde on $a : b = 4 : 3$.

Potenssit ja juuret

1 Potenssi

106. Talonpoikia 7, kissoja 7 · 7, syötyjä hiiriä 7 · 7 · 7, syötyjä tähkiä 7 · 7 · 7 · 7 ja syötyjä jyviä $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16\,807$.

107. **a)** $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$ **b)** $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$

c) $x^n x^{2n} x^{3n} = x^{n+2n+3n} = x^{6n}$ **d)** $\left(\dfrac{x^{n+2}}{x^n}\right)^2 = (x^{n+2-n})^2 = (x^2)^2 = x^4$

e) $(n^n)^n = n^{n \cdot n} = n^{n^2}$ **f)** $3^n \cdot 3^n \cdot 3^n = 3^{n+n+n} = 3^{3n} = (3^3)^n = 27^n$

108. **a)** $l^5 m^5 n^5 = (lmn)^5 = 2^5 = 32$ **b)** $(m^{-6})^6 (m^{-5})^{-5} = m^{-36} m^{25} = m^{-11} = \dfrac{1}{m^{11}} = \dfrac{1}{8}$

c) $l^3 m^{14} n^3 = (lmn)^3 m^{11} = 2^3 \cdot 8 = 64$

109. Kun kuution särmä on a, tilavuus on a^3.

a) Kun särmä on $\dfrac{a}{2}$, tilavuus on $\dfrac{a^3}{8}$ eli tilavuus tulee $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$-kertaiseksi.
b) Kun särmä on $2a$, tilavuus on $8a^3$ eli tilavuus tulee 8-kertaiseksi.
c) Kun särmä on $3a$, tilavuus on $27\,a^3$ eli tilavuus tulee 27-kertaiseksi.
d) Kun särmä on $10a$, tilavuus on $1\,000\,a^3$ eli tilavuus tulee 1 000-kertaiseksi.

110. **a)** $\dfrac{1{,}39 \cdot 10^9\ \text{m}}{1{,}27 \cdot 10^7\ \text{m}} \approx 109{,}4$. Auringon halkaisija on noin 109-kertainen Maan halkaisijaan verrattuna.
b) $\dfrac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} \approx 333\,333$. Auringon massa on noin 333 000-kertainen Maan massaan verrattuna.

111. Elektronin nopeus 2,18 Mm/s = $2{,}18 \cdot 10^6 \cdot 3{,}6$ km/h = 7 848 000 km/h on noin kymmenkertainen Auringon nopeuteen 792 000 km/h verrattuna.

112. $5^{100} \approx 7{,}8886 \cdot 10^{69}$

$5^{200} = (5^{100})^2 \approx (7{,}88861 \cdot 10^{69})^2 \approx 62{,}230 \cdot 10^{138} = 6{,}2230 \cdot 10^{139}$

$5^{1000} = (5^{200})^5 \approx (6{,}22302 \cdot 10^{139})^5 = 9332{,}6 \cdot 10^{695} = 9{,}3326 \cdot 10^{698}$

$5^{2000} = (5^{1000})^2 \approx (9{,}3326 \cdot 10^{698})^2 = 87{,}098 \cdot 10^{1396} = 8{,}7098 \cdot 10^{1397}$

113. Naulakohtaisen maksun mukaan ensimmäinen naula maksaisi 1 snt, toinen 2 snt, kolmas 2^2 snt, neljäs 2^3 snt jne. Viimeinen naula maksaisi näin ollen 2^{31} snt eli 21 474 836,48 €. Kertamaksu 70 € on Santerille edullisempi.

2 Neliöjuuri

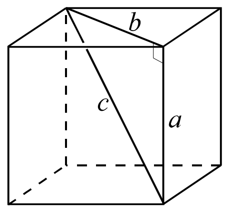
125. **a)** Korkeus h ratkeaa yhtälöstä $2^2 + h^2 = 5^2$, josta $h = \sqrt{21} \approx 4{,}6$ pituusyksikköä.

b) Kolmion ala on $\dfrac{4 \cdot \sqrt{21}}{2} = 2\sqrt{21} \approx 9{,}2$ pinta-alayksikköä.

126. Olkoon kolmion kylki a, jolloin $4^2 + 5^2 = a^2$. Tästä $a = \sqrt{41}$. Kolmion piirin pituus on $8 + 2\sqrt{41} \approx 20{,}8$ pituusyksikköä.

***127.** **a)** Sivutahkon lävistäjän pituus $b = a\sqrt{2}$ saadaan yhtälöstä $a^2 + a^2 = b^2$.

b) Avaruuslävistäjä on kuvaan piirretyn suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, joten $a^2 + b^2 = c^2$. Ratkaistaan c.



$$\begin{aligned} a^2 + (\sqrt{2}a)^2 &= c^2 \\ a^2 + 2a^2 &= c^2 \\ 3a^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Avaruuslävistäjän pituudeksi saadaan $c = a\sqrt{3}$.

***128.** Sivutahkojen lävistäjät lasketaan Pythagoraan lauseella:

$\sqrt{6{,}0^2 + 4{,}0^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ (m), $\sqrt{6{,}0^2 + 3{,}0^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$ (m) ja $\sqrt{3{,}0^2 + 4{,}0^2} = \sqrt{25} = 5{,}0$ (m).

Kaikki avaruuslävistäjät ovat samanpituisia, ja tämä pituus on $\sqrt{(\sqrt{45})^2 + 4{,}0^2} = \sqrt{61}$ $\approx 7{,}8$ (m).

Neliöjuurilausekkeiden sieventäminen

136. **a)** $3\sqrt{a^3} = 3\sqrt{a^2 \cdot a} = 3\sqrt{a^2}\sqrt{a} = 3|a|\sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$

b) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2}\sqrt{a}\sqrt{a} = |a|(\sqrt{a})^2 = |a|a = a^2$

c) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2}\sqrt{a}} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{a}} = \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \dfrac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$

137. **a)** $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ **b)** $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

c) $\sqrt{(\pi - 5)^2} = |\pi - 5| = 5 - \pi$

138. Levosta lähtevä kappale putoaa ajassa t matkan $s = \frac{1}{2}gt^2$, jossa g on putoamiskiihtyvyys. Kun yhtälöstä ratkaistaan putoamisaika, saadaan tehtävässä mainittu reaktioaika $t = \sqrt{\dfrac{2s}{g}}$.

139.

	Ulla	Eki	Jussi	Mari
paino x (kg)	60	75	90	70
pituus (m)	1,60	1,70	1,92	1,64
y ($\sqrt{\text{kg/m}}$)	1,55	**1,73**	1,90	**1,67**

Taulukon y-arvot on laskettu lausekkeesta $y = \sqrt{\frac{x}{25}}$, jossa x on henkilön paino kilogrammoina. Koska Ekin ja Marin pituus on pienempi kuin saatu y:n arvo, heitä voi pitää ylipainoisina.

140. **a)** Kun $h = 8\,000$ m, niin näkömatka on $3{,}5\sqrt{8\,000}$ km ≈ 310 km.

b) Jos $3{,}5\sqrt{h} = 21$, niin $h = 36$. Korkeus maanpinnalta on siis 36 m.

c) Korkealta näkee kauemmas siitä syystä, että Maa on pallon muotoinen.

3 Yleinen juuri ja murtopotenssi

148. **a)** $2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^1}{2^{1/3}} = 2^{1-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

c) $4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{2\cdot\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} = \dfrac{1}{(2^4)^{1/3}} = \dfrac{1}{2^{4/3}} = 2^{-1\frac{1}{3}}$

149. **a)** $a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$

b) $b^{\frac{1}{4}} : b^{-\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{2}}$

c) $(c^{-1,5})^{-2} = c^{-1,5\cdot(-2)} = c^3$

d) $d^{-\frac{2}{3}}(d + d^{\frac{2}{3}}) = d^{-\frac{2}{3}} \cdot d^1 + d^{-\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{1}{3}} + d^0 = d^{\frac{1}{3}} + 1$

150. **a)** $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

d) $x^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} = x^1 = x$

151. Sävelet a:sta ylöspäin ovat b, h ja c. Kun a:n taajuus kerrotaan luvulla $2^{\frac{1}{12}}$, saadaan b:n taajuus, siitä vastaavalla tavalla h:n taajuus jne. Kysytty c:n taajuus on siis $(2^{\frac{1}{12}})^3 \cdot 220$ Hz$= 2^{\frac{1}{4}} \cdot 220$ Hz ≈ 262 Hz.

Funktio-oppia

1 Funktio-käsite

159. **a)** Yhtälön $y=|x|$ määrittelemä *y* on *x*:n funktio, sillä jokaisella reaaliluvulla *x* on täsmälleen yksi itseisarvo *y*.

b) Yhtälön $y=x^3$ määrittelemä *y* on *x*:n funktio, sillä jokaisella reaaliluvulla *x* on täsmälleen yksi kolmas potenssi *y*.

c) Yhtälön $y=1\pm x$ määrittelemä *y* ei ole *x*:n funktio, sillä esimerkiksi *x*:n arvoa 1 vastaa kaksi *y*:n arvoa $y=2$ ja $y=0$.

d) Yhtälön $|y|=x$ määrittelemä *y* ei ole *x*:n funktio, sillä esimerkiksi *x*:n arvoa 1 vastaa kaksi *y*:n arvoa $y=1$ ja $y=-1$.

e) Yhtälön $xy=2$ määrittelemä *y* on *x*:n funktio, sillä jokaista nollasta eroavaa *x*:n arvoa vastaa täsmälleen yksi *y*:n arvo $y=\frac{2}{x}$. Funktio ei ole määritelty *x*:n arvolla 0.

f) Yhtälön $y^2=x^2$ määrittelemä *y* ei ole *x*:n funktio, sillä esimerkiksi *x*:n arvoa 1 vastaa kaksi *y*:n arvoa $y=1$ ja $y=-1$.

160. Ratkaistaan *y* yhtälöstä $x^2-(1-\frac{y}{2})=0$, jolloin saadaan $y=-2x^2-2$. Siis funktion *f* määrittelee ratkaistussa muodossa eli eksplisiittisesti yhtälö $f(x)=-2x^2+2$. Funktion arvoksi kohdassa $x = 2$ tulee $f(2) = -6$.

161. **a)** Tuotteen verollinen hinta on $h(x) = x + 0{,}22x = 1{,}22x$.
b) Jos veroton hinta on 550 €, tuotteen hinta on $h(550\text{ €}) = 1{,}22 \cdot 550\text{ €} = 671\text{ €}$.
c) Veroton hinta on $x=\frac{84}{1{,}22}$ €, joten arvonlisävero on $0{,}22\cdot\frac{84}{1{,}22}$ € $\approx 15{,}15$ €

162. Yhdeksän ja kymmenen välillä koottujen tuotteiden lukumäärä saadaan erotuksesta

$$L(2)-L(1)=(-2^3+5\cdot 2^2+14\cdot 2)-(-1^3+5\cdot 1^2+14\cdot 1)=22.$$

Vastaavasti kymmenen ja yhdentoista välillä koottujen tuotteiden lukumäärä on $L(3)-L(2)=20$.

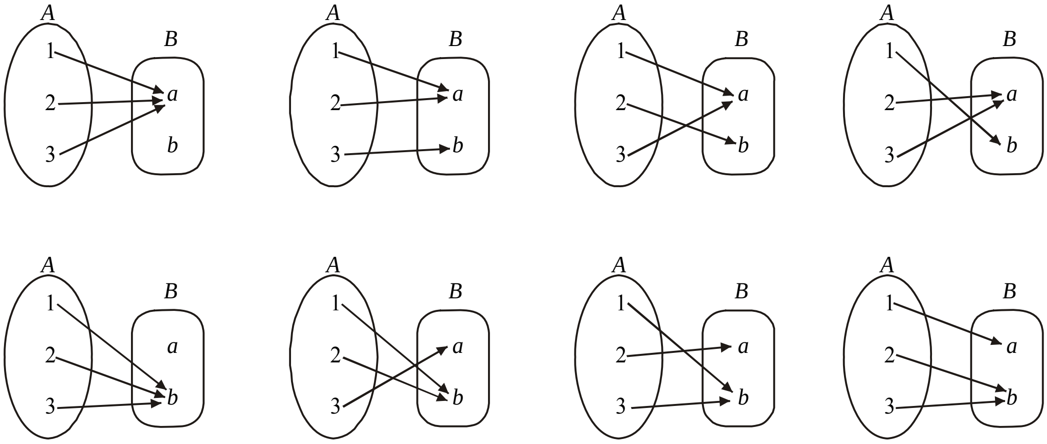
***163.** Ympyrän säde *r* saadaan yhtälöstä $2\pi r=x$.

Ympyrän ala on $\pi r^2=\pi(\frac{x}{2\pi})^2=\frac{x^2}{4\pi}$.

Neliön piirin pituus on $1-x$, joten sivun pituus on $\frac{1-x}{4}$ ja ala $\frac{(1-x)^2}{16}$.

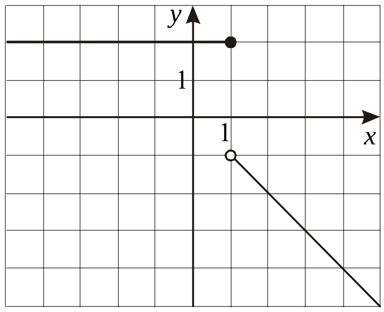
Ympyrän ja neliön yhteinen ala on $A(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(1-x)^2}{16},\quad 0\le x\le 1.$

***164.** Koska funktion $f: A \to B$ määrittelyjoukko ja maalijoukko ovat suppeita, eri funktiot voidaan esittää nuolikuvioin.

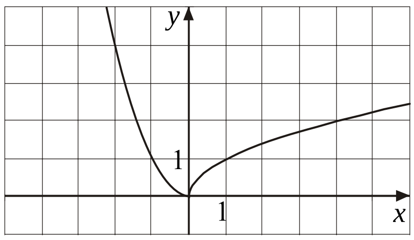


Funktioita $A \to B$ voidaan siis muodostaa kaikkiaan 8. Yleisesti pätee, että jos *A*:ssa on *m* ja *B*:ssä *n* alkiota, funktioiden $A \to B$ lukumäärä on n^m.

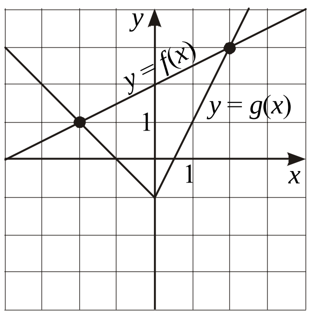
2 Funktion kuvaaja



168. Funktio *g* saa kaikki lukua –1 pienemmät arvot sekä arvon 2.



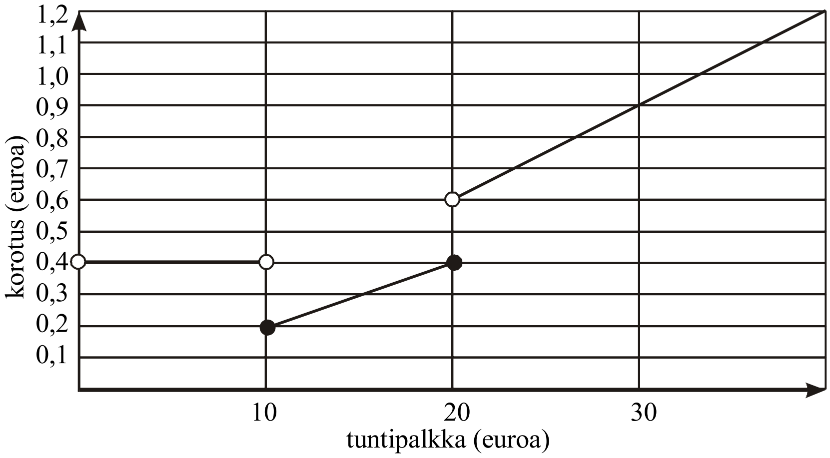
172. Funktion *f* arvojoukko on $[0, \infty[$.



173. $f(x) = g(x)$, kun $x = -2$ tai $x = 2$.

174. Epäyhtälön $g(x) < f(x)$ eli $-\dfrac{1}{2}x + 2 < x + 5$ ratkaisu on $x > -2$. Näillä arvoilla *g*:n kuvaaja on *f*:n kuvaajan alapuolella.

175. Palkka nousi
$40 \cdot 0{,}02 \cdot 16$ €
$= 12{,}80$ €.



***177. a)** $x^2 - 2x - 3$

b) $x^3 - 3x + 2$

c) $x^4 - 5x^2 + 4$

d) $3x^5 - 5x^3 + 1$

e) $x - |x - 2|$

f) $|x + 1| - |x - 2|$

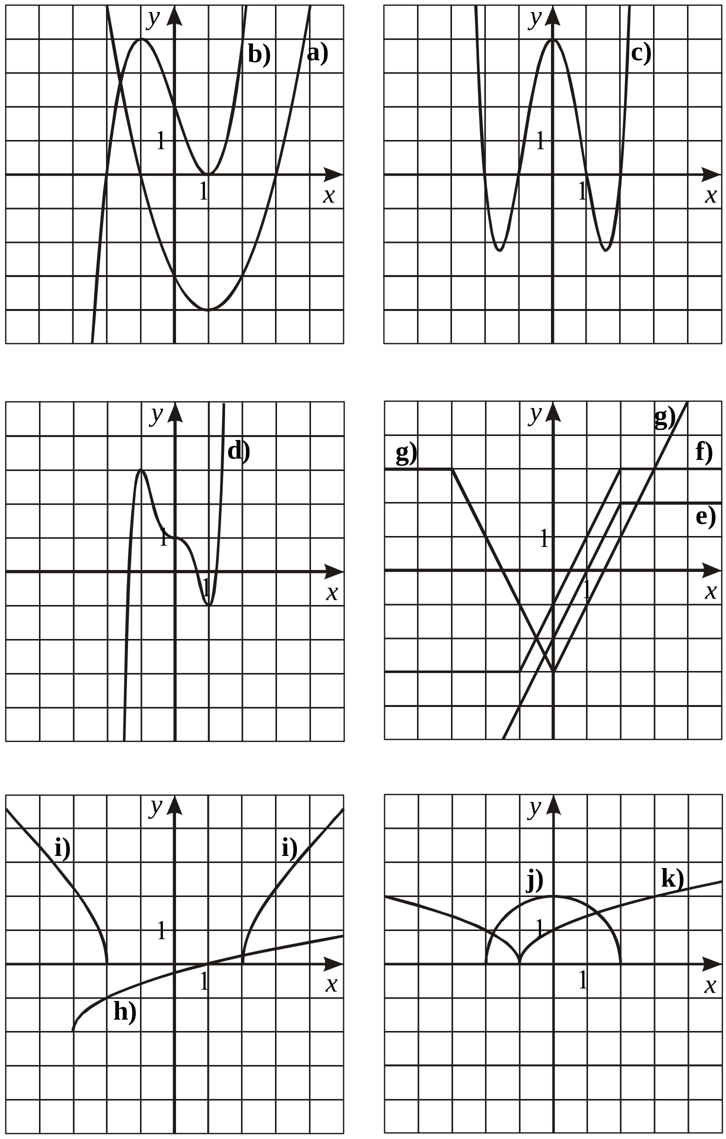
g) $x - |x + 3| + 2|x|$

h) $\sqrt{x + 3} - 2$

i) $\sqrt{x^2 - 4}$

j) $\sqrt{4 - x^2}$

k) $\sqrt{|x + 1|}$

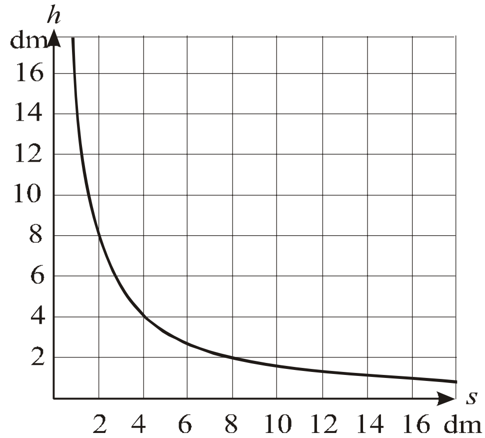


3 Verrannollisuus

184. Työhön mennyt aika y on kääntäen verrannollinen työntekijöiden lukumäärään x, joten $xy = k$, jossa k on vakio. Yhtälöstä $4 \cdot 20\ \text{h} = 7 \cdot y$ saadaan kysytyksi ajaksi kymmenen minuutin tarkkuudella 11 h 30 min.

185. Tarvittavan paneelierän kokonaispituus y on kääntäen verrannollinen paneelin leveyteen x eli xy on vakio. Yhtälöstä $80\ \text{mm} \cdot 600\ \text{m} = 120\ \text{mm} \cdot y$ saadaan kysytyksi pituudeksi $y = 400\ \text{m}$.

186. Kolmion ala $A = \frac{1}{2}sh$, josta $h = \dfrac{2A}{s}$. Tiedetään, että $A = 8\ \text{dm}^2$. Kun kanta s lausutaan desimetreinä, korkeus on $h = \dfrac{16}{s}\ \text{dm}$. Ohessa on h kuvattu s:n funktiona.



187. Siitä, että liike-energia on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, saadaan yhtälö $E = kv^2$, jossa k on vakio. Annetuista tiedoista saadaan $k = \dfrac{E}{v^2} = \dfrac{160\ \text{J}}{(8{,}0\ \text{m/s})^2}$. Kun nopeus on 6,0 m/s, liike-energia on $E = \dfrac{160\ \text{J}}{(8{,}0\ \text{m/s})^2} \cdot (6{,}0\ \text{m/s})^2 = 90\ \text{J}$.

Toisin:

Suoraan verrannollisuus merkitsee, että $\dfrac{E_1}{v_1^{\,2}} = \dfrac{E_2}{v_2^{\,2}}$ eli $\dfrac{160\ \text{J}}{(8{,}0\ \text{m/s})^2} = \dfrac{E_2}{(6{,}0\ \text{m/s})^2}$. Tästä $E_2 = 90$ J kuten edellä.

188. Koska teho P on verrannollinen jännitteen neliöön, niin $P = kU^2$. Annetuista tiedoista saadaan $k = \dfrac{P}{U^2} = \dfrac{100\ \text{W}}{(230\ \text{V})^2}$. Tiettyyn jännitteeseen U kytkettynä teho pienenee 40 % eli on 60 W. Kyseinen jännite on $U = \sqrt{\dfrac{P}{k}} = \sqrt{\dfrac{60\ \text{W}}{\dfrac{100\ \text{W}}{(230\ \text{V})^2}}} \approx 178\ \text{V}$.

Toisin: Jännite U_2 voidaan laskea myös suoraan yhtälöstä $\dfrac{100\ \text{W}}{(230\ \text{V})^2} = \dfrac{60\ \text{W}}{U_2^{\,2}}$.

189. Olkoon y:n uusi arvo y_2. Yhtälöstä $xy = y_2 \cdot 0{,}7x$ saadaan $y_2 = \dfrac{y}{0{,}7} \approx 1{,}43y$, josta nähdään y:n kasvuksi noin 43 %.

190. Tarjonta kasvoi arvosta t arvoon $1{,}3t$, jolloin hinta muuttui arvosta h arvoon xh. Yhtälöstä $t \cdot h = 1{,}3t \cdot xh$ saadaan $x = \dfrac{1}{1{,}3} \approx 0{,}77$. Hinnan alenemaksi tulee noin 23 %.

4 Potenssifunktio ja potenssiyhtälö

196. **a)** $(2x)^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow 2x = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$, josta $x = 2$

b) $x^{-\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow x = 8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

c) $x \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 7 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49$

d) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

197. Yksi litra = 1 dm^3 = 1 000 cm^3. Yhtälöstä $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ saadaan

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1\,000\,\mathrm{cm}^3}{4\pi}} \approx 6{,}2\,\mathrm{cm}.$$

198. Yhtälöstä $d = 0{,}0104 \cdot L^{1,5}$ saadaan $L = \left(\dfrac{d}{0{,}0104}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3{,}7}{0{,}0104}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 50{,}2$. Puun korkeus on noin 50 metriä.

199. Olkoon a alkuperäisen ja x rakennettavan kuution särmä. Koon kahdentaminen merkitsee, että $x^3 = 2a^3$. Silloin $x = \sqrt[3]{2} \cdot a$.

Oraakkelin antama neuvo oli mahdoton toteuttaa. Harpin ja viivaimen avulla ei nimittäin ole mahdollista konstruoida sellaista janaa, jonka pituus olisi $\sqrt[3]{2}$ kertaa niin suuri kuin alkuperäisen janan pituus. Tehtävä todistettiin mahdottomaksi vasta 1800-luvulla.

200. Yhtälöstä $U = c \cdot I^a$ saadaan $I = \left(\dfrac{U}{c}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\dfrac{230}{180}\right)^{\frac{1}{0,23}} \approx 2{,}9$. Vastuksen läpi kulkeva virta on noin 2,9 ampeeria.

5 Eksponenttifunktio

209. Koska 2,5 < 5,2 ja $f(2{,}5) > f(5{,}2)$, niin eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ kuvaaja on laskeva käyrä (eli funktio f on aidosti vähenevä). Tällöin tulee olla $0 < a < 1$.

210. **a)** $f(x) = 8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$

b) $f(x) = (\sqrt{2})^x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$

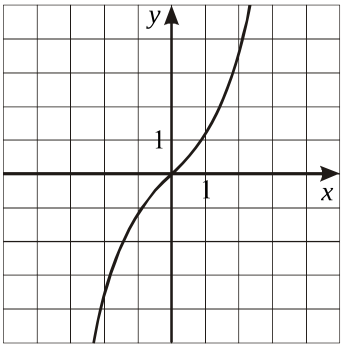
c) $f(x) = 0{,}5^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^x = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^x = 2^{-\frac{x}{3}}$

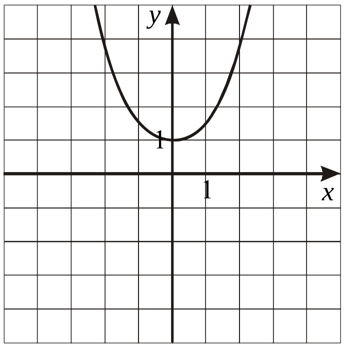
212. $f(4) = m \cdot 2^{4k} = 36$
$f(3) = m \cdot 2^{3k} = 27$ Jakamalla yhtälöt puolittain saadaan $2^k = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön, jolloin tulee $m \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 27$ ja siitä $m = 27 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Nyt

$f(6) = m \cdot 2^{6k} = 27 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{4}{3}\right)^6 = 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 64$.

***213.**



$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$



$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

6 Eksponentiaalinen kasvu ja väheneminen

214. **a)** Eksponentiaalisessa mallissa $f(t) = 4{,}4 \cdot 1{,}019^t$ alkuarvo on 4,4 ja kasvutekijä 1,019. Kasvutekijästä 1,019 = 1 + 0,019 nähdään, että kasvuprosentti on 1,9 %.

b) Vuosien lukumäärä on $t = 35$ ja $f(35) = 4{,}4 \cdot 1{,}019^{35} \approx 8{,}5$. Väkiluku on 8,5 miljardia.

215. Tonttien hinnan laskemiseen soveltuu eksponentiaalinen malli $f(t)$ = 5 000 € $\cdot 1{,}035^t$, jossa t on aika vuosina. Kymmenen vuoden kuluttua tontin hinta on
$f(10)$ = 5 000 € $\cdot\ 1{,}035^{10} \approx$ 7 050 €.

216. Loppupääoma on 20 000 € $\cdot\ 1{,}018^4 \approx$ 21 479,35 €.

217. Kun arvo vähenee vuosittain 20 %, niin kasvutekijä on 0,80. Auton arvo seitsemän vuoden jälkeen on 85 000 € $\cdot\ 0{,}80^7 \approx$ 17 800 €.

218. **a)** $1{,}04^5 \approx 1{,}22$. Energian kulutus on alkuperäistä 22 % suurempi.

b) Olkoon alkuperäinen kulutus k. Kulutuksen eksponentiaalisesta kasvusta saadaan yhtälö $ka^{15} = 2k$, josta $a = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1{,}0473$. Vuotuinen kasvu on noin 4,7 %.

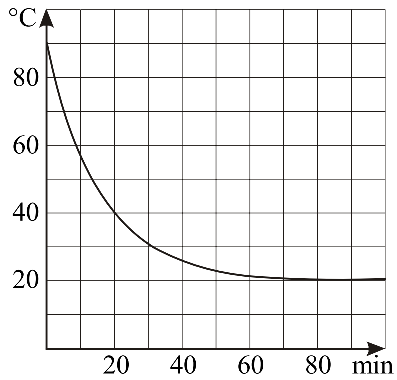
219. Bakteerien määrän laskemiseen soveltuu malli $f(t) = 1500 \cdot a^t$, jossa t on seurannan alusta laskettu aika tunteina. Kaksinkertaistuminen kolmessa tunnissa merkitsee, että $f(3) = 1500 \cdot a^3 = 3000$. Tästä $a = 2^{\frac{1}{3}}$, jolloin $f(t) = 1500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

a) $f(20) = 1500 \cdot 2^{\frac{20}{3}} \approx 152\,000$

b) Yhtälöstä $1500 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 96\,000$ saadaan $2^{\frac{t}{3}} = 64 = 2^6$ ja edelleen $\frac{t}{3} = 6$. Kysytyksi ajaksi tulee näin ollen 18 h.

220. Jos lasikerroksia on n kappaletta, läpi päässeen valon määrä on $f(n) = k \cdot 0{,}89^n$. Tässä k tarkoittaa valon määrää ilman suodattavia lasikerroksia. Kuuden lasin tapauksessa $f(6) = k \cdot 0{,}89^6 \approx 0{,}50k$, joten valoa pääsee läpi noin 50 %.

221. Ohessa on funktion $f(t) = 70 \cdot 0{,}94^t + 20$ kuvaaja. Arvo 40 °C saavutetaan noin 20 minuutin kuluttua. (Tarkempi arvo on 20,2 min.)



222. Hajoaminen on eksponentiaalista. Mallina on $f(t) = 45\,\text{g} \cdot 0{,}66^t$, jossa ajan t yksikkö on tunti.
a) Puolen tunnin kuluttua jäljellä on $f(0{,}5) = 45\,\text{g} \cdot 0{,}66^{0,5} \approx 36{,}6\,\text{g}$ radioaktiivista kobolttia.
b) Puoli tuntia sitten radioaktiivista kobolttia oli $f(-0{,}5) = 45\,\text{g} \cdot 0{,}66^{-0,5} \approx 55{,}4\,\text{g}$.

223. Jäljellä olevan radioaktiivisen aineen määrä saadaan yhtälöstä $f(t) = k \cdot a^t$, jossa k on alkuarvo ja t hajoamisaika vuosina. Tiedetään, että $k \cdot a^{30} = \frac{k}{2}$, josta $a = 2^{-\frac{1}{30}}$. Hajoamisen laki on siis $f(t) = k \cdot 2^{-\frac{t}{30}}$.

a) $f(10) = k \cdot 2^{-\frac{10}{30}} \approx 0{,}79k$. Cesiumia on jäljellä 79 %.

b) $f(100) = k \cdot 2^{-\frac{100}{30}} \approx 0{,}10k$. Cesiumia on jäljellä 10 %.

224. Sijoitetaan lukuparit (4, 20) ja (6, 40) yhtälöön $f(t) = k \cdot a^t$, jolloin muodostuu yhtälöpari $\begin{cases} k \cdot a^4 = 20 \\ k \cdot a^6 = 40. \end{cases}$ Jakamalla yhtälöt puolittain saadaan $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}$, josta $a^2 = 2$ ja $a = \pm\sqrt{2}$. Eksponenttifunktion määrittelyehdon mukaan $a > 0$, joten $a = \sqrt{2}$. Sijoitetaan saatu a:n arvo ensimmäiseen yhtälöön: $k \cdot (\sqrt{2})^4 = 20$ eli $4k = 20$, jolloin k:n arvoksi saadaan 5.

225. **a)** Koska kasvu on eksponentiaalista, hyönteispopulaation koko määräytyy mallin $f(t) = k \cdot a^t$ mukaisesti. Populaation koko hetkellä $t = 0$ on k. Ajan yksikkönä on vuorokausi. Annetuista tiedoista saadaan yhtälöpari $\begin{cases} k \cdot a^3 = 74 \\ k \cdot a^5 = 108. \end{cases}$ Yhtälöt puolittain jakamalla saadaan $\frac{1}{a^2}=\frac{37}{54}$, josta $a\approx 1{,}208$. Luvun k arvoksi tulee tällä a:n arvolla 41,98. Alkuarvoksi valitaan lähin kokonaisluku 42, joten kasvumalli on $f(t)=42\cdot 1{,}208^t$.

b) Kokeen alussa hyönteisiä oli 42, mikä ilmenee äskeisestä kohdasta.

c) $f(14)=42\cdot 1{,}208^{14}\approx 592$. Kahden viikon päästä hyönteisiä olisi 592.

226. Nopeuden arvo lasketaan mallin $f(t)=100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot a^t$ mukaisesti, jolloin t on aika sekunteina polttoaineen loppumisesta. Yhtälöstä $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}=100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot a^{20}$ ratkaistaan a:n arvoksi $0{,}8^{\frac{1}{20}}$. Nopeus noudattaa siis yhtälöä $f(t)=100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 0{,}8^{\frac{t}{20}}$. Rekan nopeus minuutin kuluttua polttoaineen loppumisesta on $f(60)=100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 0{,}8^{\frac{60}{20}}\approx 51\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

*Matemaattinen mallintaminen

227. Olkoon kukan kappalehinta $100a$. Asiakas tarvitsee 23 kukkaa. Hän voi hankkia ne esimerkiksi ostamalla kaksi 10 kappaleen laatikkoa ja 3 yksittäistä kukkaa. Tällöin hinnaksi tulee alennuksineen $2\cdot 0{,}95\cdot 10\cdot 100a+3\cdot 100a=2\ 200a$.

Asiakas voi myös hankkia kukat ostamalla 25 kappaleen laatikon. Tällöin hän saa 13 %:n alennuksen, joten erä maksaa hänelle $0{,}87\cdot 25\cdot 100a=2\ 175a$. Tämä hankintatapa huomataan edullisimmaksi.

228. Olkoon x tarvittavan 5-prosenttisen liuoksen massa. Liuosta vedellä laimentamalla saadaan tarvittava määrä eli 750 g 2-prosenttista liuosta. Suolan määrä näissä eri liuoksissa on sama. Kirjoitetaan siitä yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned}0{,}05x&=0{,}02\cdot 750\text{ g}\\ x&=300\text{ g}\end{aligned}$$

Tarvittava liuos saadaan siis sekoittamalla 300 g 5-prosenttista liuosta ja 450 g vettä.

229. Olkoon uusi massa m. Muun kuin veden osuus on henkilössä säilyy, mistä saadaan yhtälö $0{,}30m = 0{,}25\cdot 90$ kg. Tästä $m = 75$ kg.

230. Olkoon hoitoaineen hinta x euroa, jolloin kenkien hinta on $100 + x$ euroa. Yhteishinnasta saadaan yhtälö $x + 100 + x = 110$, josta $x = 5$. Hoitoaine maksaa 5 euroa.

231. Bussi 2 nopeampana saavuttaa bussi 1:n, joka tällöin on ajanut puolitoista tuntia kauemmin kuin bussi 2. Tehtävässä kysytään bussin 2 ajoaikaa. Merkitään sitä t:llä. Molemmat bussit ajavat saman matkan. Muodostetaan yhtälö merkitsemällä bussien ajomatkat yhtä suuriksi.

$$t\cdot 100\text{ km/h}=(t+1{,}5\text{ h})\cdot 70\text{ km/h}$$

Muuttujan t arvoksi saadaan 3,5 h.

232. Katin vanhempien koti ei voi olla kauempana kuin sen matkan päässä, jonka Kati ehtii ajaa kolmessa tunnissa edestakaisin viipymättä lainkaan vanhempiensa luona. Olkoon ajomatkan pituus yhteen suuntaan *s*. Kirjoitetaan yhtälö siitä, että meno- ja paluumatkaan kuluu yhteensä kolme tuntia.

$$\frac{s}{70\text{ km/h}}+\frac{s}{80\text{ km/h}}=3\text{ h} \quad \text{eli ilman yksiköitä} \quad \frac{s}{70}+\frac{s}{80}=3$$

Ratkaisuksi saadaan $s = 112$ km, joka on kodin maksimietäisyys.

233. Olkoon pohjoiseen menevän kävelynopeus *v*, jolloin etelään kävelevän nopeus on v + 2 km/h. Ajassa 1,5 h kävelymatkaa on kertynyt yhteensä 15 km.

$$\begin{aligned} v\cdot 1{,}5\text{ h} + (v+2\text{ km/h})\cdot 1{,}5\text{ h} &= 15\text{ km} \\ (2v+2\text{ km/h})\cdot 1{,}5\text{ h} &= 15\text{ km} \\ 2v+2\text{ km/h} &= \frac{15}{1{,}5}\text{ km/h} \\ v &= 4\text{ km/h} \end{aligned}$$

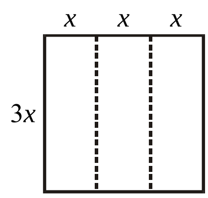
Kävelynopeudet ovat 4 km/h ja 6 km/h.

234. Ajassa 32 s panostaja ehtii juosta matkan $6{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 32\text{ s} = 208\text{ m}$. Tämän jälkeen hän juoksee vielä matkan *x* ennen kuin ääni hänet saavuttaa. Matkaan *x* panostajalta menee sama aika kuin ääneltä matkaan 208 m + *x*, joten $\frac{208\text{ m} + x}{340\text{ m/s}} = \frac{x}{6{,}5\text{ m/s}}$. Tästä $x \approx 4$ m. Räjähdyksen kuullessaan panostaja on 212 m:n päässä.

235. Tehtävän voi ratkaista taulukoimalla etäisyyksien summat opettajan paikasta *x* oppilaiden paikkoihin. Istuinten väli on yksi pituusyksikkö.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
et.summa	105	92	81	72	65	60	57	56	57	60	65	72	81	92	105

Opettajan paikka on keskellä riviä.



236. Olkoon neliön sivun pituus 3*x*. Suorakulmion ympärysmittaan liittyy silloin yhtälö $2x + 6x = 24$ cm, josta $x = 3$ cm. Neliön pinta-ala on $9x^2 = 9\cdot 9\text{ cm}^2 = 81\text{ cm}^2$.

237. Olkoon *x* pöytäliinan leveys. Pöytäliinan pituus on silloin $x + 45$ cm. Pitsiä tarvitaan määrä $2x + 2(x + 45\text{ cm})$. Koska käytettävissä on kaikkiaan 6 m 10 cm pitsiä, saadaan epäyhtälö $2x + 2(x + 45\text{ cm}) \leq 610\text{ cm}$. Tästä $x \leq 130$ cm, joten liina voi olla enintään 130 cm leveä.

238. Viikon päästä eli seitsemän yön kuluttua on myös perjantai. Koska 1 001 on tasan jaollinen seitsemällä, on 1 001 yön kuluttua jälleen perjantai.

239. Koska 10 miestä tarvitsee 10 päivää kaivaakseen 10 m syvän kuopan, niin 5 m:n syvyisen kuopan kaivuun menee 5 päivää näiltä kymmeneltä mieheltä. Viideltä mieheltä aikaa kuluu vastaavan kuopan kaivuun kaksin verroin eli 10 päivää.

240. Väitetään, että ainakin yhden oppilaan kotimatka on yli 3 km. Ellei tämä ole tosi, niin jokaisen oppilaan kotimatka olisi enintään 3 km. Mutta silloin 20 oppilaan yhteenlaskettu kotimatka olisi enintään 60 km. Tämä on annetun tiedon mukaan mahdotonta, joten alkuperäinen väite kotimatkasta on totta.

241. Väitetään, että ainakin yhdellä opiskelijalla on enemmän kuin kuusi kirjaa. Jollei tämä ole tosi, niin jokaisella opiskelijalla on enintään kuusi kirjaa. Mutta silloin 28 opiskelijalla olisi yhteensä enintään 168 kirjaa. Tämä on mahdotonta, sillä kirjoja on 170. Siis alkuperäinen väite on tosi.

242. Väitetään, että kaikki luvut $p(n) = n^2 - n + 41$ ovat alkulukuja, kun n on luonnollinen luku. Kokeilemalla syntyy todellakin sellainen vaikutelma, sillä luvut ovat alkulukuja kaikilla n:n arvoilla 0, 1, 2, ..., 40. Luku $p(41)$ ei kuitenkaan ole alkuluku, koska $p(41) = 41 \cdot 41$.

243. Yhtälön $kx - 12 = 3k$ ratkaisu on $x = 3 + \frac{12}{k}$, $k \neq 0$. Koska x on kokonaisluku, k:n arvoiksi sopivat positiiviset kokonaisluvut 1, 2, 3, 4, 6 ja 12. Kysytty lukumäärä on siis 6.

244. Jos m ja n ovat mitä tahansa kokonaislukuja, niin $2m+1$ ja $2n+1$ ovat parittomia kokonaislukuja. Niiden summa on aina kahdella jaollinen, sillä $2m+1+2n+1 = 2(m+n+1)$. Koska mainittujen lukujen erotus on $2m+1-(2n+1) = 2(m-n)$, sekin on aina kahdella jaollinen.

245. **a)** Kun n on jokin kokonaisluku, luvut $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ ja $n+2$ ovat viisi peräkkäistä kokonaislukua. Niiden summa $5n$ on aina viidellä jaollinen.

b) Kuuden peräkkäisen kokonaisluvun $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ja $n+3$ summa $6n+3$ ei ole koskaan kuudella jaollinen.

246. Olkoon täyden säiliön veden määrä m. Ensimmäisestä reiästä valuu vettä minuutissa määrä $\frac{m}{15}$, toisesta $\frac{m}{30}$, kolmannesta $\frac{m}{45}$ ja neljännestä $\frac{m}{60}$. Kun kaikki reiät ovat yhtä aikaa auki, niistä valuu minuutissa vettä määrä $\frac{m}{15} + \frac{m}{30} + \frac{m}{45} + \frac{m}{60}$. Tyhjenemiseen menee t minuuttia, josta saadaan yhtälö $t(\frac{m}{15} + \frac{m}{30} + \frac{m}{45} + \frac{m}{60}) = m$. Tästä ratkeaa $t = 7{,}2$ minuuttia.

247. Kummallakin on aluksi maalia V litraa. Kun määrä x siirretään astiasta toiseen, maalarimestarilla on maalia $V + x$ ja oppipojalla $V - x$ litraa. Kumpikin maalaa näillä yhtä kauan, mistä saadaan yhtälö $\frac{V+x}{2{,}5} = \frac{V-x}{1{,}0}$. Sen ratkaisu on $x = \frac{3}{7}V$.

Lisätehtäviä

Lukualueet

1. Kokonaisluvut ja ei-kokonaiset murtoluvut muodostavat yhdessä rationaalilukujen joukon

2. **a)** Jokainen päättymätön desimaaliluku on irrationaaliluku.
Väite on epätosi, sillä päättymätön ja jaksollinen desimaaliluku on rationaaliluku.
b) $\frac{0}{1}$ on rationaaliluku. Väite on tosi, sillä $\frac{0}{1} = 0$.
c) 0,9999… on kokonaisluku. Väite on tosi, sillä 0,9999… = 1.
d) Kahden irrationaaliluvun summa on aina irrationaaliluku.
Väite on epätosi, sillä esimerkiksi $\pi + (-\pi) = 0$.

3. **a)** -5^2 on kokonaisluku (**Z**) **b)** $\sqrt{16}$ on luonnollinen luku (**N**)
c) $1-\pi$ on irrationaaliluku **d)** 3,14 on rationaaliluku (**Q**)
e) 0 on luonnollinen luku (**N**) **f)** 2,15115111511115… on irrationaaliluku

4. **a)** $2{,}5 = \frac{5}{2}$ **b)** $2{,}\overline{5} = 2\frac{5}{9} = \frac{23}{9}$ **c)** $2{,}\overline{54} = 2\frac{54}{99} = 2\frac{6}{11} = \frac{28}{11}$

Laskulait, vastaluku ja käänteisluku

1. $a(bc) = (ab)c$
Vastaava laki ei päde jakolaskulle, sillä esimerkiksi 100:(10:5) = 50 mutta (100:10):5 = 2.

2. **a)** Lukujen –2 ja 5 erotus on –7 ja sen vastaluku 7.
b) Lukujen 100 ja –300 erotus on 400 ja sen vastaluku –400
c) Lukujen a ja $-b$ erotus on $a + b$ ja sen vastaluku $-a - b$.

3. **a)** $-6+3x = 3(-2+x)$ **b)** $x^3+5x^2-x = x(x^2+5x-1)$
c) $25x^{12}-100x^{21} = 25x^{12}(1-4x^9)$ **d)** $3a^2b-2ab = ab(3a-2)$
e) $x^3y+xy^3 = xy(x^2+y^2)$ **f)** $3a(x-1)+2(x-1) = (x-1)(3a+2)$

4. **a)** $25\cdot 1234\cdot 4$ = (4 · 25) · 1 234 = 100 · 1 234 = 123 400
b) 954 + (431 + 46) = (954 + 46) + 431 = 1 000 + 431 = 1 431
c) 7 + 13 + 7 + 13 + 7 + 13 + 7 + 13 + 7 + 13 = 5 · (7 + 13) = 5 · 20 = 100

5. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{b}{ab}-\frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$. Koska a ja b ovat toistensa käänteislukuja, on $ab = 1$, joten sievennetty muoto on $b - a$.

Lukujen suuruusjärjestys

1. Lukujen $\frac{5}{11}$ ja $\frac{6}{11}$ välissä on esimerkiksi niiden keskiarvo $\frac{1}{2}$. Toisaalta kyseiset luvut voidaan laventaa muotoon $\frac{50}{110}$ ja $\frac{60}{110}$, jolloin niiden väliin nähdään sijoittuvan muiden muassa murtoluvut $\frac{51}{110}, \frac{52}{110}, \ldots, \frac{59}{110}$.

2. Lukujen –68 ja 34 välimatka lukusuoralla on $|-68-34| = 102$. Vastaavasti lukujen –15 ja 101 välimatka on $|101-(-15)| = 116$. Siis –68 on lukusuoralla lähempänä 34:ää kuin –15 on 101:tä?

3. Välille $[-\pi, 10[$ kuuluvat parilliset kokonaisluvut ovat –2, 0, 2, 4, 6 ja 8.

4. Kumpaankin väleistä [–7, 8] ja]–5, 12] kuuluvat kokonaisluvut –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.

5. Vähintään –3:n suuruiset mutta enintään 5:n suuruiset reaaliluvut muodostavat välin [–3, 5].

Itseisarvo

1. **a)** $|-2-5| = |-7| = 7$ **b)** $|7-4| + |7| - |-4| = 3+7-4 = 6$

c) $|-3-(-6)| + |-3-6| = |3| + |-9| = 3+9 = 12$

2. Tiedetään, että $a > 7$. Silloin

a) $|a| = a$ **b)** $|a-5| = a-5$ **c)** $|3-a| = -(3-a) = a-3$

3. **a)** $|2-x| + x = |2-3| + 3 = 1+3 = 4$

b) $|2-x| + x = |2-0| + 0 = 2$ **c)** $|2-x| + x = |2-(-3)| + (-3) = 5-3 = 2$

4. **a)** Kun $a > 0$, niin $a + |a| = a + a = 2a$.

b) Kun $x < 0$, niin $x - |x| = x - (-x) = 2x$.

5. **a)** $|x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$ **b)** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **c)** $|x| = -7$ ei ratkaisua

6. **a)** $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ **b)** $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ **c)** $|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3$ tai $x > 3$

Ensimmäisen asteen yhtälö

1. $3(x-1) - 2(3x-2) = -x \Leftrightarrow 3x - 3 - 6x + 4 = -x \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

2. **a)** $2 - \frac{x}{3} = x \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ **b)** $10^8 x - 10^5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10^5}{10^8} = \frac{1}{1\,000}$

3. **a)** $\frac{2-x}{3}=\frac{x-3}{2} \Leftrightarrow 2(2-x)=3(x-3) \Leftrightarrow 4-2x=3x-9 \Leftrightarrow -5x=-13 \Leftrightarrow x=2\frac{3}{5}$

b) $\frac{x}{2}+1=\frac{2x-3}{3} \Leftrightarrow 6(\frac{x}{2}+1)=\frac{6(2x-3)}{3} \Leftrightarrow 3x+6=4x-6 \Leftrightarrow -x=-12 \Leftrightarrow x=12$

4. $P(3)=9a-15=33 \Leftrightarrow 9a=48 \Leftrightarrow a=5\frac{1}{3}$

5. Yhtälöiden $5x = 5$, $8x + 5 = 6x - 1$ ja $x - 10\,000 = -x$ juuret ovat 1, –3 ja 5 000, joten niiden joukko ei ole $B = \{1, 3, 5\,000\}$.

6. $x + (x + 1) + (x + 2) = 54$, josta $3x = 51$ ja $x = 17$. Peräkkäiset kokonaisluvut ovat 17, 18 ja 19.

7. Koska yhtälön $b(x+1)-3(b-x)=2x$ juuri on 3, niin $4b - 3(b - 3) = 6$. Tästä $b = -3$.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

1. **a)** $1-3x>4 \Leftrightarrow -3x>3 \Leftrightarrow x<-1$

b) $\frac{1-2x}{2} \le 2 \Leftrightarrow 1-2x \le 4 \Leftrightarrow -2x \le 3 \Leftrightarrow x \ge -1\frac{1}{2}$

c) $\frac{x-3}{6}>\frac{3-x}{3} \Leftrightarrow \frac{6(x-3)}{6}>\frac{6(3-x)}{3} \Leftrightarrow x-3>6-2x \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$

2. **a)** $\frac{1}{3}(x+1)<\frac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow 4(x+1)<3(x-1) \Leftrightarrow 4x+4<3x-3 \Leftrightarrow x<-7$

b) $\frac{1}{2}(x+2a+1) \ge \frac{1}{3}(x+3a) \Leftrightarrow 3(x+2a+1) \ge 2(x+3a) \Leftrightarrow 3x+6a+3 \ge 2x+6a \Leftrightarrow x \ge -3$

3. **a)** $|x-1| = \begin{cases} -(x-1), \text{ kun } x-1<0 \\ x-1, \text{ kun } x-1 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1, \text{ kun } x<1 \\ x-1, \text{ kun } x \ge 1 \end{cases}$

b) $|x+1| = \begin{cases} -(x+1), \text{ kun } x+1<0 \\ x+1, \text{ kun } x+1 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x-1, \text{ kun } x<-1 \\ x+1, \text{ kun } x \ge -1 \end{cases}$

c) $|x-\pi| = \begin{cases} -(x-\pi), \text{ kun } x-\pi<0 \\ x-\pi, \text{ kun } x-\pi \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+\pi, \text{ kun } x<\pi \\ x-\pi, \text{ kun } x \ge \pi \end{cases}$

d) $|2x+6| = \begin{cases} -(2x+6), \text{ kun } 2x+6<0 \\ 2x+6, \text{ kun } 2x+6 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x-6, \text{ kun } x<-3 \\ 2x+6, \text{ kun } x \ge -3 \end{cases}$

e) $|3x-6| = \begin{cases} -(3x-6), \text{ kun } 3x-6<0 \\ 3x-6, \text{ kun } 3x-6 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x+6, \text{ kun } x<2 \\ 3x-6, \text{ kun } x \ge 2 \end{cases}$

f) $\left|\frac{x}{2}-5\right| = \begin{cases} -(\frac{x}{2}-5), \text{ kun } \frac{x}{2}-5<0 \\ \frac{x}{2}-5, \text{ kun } \frac{x}{2}-5 \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{x}{2}+5, \text{ kun } x<10 \\ \frac{x}{2}-5, \text{ kun } x \ge 10 \end{cases}$

4. $f(x)-2g(x) \le 0$

$\Leftrightarrow 3x-\frac{1-2x}{2}-2\left(4x+\frac{1}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow 3x-\frac{1}{2}+x-8x-\frac{2}{3} \le 0 \Leftrightarrow -4x \le \frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -4x \le \frac{7}{6} \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{24}$

***5.** **a)** Kaksoisepäyhtälössä $0 < 2x - 1 < 9$ suuruusjärjestys säilyy, jos jokaiseen lausekkeeseen lisätään sama luku. Lisätään luku 1, jolloin saadaan $1 < 2x < 10$. Jaetaan nyt jokainen lausekkeista kahdella, mikä antaa $\frac{1}{2} < x < 5$. Tuloksena on väli $\left]\frac{1}{2}, 5\right[$.

b) $45 \le 2x - 5 \le 85$. Lisätään kaikkiin lausekkeisiin 5 ja sitten jaetaan kahdella. Saadaan $50 \le 2x \le 90$ ja siitä $25 \le x \le 45$. Tuloksena on väli [25, 45].

Prosenttilasku

1. Tuotteen lopullinen hinta on 0,85 · 1,1 · 1,04 · 4 400 € = 4 278,56 €.

2. **a)** $\frac{0{,}5}{0{,}\overline{5}} = \frac{0{,}5}{\frac{5}{9}} = \frac{4{,}5}{5} = 0{,}9 = 90\,\%$. Luku 0,5 on siis 90 % luvusta $0{,}\overline{5}$.

b) $\frac{0{,}\overline{5} - 0{,}5}{0{,}\overline{5}} = \frac{\frac{5}{9} - 0{,}5}{\frac{5}{9}} = \frac{5 - 4{,}5}{5} = 0{,}1 = 10\,\%$. Luku 0,5 on siis 10 % pienempi kuin luku $0{,}\overline{5}$?

3. **a)** Sosiaalivakuutusmaksujen osuus oli 0,20 · 21,4 € = 4,28 €.
b) Muiden kuin varsinaisen työpalkan osuus oli 0,41 · 21,4 € = 8,77 €.

4. **a)** Työttömyysaste oli alentunut $\frac{15{,}4 - 9{,}1}{15{,}4} \approx 0{,}409 = 40{,}9\,\%$.

b) Työttömyysaste oli alentunut 15,4 – 9,1 = 6,3 prosenttiyksikköä.

5. **a)** Teknologiateollisuudessa oli $\frac{46 - 14}{14} \approx 2{,}29 = 229\,\%$ enemmän henkilöstöä kuin metsäteollisuudessa.
b) Teknologiateollisuudessa oli 46 – 14 = 32 prosenttiyksikköä enemmän henkilöstöä kuin metsäteollisuudessa.

6. **a)** Makkaran suolapitoisuus aleni $\frac{3{,}2 - 2{,}7}{3{,}2} \approx 0{,}16 = 16\%$.

b) Suolapitoisuus aleni 3,2 – 2,7 = 0,5 prosenttiyksikköä.

7. **a)** Jään tilavuus on $1{,}1 \cdot 2{,}8\ \text{dm}^3 = 3{,}1\ \text{dm}^3$.
b) Vettä muodostuu määrä x. Silloin $1{,}1 \cdot x = 990\ \text{cm}^3$, josta $x = 900\ \text{cm}^3$.

8. Olkoon x lisättävä suolamäärä. Ilmaistaan suolan kokonaismäärä kahdella tavalla, jolloin saadaan yhtälö $0{,}02 \cdot 900\ \text{g} + x = 0{,}1 \cdot (900\ \text{g} + x)$. Siitä $x = 80\ \text{g}$.

9. Suunnitellaan valmistaa 5-prosenttista seosta lisäämällä 20 litraan 2-prosenttista seosta x litraa 10-prosenttista seosta. Ilmaisemalla öljyn määrä kahdella tavalla syntyy yhtälö $0{,}02 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot x = 0{,}05 \cdot (20 + x)$. Sen ratkaisusta $x = 12$ nähdään, että 10-prosenttista seosta ei ole riittävästi tähän sekoittamistapaan.

Otetaan käyttöön koko 10 litran erä 10-prosenttista seosta ja lisätään siihen y litraa 2-prosenttista seosta. Yhtälöstä $0{,}1 \cdot 10 + 0{,}02y = 0{,}05 \cdot (10 + y)$ saadaan $y = 16{,}7$. Haluttua seosta voidaan näin ollen valmistaa 26,7 litraa.

Potenssi

1. $-a(-1-a)-a^3:a^2\cdot a=a+a^2-a\cdot a=a+a^2-a^2=a$

2. **a)** $\dfrac{aa^2a^3a^4}{(a^5)^2}=\dfrac{a^{10}}{a^{10}}=1$ **b)** $\dfrac{b^{-4}}{b^{-5}}=b^{-4-(-5)}=b^{-4+5}=b^1=b$

3. $-3^2+(-3)^2-2^{-3}+(-3)^{-2}=-9+9-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{(-3)^2}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{72}$

4. **a)** $aa^x=a^8\Leftrightarrow x=7$ **b)** $(100^3)^x=100^{18}\Leftrightarrow x=6$

c) $10^x\cdot10^4=10^{44}\Leftrightarrow x=40$ **d)** $\dfrac{28^{16}}{28^x}=28^{10}\Leftrightarrow x=6$

5. **a)** Paperin paksuus on 0,1 mm. Kun arkki taitetaan toistuvasti kaksin kerroin, saadaan päällekkäisiä paperikerroksia 2, 4, 8, 16 jne. eli $2^1,2^2,2^3,2^4$ jne. Seitsemän taittamisen jälkeen kerroksia on 2^7, jolloin nipun paksuus on $2^7\cdot0{,}1\text{ mm}=12{,}8\text{ mm}$.

b) Kymmenen taittamisen jälkeen nipun paksuus on $2^{10}\cdot0{,}1\text{ mm}=102\text{ mm}$.

6. $(x^{-6})^6(x^{-5})^{-5}=x^{-36}x^{25}=x^{-11}=\dfrac{1}{x^{11}}=\dfrac{1}{8}$

7. Eukkoja 7, aaseja 7 · 7, säkkejä 7 · 7 · 7, leipiä 7 · 7 · 7 · 7, puukkoja 7 · 7 · 7 · 7 · 7 ja tuppia 7 · 7 · 7 · 7 · 7 · 7, yhteensä $7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6=137\,256$.

Neliöjuuri

1. **a)** $(\sqrt{5})^2=5$ **b)** $(3\sqrt{2})^2=9\cdot2=18$ **c)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

d) $(\sqrt{7})^4=((\sqrt{7})^2)^2=7^2=49$

2. **a)** $\sqrt{72}+7\sqrt{2}=6\sqrt{2}+7\sqrt{2}=13\sqrt{2}$

b) $\sqrt{8}-2\sqrt{72}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}-2\cdot6\sqrt{2}+3\sqrt{2}=-7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{20}-2\sqrt{45}+5\sqrt{5}=2\sqrt{5}-2\cdot3\sqrt{5}+5\sqrt{5}=\sqrt{5}$

3. **a)** $\sqrt{x}=9\Leftrightarrow x=81$ **b)** $\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=25$

c) $\sqrt{x}=0{,}5\Leftrightarrow x=0{,}25$ **d)** $\sqrt{x}=-1$ ei ratkaisua

4. **a)** $\sqrt{5-x}$ on määritelty $\Leftrightarrow 5-x\ge0\Leftrightarrow x\le5$

b) $\sqrt{\dfrac{x}{2}-2}$ on määritelty $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}-2\ge0\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}\ge2\Leftrightarrow x\ge4$

c) $\sqrt{x^2+1}$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla, sillä aina $x^2+1>0$.

5. **a)** $\sqrt{x}=25\Leftrightarrow x=25^2=625$ **b)** $2\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}=6\dfrac{1}{4}$

c) $x^2=25\Leftrightarrow x=\pm5$ **d)** $x^2=5\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

6. Reaalilukuja: **a)** $\sqrt{144}$, **b)** $-\sqrt{36}$, **d)** $\sqrt{(-6)^2}$, **e)** $-\sqrt{5}+\sqrt{5}$, **f)** $(\sqrt{17})^2$, **g)** $2+\sqrt{2}$, **i)** $\sqrt{\dfrac{-12}{1-4}}$ ja **j)** $\dfrac{-\sqrt{8}}{8}$

Rationaalilukuja: **a)** $\sqrt{144}$, **b)** $-\sqrt{36}$, **d)** $\sqrt{(-6)^2}$, **e)** $-\sqrt{5}+\sqrt{5}$, **f)** $(\sqrt{17})^2$ ja **i)** $\sqrt{\dfrac{-12}{1-4}}$

Irrationaalilukuja: **g)** $2+\sqrt{2}$ ja **j)** $\dfrac{-\sqrt{8}}{8}$

7. **a)** Yhtälöstä $500(198-a\cdot 1{,}4)=1\,000$ tulee a:n arvoksi 140.

b) Laskelmat pettivät, koska käytettiin liian epätarkkaa $\sqrt{2}$:n likiarvoa a:n arvon määrittämiseksi. Saadulla a:n arvolla $500(198-140\sqrt{2})\approx 5{,}1$. Tämä selittää sillan pettämisen 20 tonnin kuormalla.

Alkuperäisestä yhtälöstä $500(198-a\sqrt{2})=1\,000$ saadaan $a=98\sqrt{2}\approx 138{,}592929$. Esimerkiksi käyttämällä likiarvoa 138,6 päästään maksimikuormaan 995 tonnia. Lujuuslaskelmissa onkin käytettävä suurta tarkkuutta, ja tietokonetta käytettäessä laskenta edellyttää myös tietokoneen prosessorilta hyvää luotettavuutta.

Yleinen juuri ja murtopotenssi

1. **a)** $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$ **b)** $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$ **c)** $2^{1{,}5}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

d) $3^{0{,}25}=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$

2. **a)** $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$ **c)** $\sqrt[7]{a^2}=a^{\frac{2}{7}}$ **d)** $\sqrt[9]{a^7}=a^{\frac{7}{9}}$

3. **a)** $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$ **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$

4. **a)** $\dfrac{4^{1{,}5}}{4}=4^{0{,}5}=(2^2)^{0{,}5}=2^1=2$ **b)** $\sqrt[6]{9}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$

c) $(\sqrt[4]{5})^2=(5^{\frac{1}{4}})^2=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}=x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

e) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

f) $\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}=\left(x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

5. **a)** $\sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{2}{10}}=\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25}$ ja $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{10}}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$. Siis $\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$.

b) $\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{7}{28}}=\sqrt[28]{4^7}=\sqrt[28]{16\,384}$ ja $\sqrt[7]{7}=7^{\frac{1}{7}}=7^{\frac{4}{28}}=\sqrt[28]{7^4}=\sqrt[28]{2\,401}$.

Siis $\sqrt[4]{4}>\sqrt[7]{7}$.

6. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a}}} = \left(\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \quad (a > 0)$

Funktio-käsite

1. **a)** neliön piiri p sivun pituuden x funktiona: $p(x) = 4x$

b) neliön sivun pituus x neliön pinta-alan A funktiona: $x(A) = \sqrt{A}$

c) suorakulmaisen kolmion terävä kulma α toisen terävän kulman β funktiona: $\alpha(\beta) = 90° - \beta$

2. Funktion $f(x) = x^2 + 1$ määrittelyjoukoksi on sovittu on $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Näillä muuttujan arvoilla funktio saa arvot 5, 2, 1, 2 ja 5. Arvojoukko on $\{1, 2, 5\}$.

3. **a)** Funktio $f(x) = \dfrac{3}{2+x}$ saa pisteessä $x = \dfrac{3}{4}$ arvon $f(\dfrac{3}{4}) = \dfrac{3}{2+\frac{3}{4}} = \dfrac{12}{11}$.

b) $\dfrac{3}{2+x} = \dfrac{15}{16}$, josta $30 + 15x = 48$ ja $x = \dfrac{6}{5}$.

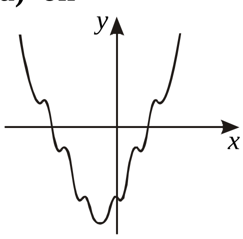
4. **a)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5x-1}{6} - 0{,}1 = 0 \Leftrightarrow 3x - (5x-1) = 0{,}6 \Leftrightarrow -2x = -0{,}4 \Leftrightarrow x = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5x-1}{7} - 0{,}1 = 0 \Leftrightarrow 7x - 2(5x-1) = 1{,}4 \Leftrightarrow -3x = -0{,}6 \Leftrightarrow x = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

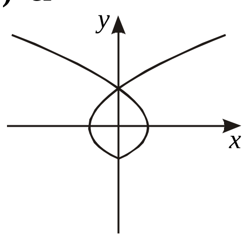
5. Funktio $f(x) = \sqrt{5x-35}$ on määritelty ehdolla $5x - 35 \geq 0$ eli $x \geq 7$. Määrittelyväli on $[7, \infty[$.

Funktion kuvaaja

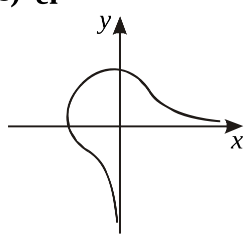
1. **a) on**



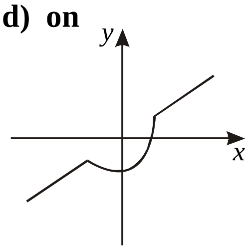
b) ei



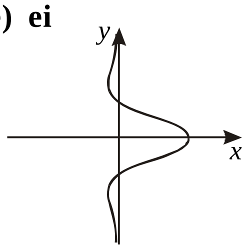
c) ei



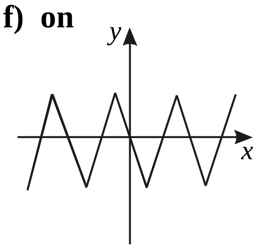
d) on



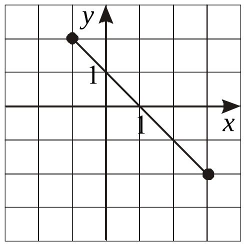
e) ei



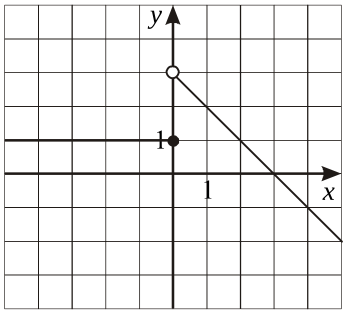
f) on



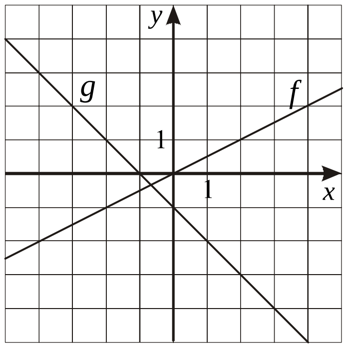
2. Ohessa on funktion $f(x) = 1 - x,\ -1 \le x \le 3$, kuvaaja.
a) Arvojoukko on $[-2, 2]$, **b)** nollakohta on $x = 1$,
c) pienin arvo on –2, **d)** suurin arvo on 2.



3. Ohessa funktion $f(x) = \begin{cases} 1, \text{kun } x \le 0 \\ -x + 3, \text{kun } x > 0 \end{cases}$ kuvaaja.
Funktion arvojoukko on $]-\infty, 3[$.



4. Ohessa on funktioiden $f(x) = \frac{1}{2}x$ ja $g(x) = -x - 1$ kuvaajat. Epäyhtälö $f(x) > g(x)$ toteutuu likimääräisesti, kun $x > -0{,}7$.



Verrannollisuus

1. **a)** Kun y on suoraan verrannollinen x:n neliöjuureen, niin $y = k\sqrt{x}$, k on vakio.
b) Kun y on kääntäen verrannollinen x:n neliöön, niin $y = \frac{k}{x^2}$, k on vakio.
c) Kun y on suoraan verrannollinen x:n ja z:n tuloon, niin $y = kxz$, k on vakio.

2. $y = km$. Saadaan $k = \frac{y}{m} = \frac{1{,}0\,\text{cm}}{20\,\text{g}} = 0{,}05\frac{\text{cm}}{\text{g}}$. Siis $y = 0{,}05\frac{\text{cm}}{\text{g}} \cdot m$. Kuvaajana on origosta alkava jana välillä $0 \le m \le 100\,\text{g}$.

3. Kappaleen putoama matka on verrannollinen putoamisajan neliöön eli $s = kt^2$, josta $k = \frac{s}{t^2}$. Annetuista tiedoista saadaan yhtälö $\frac{31\,\text{m}}{(2{,}5\,\text{s})^2} = \frac{s}{(5{,}0\,\text{s})^2}$, josta $s = 124$ m.

4. Suureet a ja b ovat kääntäen verrannolliset, joten ab on vakio. Toisiaan vastaavista arvopareista saadaan yhtälö $ab = 0{,}8ab_2$, josta $b_2 = 1{,}25b$. Nähdään, että b kasvaa 25 %.

5. Koska kaasun paine p on kääntäen verrannollinen tilavuuteen V, niin pV on vakio. Toisiaan vastaavista arvopareista saadaan yhtälö $4{,}5\,\text{dm}^3 \cdot 200\,\text{kPa} = 6{,}4\,\text{dm}^3\,p_2$, josta $p_2 = 140$ kPa.

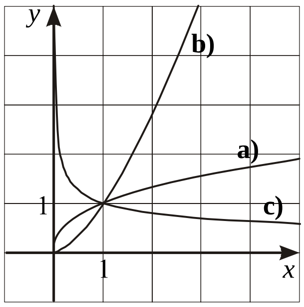
6. Olkoon F tuulen työntövoima, A tuulta vastaan kohtisuoran pinnan ala ja v tuulen nopeus. Koska työntövoima on suoraan verrannollinen pinnan alaan ja nopeuden neliöön, niin $F = kAv^2$, jossa k on vakio. Sijoittamalla $F = 40\ \mathrm{N}$, $A = 1{,}0\ \mathrm{m}^2$ ja $v = 8{,}0\ \mathrm{m/s}$ voidaan vakiolle ratkaista arvo $k = 0{,}625\ \frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^4}$. Lasketaan sitten kysytty voima annetuilla arvoilla: $F = 0{,}625\frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^4}\cdot 43\ \mathrm{m}^2\cdot(25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 17\ \mathrm{kN}$.

7. Olkoon aallon nopeus v ja meren syvyys h. Silloin $v = k\sqrt{h}$, jossa k on vakio. Vakion lausekkeeksi saadaan annetuilla suureiden arvoilla $k = \frac{414\ \mathrm{km/h}}{\sqrt{1\,500\ \mathrm{m}}}$. Kun syvyys on 4 100 m, nopeus on $v = \frac{414\ \mathrm{km/h}}{\sqrt{1\,500\ \mathrm{m}}}\cdot\sqrt{4\,100\ \mathrm{m}} = 684{,}5\ \mathrm{km/h}$. Tällä nopeudella 16 000 km:n matkaan kuluu noin 23 tuntia.

Potenssifunktio ja potenssiyhtälö

1. Ohessa ovat potenssifunktion $f(x) = x^r$ kuvaajat, kun r on

a) 0,4, **b)** 1,5, **c)** $-\frac{1}{3}$.



2. **a)** $x^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$

b) $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm(2^4)^{\frac{1}{4}} = \pm 2$

c) $2x^6 - 50 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[6]{25} = \pm(5^2)^{\frac{1}{6}} = \pm\sqrt[3]{5}$

3. **a)** $x^{-1} = 0{,}7 \Leftrightarrow x = 0{,}7^{-1} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ **b)** $x^{-\frac{1}{2}} = 0{,}2 \Leftrightarrow x = 0{,}2^{-2} = 5^2 = 25$

c) $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = (2^{\frac{1}{2}})^5 = 2^{2\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

4. **a)** $x^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

b) $x\cdot x^{\frac{2}{3}} = 32 \Leftrightarrow x^{\frac{5}{3}} = 32 \Leftrightarrow x = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

c) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

5. Funktio $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ on määritelty välillä $x > 0$, ja sen kuvaaja on tällä välillä laskeva käyrä. Silloin $f(x) > f(3)$, kun $0 < x < 3$.

Eksponenttifunktio

1. **a)** Funktion $f(x) = 3^x$ arvot kasvavat argumentin kasvaessa, joten funktio saa välillä $[-1, 1]$ kaikki arvot $\left[3^{-1}, 3^1\right] = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

b) Funktion $f(x) = 0{,}2^x$ arvot vähenevät argumentin kasvaessa, joten funktion suurin arvo välillä $[-1, 1]$ on $f(-1) = 5$ ja pienin $f(1) = \frac{1}{5}$. Funktio saa kaikki arvot $\left[\frac{1}{5}, 5\right]$.

2. Eksponenttifunktio $f(x) = (k-3)^x$ on määritelty, kun $k - 3 > 0$ eli kun $k > 3$.

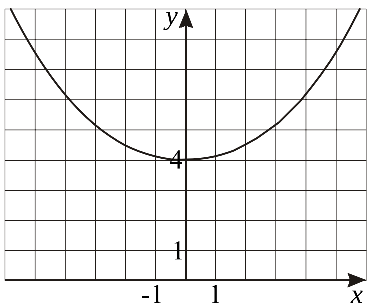
3. Eksponenttifunktion $f(x) = (k-3)^x$ kuvaaja on nouseva käyrä ehdolla $k - 3 > 1$ eli arvoilla $k > 4$.

4. **a)** $\dfrac{f(1{,}1) - f(1{,}0)}{f(1{,}0)} = \dfrac{3^{1,1} - 3^1}{3^1} = \dfrac{3(3^{0,1} - 1)}{3} = 3^{0,1} - 1 \approx 0{,}116 = 11{,}6\,\%$

b) ja **c)** samoin. Tulos niistä myös 11,6 %

5. Olkoon $f(x) = a^x$. Silloin
$f(kx) = a^{kx} = (a^x)^k = (f(x))^k$.

6. Ohessa on ketjukäyrä $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, kun $a = 4$.



Eksponentiaalinen kasvu ja väheneminen

1. Jos alkuperäinen hinta on a, hinta kymmenen vuoden kuluttua on $1{,}014^{10}a \approx 1{,}149a$. Hintojen nousu on noin 14,9 %.

2. **a)** $h(4) = 180 \cdot 10^{-0{,}04 \cdot 4} \approx 124{,}53$ (h). Aika on noin 5 vuorokautta 5 tuntia.

b) $h(18) = 180 \cdot 10^{-0{,}04 \cdot 18} \approx 34{,}30$ (h). Aika on noin 1 vuorokausi 10 tuntia.

3. Auton arvo alenee vuodessa 15 %, joten viiden vuoden kuluttua auton arvo on $0{,}85^5 \cdot 32\,500 \approx 14\,400$ euroa.

4. Ratkaistaan luku p yhtälöstä $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^6 \cdot 75\,000 = 50\,000$. Aluksi saadaan yhtälö

$1 - \dfrac{p}{100} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$, josta $p = \left(1 - \sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}\right) \cdot 100 \approx 6{,}5$.

5. Muutos on $\dfrac{p_0 - p_0 \cdot 10^{-0,05435 \cdot 0,8}}{p_0} = 1 - 10^{-0,04348} \approx 0,095 = 9,5\ \%$.

Kun p_0 = 980 mbar, on 11 kilometrin korkeudessa $p = 980 \cdot 10^{-0,05435 \cdot 11} \approx 247$ mbar.

6. Radonin määrä milligrammoina hetkellä t (d) on $f(t) = 0{,}83^t \cdot 120$.

a) $f(2{,}5) = 0{,}83^{2{,}5} \cdot 120 \approx 75$ (mg)

b) $f(-1{,}5) = 0{,}83^{-1{,}5} \cdot 120 \approx 159$ (mg)

Pikatesti

1. **a)** 0 on luonnollinen luku. **(t)** **b)** Välillä]–3, 2[on neljä kokonaislukua. **(t)**

c) $|3-\pi| = 3-\pi$ **(e)** **d)** $9^n = 3^{3n}$ **(e)**

e) Aina pätee $\sqrt{a^6} = a^3$. **(e)** (Ei päde, jos a < 0.)

f) Funktioilla $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ on samat kuvaajat. **(e)** (Eri määrittelyjoukot)

2. $\dfrac{x-100}{3} = \dfrac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2x - 200 = 3 + 3x \Leftrightarrow -x = 203 \Leftrightarrow x = -203$

3. $4 - 5x \le 1 - 4x \Leftrightarrow -5x + 4x \le 1 - 4 \Leftrightarrow -x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 3$

4. Olkoon alentamaton hinta x. Silloin $0{,}9x = 135$, josta $x = 150$ (euroa)

5. Suolan kokonaismäärä grammoina on 0,05 · 240 + 10 = 22. Sen osuus liuoksen koko määrästä on $\dfrac{22}{240+10} = 0{,}088 = 8{,}8\,\%$.

6. **a)** $a^2 \cdot a^3 \cdot (a^{-2})^2 + a = a^5 \cdot a^{-4} + a = a + a = 2a$

b) $\sqrt{24} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$

7. $P = kv^3$, jossa k on vakio. Jos tuulen nopeus kasvaa kaksinkertaiseksi, sen kuutio ja samalla teho kasvaa kahdeksankertaiseksi?

8. $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

9. Funktiota $f(x) = a^x$ koskevien väitteiden totuusarvot:

a) Funktion arvojoukko on **R**. **(e)** Arvojoukko on $\mathbf{R}_+$.

b) Kantalukuun a liittyy ehto a > 0. **(t)**

c) Kun a > 1 ja x:n arvot pienenevät, myös funktion arvot pienenevät. **(t)**

10. Olkoon rakennuksen alkuperäinen arvo a. Kymmenen vuoden kuluttua arvo on $0{,}97^{10}a \approx 0{,}737a$. Arvon alenema on siis noin 26 %.

Kertauskoe 1

1. **a)** Pyydetyssä järjestyksessä: **N**, **Z**, **Q** ja **R** eli luonnollisten lukujen, kokonaislukujen, rationaalilukujen ja reaalilukujen joukko

b) $8{,}\overline{18}+1{,}\overline{81} = 8\frac{18}{99}+1\frac{81}{99}=9+\frac{18+81}{99}=9+1=10$

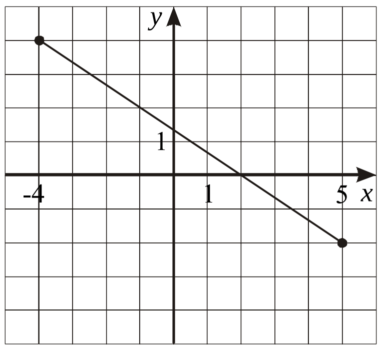
2. $\frac{8-2x}{3}-x=\frac{2+5x}{2} \Leftrightarrow 2(8-2x)-6x=3(2+5x) \Leftrightarrow 16-4x-6x=6+15x$

$\Leftrightarrow -25x=-10 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$

3. $2\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{12}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

4. Olkoon sähkömenot x €, jolloin puhelinmenot ovat $(200 – x)$ €. Annetuista muutosehdoista saadaan yhtälö $1{,}05x + 0{,}9(200 – x) = 0{,}99 \cdot 200$. Tästä $x = 120$. Siis sähköön kului 120 € ja puhelinmenoihin 80 €.

5. **a)** Ohessa on funktion $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3},\ -4\le x\le 5,$ kuvaaja.



b) Funktion määrittelyjoukko on [–4, 5] ja arvojoukko [–2, 4].

c) Funktion nollakohta on $x = 2$.

d) $f(x)>0$ x:n arvoilla $-4\le x<2$.

6. **a)** Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{x}{2}-x<\frac{x}{3}-10$. Aluksi puolittain 6:lla kertomalla saadaan $3x – 6x < 2x – 60$, josta $–5x < –60$ ja $x > 12$. Pienin tämän ehdon täyttävä kokonaisluku on 13.

b) $|6x-6|+6x=\begin{cases}-6x+6+6x, \text{ kun } 6x-6<0\\ 6x-6+6x, \text{ kun } 6x-6\ge 0\end{cases}=\begin{cases}6, \text{ kun } x<1\\ 12x-6, \text{ kun } x\ge 1\end{cases}$

7. Olkoon d tyven halkaisija, jolloin $d = kL^{3/2}$, jossa k on vakio ja L puun korkeus. Tunnetuista tiedoista saadaan ilman yksiköitä $k=\frac{d}{L^{3/2}}=\frac{7{,}6}{81^{3/2}}=\frac{7{,}6}{(9^2)^{3/2}}=\frac{7{,}6}{9^3}$. Mammuttipetäjän rungon halkaisija on silloin $d=\frac{7{,}6}{9^3}\cdot(90)^{3/2}\approx 8{,}9$ (m).

8. Olkoon työttömiä alun perin määrä k. Se pienenee eksponentiaalisesti niin, että $ka^5=0{,}85k$. Tästä $a=\sqrt[5]{0{,}85}\approx 0{,}968$. Nähdään, että työttömien määrä vähenee vuosittain 3,2 %.
(Kyseinen prosenttiluku voidaan laskea myös suoraan ratkaisemalla p yhtälöstä $\left(1-\frac{p}{100}\right)^5 k=0{,}85k$.)

Kertauskoe 2

1. **a)** Tulon arvo ei riipu tekijöiden järjestyksestä.

b) Kun summa (4 678 + 893) + 107 kirjoitetaan muotoon 4 678 + (893 + 107), sovelletaan yhteenlaskun liitäntälakia

b) Kun lauseke $a^2 + 3a$ kirjoitetaan muotoon $a(a + 3)$, käytetään osittelulakia.

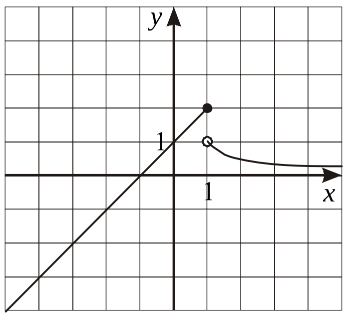
2. $\dfrac{2-x}{3} \leq \dfrac{2x+1}{2} \Leftrightarrow 2(2-x) \leq 3(2x+1) \Leftrightarrow 4-2x \leq 6x+3 \Leftrightarrow -8x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{8}$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4. Vettä on haihdutettava x grammaa, jolloin pätee $0{,}04 \cdot 700 = 0{,}05 \cdot (700 - x)$. Tästä $x = 140$ g.

5. Paistoajalle pätee $t = k\sqrt{m}$, jossa k on vakio ja m kalkkunan massa. Toisiaan vastaavista arvopareista saadaan yhtälö $\dfrac{255\text{ min}}{\sqrt{5{,}0\text{ kg}}} = \dfrac{t_2}{\sqrt{7{,}5\text{ kg}}}$, josta $t_2 \approx 312$ min. Tarvittava aika on siis 5 tuntia 12 minuuttia.

6. **a)** Ohessa on funktion $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{kun } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{kun } x > 1 \end{cases}$ kuvaaja.



b) Funktion f määrittelyjoukko **R** ja arvojoukko $]-\infty, 2]$.

c) Funktion nollakohdat lasketaan asettamalla $x + 1 = 0$ ja $\dfrac{1}{x} = 0$. Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua. Edellisen ratkaisu on $x = -1$, joka on kyseisen lausekkeen käyttövälillä.

d) $f(x) > 0$ muuttujan arvoilla $x > -1$.

7. **a)** Kaupungin väkiluku kuuden vuoden kuluttua on $1{,}027^6 \cdot 75\,000 \approx 88\,000$.

b) Olkoon alkuperäinen asukasmäärä k. Kolme vuoden kuluttua se on $1{,}099 \cdot 1{,}046 \cdot 1{,}005k = ka^3$, josta $a = \sqrt[3]{1{,}099 \cdot 1{,}046 \cdot 1{,}005} \approx 1{,}0493$. Nähdään, että keskimääräinen vuotuinen kasvu on 4,9 %.

8. Olkoon mäntykuutiometrin massa m (kg) ja puun lämpöarvo h (kJ/kg). Vastaavat koivun arvot ovat $1{,}2m$ (kg) ja $0{,}95\,h$ (kJ/kg). Kuutiometri mäntyä tuottaa silloin lämpöä määrän mh ja kuutiometri koivua määrän $1{,}2m \cdot 0{,}95h = 1{,}14mh$. Jälkimmäinen on 14 % suurempi kuin edellinen, joten koivuhalkojen kuutiohinnan olisi oltava 14 % mäntyhalkojen kuutiohintaa korkeampi.

Tehtävien ratkaisuja
Polynomifunktiot

Polynomilaskentaa

1 Polynomi

3. **a)** $Q(10)=5\cdot 10^3-3\cdot 10^2+2\cdot 10+9=5\ 000-300+20+9=4\ 729$

b) $Q(-3)=5\cdot(-3)^3-3\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)+9=-135-27-6+9=-159$

c) $Q(0{,}1)=5\cdot 0{,}1^3-3\cdot 0{,}1^2+2\cdot 0{,}1+9=0{,}005-0{,}03+0{,}2+9=9{,}175$

d) $Q(2a)=5\cdot(2a)^3-3\cdot(2a)^2+2\cdot(2a)+9=40a^3-12a^2+4a+9$

4. **a)** $h(1)=20-5=15\,(\mathrm{m})$ **b)** $h(2)=20\cdot 2-5\cdot 2^2=20\,(\mathrm{m})$

c) $h(4)=20\cdot 4-5\cdot 4^2=0\,(\mathrm{m})$. Kivi on palannut maahan.

6. **a)** $P(\sqrt{2})=2\cdot(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+4=4\sqrt{2}-2+2+4=4\sqrt{2}+4$

b) $P(-\sqrt{2})=2\cdot(-\sqrt{2})^3-(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+4=-4\sqrt{2}-2-2+4=-4\sqrt{2}$

7. Annetusta ehdosta saadaan yhtälö $4a-10-3a=-2$. Tästä ratkaisuna $a=8$.

8. **a)** Kokeen alussa $t=0$, jolloin $n(0)=2\ 500$. Kokeen alussa oli 2 500 bakteeria.

b) $n(12)=25\cdot 12^2+350\cdot 12+2\ 500=10\ 300$ bakteeria.

2 Polynomien summa ja erotus

11. **a)** $P(x)+Q(x)=-x^2-3x+x-4=-x^2-2x-4$

b) $Q(x)-P(x)+4=x-4-(-x^2-3x)+4=x-4+x^2+3x+4=x^2+4x$

c) $P(a)-Q(3a)=-a^2-3a-(3a-4)=-a^2-6a+4$

13. $3x^2-x+6-\left[x^2-2x-(-3x+4)\right]=3x^2-x+6-x^2-x+4=2x^2-2x+10$

14. Lauseke sievenee muotoon $k+4t$. Kun $k=-15$ ja $t=2$, lausekkeen arvo on -7.

16. **a)** $P(x)-Q(x)-R(x)=x^3-3x+2-(2-x^2-2x^3)-(-2x^2+4x)$

$=x^3-3x+2-2+x^2+2x^3+2x^2-4x=3x^3+3x^2-7x$

b) $P(-x)-R(2x)=(-x)^3-3(-x)+2-[-2(2x)^2+4(2x)]$

$=-x^3+3x+2+8x^2-8x=-x^3+8x^2-5x+2$

17. **a)** $P(x)+R(x)=ax^2+5x+2-2x^2-3x+3a=(a-2)x^2+2x+3a+2$
b) $(a-2)$, 2 ja $(3a+2)$

18. Koska erotus $(2+3x^2)-(3+2x^2)=x^2-1$ on positiivinen, kun $x>1$, edellinen luku on suurempi.

3 Polynomien tulo

25. Lauseke sievenee muotoon $4z^2-4-2z^2-3z+5+3z^2+3z=5z^2+1$. Kun $z=-3$, lausekkeen arvo on $5\cdot(-3)^2+1=46$.

28. **a)** $6-(x+1)(x+2)(x+3)=6-(x+1)(x^2+5x+6)$
$=6-(x^3+6x^2+11x+6)=-x^3-6x^2-11x$
b) $8b^3-(a-b)(a-2b)(a-4b)=8b^3-(a-b)(a^2-6ab+8b^2)$
$=8b^3-(a^3-7a^2b+14ab^2-8b^3)=-a^3+7a^2b-14ab^2+16b^3$

29. **a)** $(x+2)(x+7)=x^2+6x+20 \Leftrightarrow x^2+9x+14=x^2+6x+20 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$
b) $4y(y+3)-(2y+1)(2y-3)=19 \Leftrightarrow 4y^2+12y-4y^2+4y-3=19$
$\Leftrightarrow 16y=16 \Leftrightarrow y=1$

30. $2x(x-2)<(x+4)(2x-6) \Leftrightarrow 2x^2-4x<2x^2+2x-24 \Leftrightarrow -6x<-24 \Leftrightarrow x>4$

4 Binomikaavat

34. **a)** $(x-2)^2-(-x-2)^2=x^2-4x+4-x^2-4x-4=-8x$
b) $3(x-1)(x+1)(x^2+1)=3(x^2-1)(x^2+1)=3x^4-3$
c) $(5x+2)(2-5x)+(5x-2)^2=4-25x^2+25x^2-20x+4=-20x+8$

35. **a)** $(x+3)^2+x(x-2)-2(x-3)^2=7 \Leftrightarrow x^2+6x+9+x^2-2x-2x^2+12x-18=7$
$\Leftrightarrow 16x=16 \Leftrightarrow x=1$
b) $19-(y+2)^2=-2(y+1)(y-1)+(1+y)^2$
$\Leftrightarrow 19-y^2-4y-4=-2y^2+2+1+2y+y^2 \Leftrightarrow -6y=-12 \Leftrightarrow y=2$

39. **a)** $V=a\cdot 2a\cdot 3a=6a^3$, $A=2\cdot a\cdot 2a+2\cdot a\cdot 3a+2\cdot 2a\cdot 3a=22a^2$
b) $V=a(a-1)(a+1)=a^3-a$, $A=2\cdot a(a-1)+2\cdot a(a+1)+2\cdot(a-1)(a+1)=6a^2-2$

40. Saatetaan yhtälö aluksi muotoon $\sqrt{30-12\sqrt{6}}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$. Oikea puoli on positiivinen, sillä $3\sqrt{2}=\sqrt{18}>2\sqrt{3}=\sqrt{12}$. Edelleen $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2=18+12-12\sqrt{6}$ $=30-12\sqrt{6}$, joka on sama kuin vasemman puolen juurrettava.

41. Sijoitetaan annetut luvut yhtälöön. Tällöin

$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2 \Leftrightarrow m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2n^2+n^4=m^4+2m^2n^2+n^4$

Yhtälön molemmat puolet ovat samat, joten yhtälö toteutui.

42. $(2t)^2+(k-2t^2)^2-(k-2t^2-1)^2$

$=4t^2+k^2-4kt^2+4t^4-(k^2+4t^4+1-4kt^2-2k+4t^2)$

$=4t^2+k^2-4kt^2+4t^4-\ k^2-4t^4-1+4kt^2+2k-4t^2$

$=2k-1$

***44.** $\sqrt{a\sqrt{2+\sqrt{a}}-a\sqrt[4]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt{2+\sqrt{a}}+a\sqrt[4]{a}}$

$=\sqrt{(a\sqrt{2+\sqrt{a}}-a\sqrt[4]{a})(a\sqrt{2+\sqrt{a}}+a\sqrt[4]{a})}$

$=\sqrt{(a\sqrt{2+\sqrt{a}}\,)^2-(a\sqrt[4]{a})^2}=\sqrt{a^2(2+\sqrt{a})-a^2\sqrt{a}}$

$=\sqrt{2a^2+a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt{a}}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2} \qquad (a>0)$

5 Polynomin jakaminen tekijöihin

49. **a)** $9x^2+ax+4=(3x)^2+ax+2^2$. Tästä nähdään, että $a=2\cdot3\cdot2=12$

b) $25x^2+50x+a=(5x)^2+2\cdot5\cdot5x+a$. Näin ollen $a=5^2=25$.

c) $ax^2+x+1=ax^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot1+1^2.$ Näin ollen $a=\frac{1}{4}$.

d) $x^2-dx+a=x^2-2\cdot\frac{d}{2}\cdot x+a$. Tästä nähdään, että $a=\frac{d^2}{4}$.

50. **a)** $x^2-7x+ax-7a=x(x-7)+a(x-7)=(x-7)(x+a)$

b) $a^4-a^3-a^2+a=a^3(a-1)-a(a-1)$

$=(a-1)(a^3-a)=(a-1)\cdot a(a^2-1)=(a-1)\cdot a(a+1)(a-1)=a(a+1)(a-1)^2$

51. **a)** $2^n+2^{n+m}=2^n+2^n\cdot2^m=2^n(1+2^m)$

b) $a^{n+2}-a^n=a^n\cdot a^2-a^n=a^n(a^2-1)=a^n(a+1)(a-1)$

c) $x^2-(y+z)^2=(x+(y+z))(x-(y+z))=(x+y+z)(x-y-z)$

52. **a)** $y^3+4y^2-y-4=y^2(y+4)-(y+4)=(y+4)(y^2-1)=(y+4)(y+1)(y-1)$

b) $(\pi-9)^2+\pi-9=(\pi-9)(\pi-9+1)=(\pi-9)(\pi-8)$

c) $(2-a)^3+(a-2)^2=(2-a)^3+(2-a)^2=(2-a)^2(2-a+1)=(2-a)^2(3-a)$

d) $(x+2)(x-2)-x-2=(x+2)(x-2)-(x+2)=(x+2)(x-2-1)=(x+2)(x-3)$

53. **a)** $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

b) $\sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = |a+2|$

c) $\sqrt{y^4+10y^2+25} = \sqrt{(y^2+5)^2} = y^2+5$

54. Kun lauseke jaetaan tekijöihin, saadaan $k^3-k = k(k^2-1) = (k-1)\cdot k\cdot(k+1)$.

Jos k on 0 tai 1, saadaan lausekkeen arvoksi nolla, joka on jaollinen kuudella.

Jos $k \geq 2$, tulo muodostuu kolmesta peräkkäisestä luonnollisesta luvusta. Näistä yksi on aina jaollinen kahdella ja toinen kolmella. Tulo on näin ollen jaollinen kuudella.

***55.** Muodostetaan lukujen erotus.

$a^2+\frac{1}{2}b^2-ab = a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2 = (a-\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{4}b^2 > 0$, koska $(a-\frac{1}{2}b)^2 \geq 0$ ja $\frac{1}{4}b^2 > 0$. Näin ollen $a^2+\frac{1}{2}b^2-ab > 0$ eli $a^2+\frac{1}{2}b^2 > ab$.

6 Ensimmäisen asteen polynomifunktio

59. **a)** Yhtälön ratkaistusta muodosta $y = \frac{1}{2}x+3$ nähdään, että kulmakerroin $k = \frac{1}{2}$.

b) Koska $k > 0$, suora on nouseva.

c) Koordinaattiakselien leikkauspisteet selvitetään merkitsemällä yhtälössä $-x+2y-6=0$ vuorotellen x ja y nollaksi, minkä jälkeen ratkaistaan toinen muuttuja. Suora leikkaa x-akselin pisteessä (–6, 0) ja y-akselin pisteessä (0, 3).

61. Suoran $y = ax-x-3$ kulmakerroin on $a-1$.

a) Suora on nouseva, kun $a-1>0$ eli kun $a>1$.

b) Suora on laskeva, kun $a-1<0$ eli arvoilla $a<1$.

c) Suora on x-akselin suuntainen, kun $a-1=0$ eli arvolla $a=1$.

62. Suora $y=\frac{1}{3}x-2$ on suoran $y=\frac{2}{3}x+4$ yläpuolella, kun erotus $(\frac{1}{3}x-2)-(\frac{2}{3}x+4)$ on positiivinen. Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{1}{3}x-2-(\frac{2}{3}x+4)>0$.

$\frac{1}{3}x-2-(\frac{2}{3}x+4) = \frac{1}{3}x-2-\frac{2}{3}x-4 = -\frac{1}{3}x-6>0$. Tästä $x<-18$.

7 Rationaalilauseke

68. **a)** $\dfrac{9a^2-6a+1}{9a-3} = \dfrac{(3a-1)^2}{3(3a-1)} = \dfrac{3a-1}{3}$

b) $\dfrac{2x+1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}-\dfrac{{}^{x)}1}{x+1} = \dfrac{2x+1-x}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2+2x+1} = \dfrac{{}^{x+1)}3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-2x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+4}{(x+1)^2}$

69. **a)** $\frac{6}{x^2-4}+\frac{3}{x+2}=\frac{6}{(x+2)(x-2)}+\frac{^{x-2)}3}{x+2}=\frac{6+3x-6}{(x+2)(x-2)}=\frac{3x}{x^2-4}$

b) $\frac{y}{2y+4}-\frac{2}{y^2+2y}=\frac{^{y)}y}{2(y+2)}-\frac{^{2)}2}{y(y+2)}=\frac{y^2-4}{2y(y+2)}=\frac{(y+2)(y-2)}{2y(y+2)}=\frac{y-2}{2y}$

c) $\frac{2ab-b^2}{a-b}+a-b=\frac{2ab-b^2}{a-b}+\frac{^{a-b)}a-b}{1}=\frac{2ab-b^2+a^2-2ab+b^2}{a-b}=\frac{a^2}{a-b}$

70. **a)** $(9a^2-b^2)\cdot\frac{2}{3a+b}=\frac{(3a+b)(3a-b)\cdot 2}{3a+b}=6a-2b$

b) $\frac{8a^3b-2ab^3}{2ab^3}:(b-2a)=\frac{2ab(4a^2-b^2)}{2ab^3(b-2a)}=\frac{2ab(2a+b)(2a-b)}{-2ab^3(2a-b)}=-\frac{2a+b}{b^2}$

71. $\frac{3x-6}{P(x)-P(2)}=\frac{3x-6}{x^2+1-5}=\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3}{x+2}$

72. $\dfrac{a+\frac{b^2}{a}}{b+\frac{a^2}{b}}=\dfrac{\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{b^2+a^2}{b}}=\frac{(a^2+b^2)\cdot b}{(b^2+a^2)\cdot a}=\frac{b}{a}$

73. $x^2-y^2=[\frac{1}{2}(\frac{1}{t}+t)]^2-[\frac{1}{2}(\frac{1}{t}-t)]^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{t^2}+2+t^2)-\frac{1}{4}(\frac{1}{t^2}-2+t^2)$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{t^2}+2+t^2-\frac{1}{t^2}+2-t^2)=1$

Toisen asteen yhtälö

2 Vaillinainen toisen asteen yhtälö

82. **a)** $12x^2-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 12x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{36} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{6}$

b) $2x^2=x \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=\frac{1}{2}$

c) $x^2=x\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-x\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x(x-\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=\sqrt{2}$

83. **a)** $\frac{x}{4} = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{4} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(\frac{1}{4} - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$. Ei ratkaisua, koska $x^2 + 4$ on aina positiivinen.

c) $3x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(3x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

84. **a)** $x(x+1) = 7(x+1) \Leftrightarrow x(x+1) - 7(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-7) \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 7$

b) $2x + 3 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow (2x+3) - (2x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(1 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+3)(-2x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1\frac{1}{2}$ tai $x = -1$

c) $x^2 - 2x = 4(x-2) \Leftrightarrow x(x-2) - 4(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ tai $x = 4$

85. **a)** $(2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$

b) $(x+2)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 4 \Leftrightarrow x = 2$ tai $x = -6$

c) $(1-x)^2 + 1 = 0$. Ei ratkaisua, koska $(1-x)^2 \geq 0$.

86. **a)** $x(x+100) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -100$

b) $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 6 \Leftrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$

c) $8 - (12-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 8 = (12-x)^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{8} = 12 - x \Leftrightarrow x = 12 \pm 2\sqrt{2}$

89. **a)** $10^4(x^2 - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 10^4(x^2-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(10^4 x + 10^4 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(10^4 x + 9\,999) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ tai $x = -0{,}9999$

b) $\frac{(x+1)^2 - \pi^2}{x^2 + \pi^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - \pi^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\pi \Leftrightarrow x = -1 \pm \pi$

90. $(1 + x + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 - (\sqrt{x})^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 - x = 1$
$\Leftrightarrow x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1+x) = 0$. Saadun yhtälön juurista 0 ja –1 jälkimmäinen hylätään neliöjuuren määrittelyehdon takia. Vastaus on $x = 0$.

91. Koska $x = 2$ on toinen juurista, saadaan vakiolle a arvo 2 yhtälöstä $(2+1)^2 = 2a + 5$. Sijoitetaan a alkuperäiseen yhtälöön, jolloin $(x+1)^2 = 2x + 5$ ja edelleen $x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Näin ollen toinen juuri on $x = -2$.

92. Olkoon neliö sivu s ja ympyrän säde r. Alojen yhtäsuuruuden perusteella saadaan yhtälö $s^2 = \pi r^2$, josta $s = r\sqrt{\pi}$. Neliön piiri on $4r\sqrt{\pi}$ ja ympyrän kehä $2\pi r$. Neliön piiri on $\frac{4r\sqrt{\pi} - 2\pi r}{2\pi r} \cdot 100\,\% = \frac{4\sqrt{\pi} - 2\pi}{2\pi} \cdot 100\% \approx 12{,}8\,\%$ pitempi kuin ympyrän kehä.

3 Täydellinen toisen asteen yhtälö

98. Ratkaistaan yhtälöt ilman ratkaisukaavaa.

a) $(2x-3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow 2x-3 = \pm 15 \Leftrightarrow 2x = 3 \pm 15 \Leftrightarrow x = 9$ tai $x = -6$

b) $(x-2)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow x-2 = \pm(2x-1) \Leftrightarrow x-2 = 2x-1$ tai $x-2 = -2x+1$
$\Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 1$

c) $(\frac{x}{2}+6)^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+6 = \pm(1-x) \Leftrightarrow \frac{x}{2}+6 = 1-x$ tai $\frac{x}{2}+6 = -1+x$
$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = -5$ tai $-\frac{1}{2}x = -7 \Leftrightarrow x = -3\frac{1}{3}$ tai $x = 14$

100. **a)** $4x^2+20x+25 = 0 \Leftrightarrow (2x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$

b) $x^2+10x+23 = 0 \Leftrightarrow x^2+10x+25 = 25-23 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 2 \Leftrightarrow x+5 = \pm\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = -5 \pm \sqrt{2}$

101. Jos x ja x + 1 ovat aukeaman sivunumerot, niin $x(x+1) = 2\,162$ eli $x^2+x-2\,162 = 0.$ Tämän toisen asteen yhtälön juuret ovat 46 ja –47. Kyseessä on aukeama 46 – 47.

102. Sekä pituutta että leveyttä kasvatetaan x metrillä. Esittämällä pinta-ala kahdella tavalla saadaan yhtälö $(16+x)(12+x) = 16\cdot 12+165.$ Se sievenee muotoon $x^2+28x-165 = 0.$ Ratkaisut ovat 5 ja –33, joten uudet mitat ovat 21 metriä ja 17 metriä.

106. Funktio $f(x) = x(3-x)$ ei saa arvoa 3, koska yhtälöllä $x(3-x) = 3$ ei ole ratkaisua. Ratkaisemalla yhtälö $x(3-x) = 1{,}25$ saadaan selville ne muuttujan arvot, joilla funktio saa arvon 1,25. Tällöin $-x^2+3x-1{,}25 = 0$, josta x = 0,5 tai x = 2,5.

107. Yhtälön $x^2-2ax+2a-1 = 0$ ratkaisuina saadaan $x = 1$ tai $x = 2a-1$. Kun a korvataan arvolla a + 1, on toinen juuri x = 2(a + 1) – 1 = 2a + 1. Tämä juuri kasvaa kahdella ja toinen juuri pysyy samana, koska se on a:sta riippumaton.

108. Annetusta ehdosta saadaan yhtälö $(x-1)^2-(x-1)+a = (2x)^2-2x+a$ ja edelleen $-3x^2-x+2 = 0.$ Ratkaisuna $x = -1$ tai $x = \frac{2}{3}$.

***109.** Funktion $f(x) = x^2-x-6$ nollakohdat x = –2 ja x = 3 saadaan ratkaisemalla yhtälö $x^2-x-6 = 0.$ Funktion kuvaajana olevan paraabelin $y = x^2-x-6$ huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä eli kohdassa $x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$. Tällöin huipun y-koordinaatti on $y = (\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-6 = -6\frac{1}{4}$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, on lausekkeen x^2-x-6 pienin arvo $-6\frac{1}{4}$.

4 Diskriminantti

111. **a)** Yhtälöllä $2x^2 - tx + 2 = 0$ on tarkalleen yksi reaalijuuri, kun diskriminantti $D = t^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 0$ eli t:n arvoilla ± 4. Kun t = 4, kyseinen juuri on $x = \frac{t}{4} = 1$. Vastaavasti t:n arvolla –4 juureksi tulee –1.

b) Yhtälöllä $x^2 + tx + t + 3 = 0$ on tarkalleen yksi reaalijuuri, kun diskriminantti $D = t^2 - 4\cdot(t+3) = t^2 - 4t - 12 = 0$ eli t:n arvoilla 6 ja –2. Kun t = 6, kyseinen juuri on $x = \frac{-t}{2} = -3$. Vastaavasti t:n arvolla –2 juureksi tulee 1.

112. Yhtälön $ax^2 + 2x + 5 = 0$ juuret ovat reaaliset, kun $D = 4 - 4a\cdot 5 \geq 0$. Tästä $a \leq \frac{1}{5}$.

113. Yhtälöllä on reaalijuuri kaikilla t:n arvoilla, koska diskriminantti on ei-negatiivinen. $D = (t+5)^2 - 4\cdot 1\cdot 5t = t^2 + 10t + 25 - 20t = t^2 - 10t + 25 = (t-5)^2 \geq 0$

114. Kyseessä on ylöspäin aukeneva paraabeli, joka ei leikkaa x-akselia, koska $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = -11 < 0$.

116. Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen, jos a ja c ovat erimerkkisiä, sillä tällöin tulo $-4ac > 0$.

117. $D = (-2a)^2 - 4(a+1)(a+2) = 4a^2 - 4a^2 - 12a - 8 = -12a - 8$. Juuret ovat yhtä suuret, kun $-12a - 8 = 0$, josta $a = -\frac{2}{3}$. Alkuperäinen yhtälö saa tällöin muodon $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$, josta $x = -2$.

118. Lauseke on määritelty, kun $x^2 - 5bx + 7b^2 \geq 0$. Lausekkeeseen liittyvä diskriminantti on $D = (-5b)^2 - 4\cdot 1\cdot 7b^2 = -3b^2 \leq 0$. Tästä syystä ylöspäin aukeava paraabeli $y = x^2 - 5bx + 7b^2$ sijaitsee joko kokonaan x-akselin yläpuolella tai sivuaa x-akselia. Näin ollen kaikilla b:n arvoilla pätee epäyhtälöehto $x^2 - 5bx + 7b^2 \geq 0$.

***119.** 1°. Kun a = 0, yhtälö saa muodon $2x - 1 = 0$, josta $x = \frac{1}{2}$.

2°. Yhtälöllä on yksi ratkaisu x = 1, kun D = 4 + 4a = 0, jolloin a = –1.

3°. Kun $a < -1$, on $D < 0$, jolloin yhtälöllä ei reaalijuuria.

4°. Kun $a > -1$ ja $a \neq 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{a+1}}{a}$.

***120.** Toisen asteen yhtälöllä on enemmän kuin kaksi ratkaisua silloin, kun se on identtisesti tosi. Näin on, jos kaikki kertoimet ovat yhtä aikaa nollia eli yhtälö on muotoa $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0 = 0$. Saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 - 5a + 4 = 0 \\ a^2 - a = 0. \end{cases}$ Viimeisen yhtälön ratkaisuista $a = 0$ tai $a = 1$ vain jälkimmäinen toteuttaa kaikki yhtälöt.

5 Juurien summa ja tulo

126. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^2 - \frac{7}{4}x + 1 = 0.$ Juuret ovat toistensa käänteislukuja, koska juurien tulo eli vakiotermi on 1.

127. **a)** $x^2 - (\frac{1}{2} - \frac{2}{3})x + (\frac{1}{2})(-\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - [(m+n) + (m-n)]x + (m+n)(m-n) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$

c) $x^2 - [(1+\sqrt{2}) + (-1+\sqrt{2})]x + (1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

128. Koska yhtälö on kokonaiskertoiminen, juuressa $2+\sqrt{3}$ esiintyvä neliöjuuri on peräisin ratkaisukaavasta. Yhtälön juuret ovat siis $x_1 = 2+\sqrt{3}$ ja $x_2 = 2-\sqrt{3}$. Tällöin $x_1 + x_2 = 4$ ja $x_1x_2 = 1$. Kysymykseen tuleva yhtälö on esimerkiksi $x^2 - 4x + 1 = 0.$

129. Koska yhtälön $x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0$ juurien summa $x_1 + x_2 = 2$ ja siis riippumaton a:n arvosta, juuret eivät voi olla toistensa vastalukuja millään a:n arvolla.

130. Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurien summa on $z_1 = -\frac{b}{a}$, joka on toinen kysytyn yhtälön juurista. Juurien tulo $z_2 = \frac{c}{a}$ on toinen juuri. Kysytty yhtälö on muotoa

$x^2 - (-\frac{b}{a} + \frac{c}{a})x - \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + a(b-c)x - bc = 0.$

131. Alkuperäisen yhtälön juurien summa $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$ ja juurien tulo $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}$.

a) Uuden yhtälön juurien summa on $3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot (-\frac{4}{3}) = -4$ ja juurien tulo $3x_1 \cdot 3x_2 = 9x_1x_2 = 9 \cdot (-\frac{5}{3}) = -15.$ Yhtälö on $x^2 + 4x - 15 = 0$ (tai tämä yhtälö kerrottuna jollakin nollasta eroavalla vakiolla).

b) Uuden yhtälön juurien summa ja tulo ovat

$(x_1 + 3) + (x_2 + 3) = (x_1 + x_2) + 6 = -\frac{4}{3} + 6 = \frac{14}{3}$ ja

$(x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = -\frac{5}{3} + 3(-\frac{4}{3}) + 9 = \frac{10}{3}.$

Tällöin uusi yhtälö on $3x^2 - 14x + 10 = 0.$

6 Toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin

135. **a)** Koska yhtälön $2x^2 + x + 1 = 0$ diskriminantti $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$, annettu polynomi on jaoton (reaalilukujen joukossa).
b) Yhtälön $-3x^2 + 4x - 8 = 0$ diskriminantti $D = 4^2 - 4 \cdot (-3)(-8) < 0$, joten annettu polynomi on jaoton.

136. Jos $x - 2$ on tekijänä, polynomin toisena nollakohtana on $x_1 = 2$. Tällöin $2^2 + 2k - 1 = 0$, josta $k = -\frac{3}{2}$. Polynomi on siis $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. Toisen asteen yhtälön $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ juuret ovat $x_1 = -\frac{1}{2}$ ja $x_2 = 2$, joten toinen tekijä on $x + \frac{1}{2}$.

139. **a)** Yhtälön $ax^2 - ax + x - 2a - 2 = 0$ juuret ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = -\frac{a+1}{a}$, $a \neq 0$. Tällöin $ax^2 - ax + x - 2a - 2 = a(x-2)(x + \frac{a+1}{a}) = (x-2)(ax + a + 1)$.
b) Ratkaistaan yhtälö $2a^2 + ac + (-c^2 + 3bc - 2b^2) = 0$ muuttujan a suhteen. Saadaan $a_1 = -c + b$ ja $a_2 = \frac{c - 2b}{2}$ ja tulomuoto $(a - b + c)(2a + 2b - c)$.

140. **a)** $\dfrac{4a^2 - 4a + 1}{1 - a - 2a^2} = \dfrac{(2a-1)^2}{(a+1)(1-2a)} = \dfrac{1-2a}{a+1}$

b) $\dfrac{x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 1}{x - \sqrt{3} - 2} = \dfrac{(x - \sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{3} - 2)}{x - \sqrt{3} - 2} = x - \sqrt{3} + 2$

141. **a)** Kun polynomi on jaollinen binomilla $x - p$, toisena nollakohtana on $x = p$. Tällöin $p^2 + (p+1)p + p(1-p) = 0 \Leftrightarrow p^2 + 2p = 0 \Leftrightarrow p = 0$ tai $p = -2$.
b) Kun polynomi on jaollinen binomilla $2x - 1$, toisena nollakohtana on $x = \frac{1}{2}$. Tällöin $(\frac{1}{2})^2 + (p+1) \cdot \frac{1}{2} + p(1-p) = 0 \Leftrightarrow -p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{21})$.

142. Kirjoitetaan murtolauseke aluksi muotoon $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x + a} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{2x^2 + x + a}$. Lauseke voidaan supistaa, jos nimittäjän tekijänä on $x - 1$ tai $x + 2$.

Jos tekijänä on $x - 1$, on nollakohtana $x = 1$, joten $2 \cdot 1^2 + 1 + a = 0$ ja $a = -3$.
Jos tekijänä on $x + 2$, nollakohtana on $x = -2$, joten $2(-2)^2 - 2 + a = 0$ ja $a = -6$.

Tapauksessa $a = -3$ saadaan $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(2x+3)(x-1)} = \dfrac{x+2}{2x+3}$.
Tapauksessa $a = -6$ saadaan $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 6} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(2x-3)(x+2)} = \dfrac{x-1}{2x-3}$.

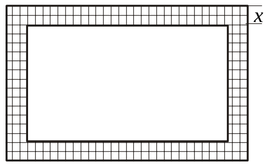
7 Sovelluksia

143. Jos toinen luvuista on x, toinen on $18 - x$. Tuloehdosta $x(18 - x) = 72$ saadaan ratkaisuina 6 ja 12, jotka ovat kysytyt luvut.

144. Peräkkäiset luonnolliset luvut ovat muotoa $n-1,\ n$ ja $n+1$. Tällöin $(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$. Yhtälö sievenee muotoon $n^2 - 4n = 0$. Sen juuret ovat $n = 0$ tai $n = 4$. Juuri $n = 0$ ei käy, sillä silloin ensimmäinen luku olisi –1. Ainoat peräkkäiset luonnolliset luvut, jotka ovat Pythagoraan lukuja, ovat 3, 4 ja 5.

145. Olkoot uuden palstan mitat $12 + x$ ja $18 + x$. Tällöin $(12+x)(18+x) = 2\cdot 12\cdot 18$. Sievennyksen jälkeen yhtälö on $x^2 + 30x - 216 = 0$. Ratkaisut ovat $x = 6$ tai $x = -36$. Näistä vai edellinen kelpaa. Uuden palstan mitat ovat 18 m ja 24 m.

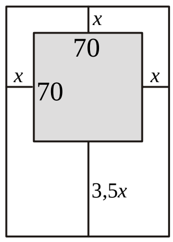
146. **a)** Laatoitettavan alueen pinta-ala laatoituksen leveyden funktiona on $f(x) = 4\cdot x\cdot x + 2\cdot 12\cdot x + 2\cdot 7\cdot x = 4x^2 + 38x,\ (x > 0)$.



b) Annetun ehdon perusteella saadaan yhtälö $4x^2 + 38x = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 7 \Leftrightarrow 4x^2 + 38x - 42 = 0$, jonka ratkaisuista $x = 1$ tai $x = -10{,}5$ vain ensimmäinen käy. Ehdon täyttävän laatoituksen on oltava yhden metrin levyinen.

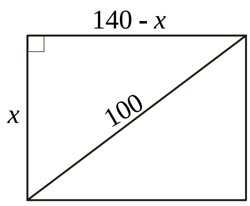
147. Bakteerien lukumäärä kokeen alussa on $N(0) = 750$. Bakteerien määrä on nelinkertaistunut, kun $20t^2 + 90t + 750 = 4\cdot 750$. Sievennetyn yhtälön $2t^2 + 9t - 225 = 0$ ratkaisut ovat $t = \dfrac{-9 \pm \sqrt{1881}}{4} = \dfrac{-9 \pm 3\sqrt{209}}{4}$, joista vain $t = \dfrac{-9 + 3\sqrt{209}}{4} \approx 8{,}6$ käy. Määrä on nelikertaistunut noin 8,6 tunnissa.

148. Koska neliön pinta-ala on neljä aaria, sivun pituus on 20 m. Merkitään käytävän leveyttä kirjaimella x. Ristikkäisten käytävien yhteisestä pinta-alasta saadaan yhtälö $20x + 20x - x^2 = 0{,}12\cdot 400 \Leftrightarrow -x^2 + 40x - 48 = 0$. Ratkaisuista $x \approx 1{,}24$ tai $x \approx 38{,}8$ vain 1,24 (m) kelpaa. Vastauksena riittää desimetrin tarkkuus 1,2 m.



149. Oheisen kuvion merkintöjen mukaan saadaan yhtälö $(7{,}0 + 2x)(7{,}0 + 4{,}5x) = 155$ eli $9x^2 + 45{,}5x - 106 = 0$. Ratkaisut ovat $x \approx -6{,}79$ tai $x \approx 1{,}73$. Kortin mitat ovat siis $7{,}0 + 2\cdot 1{,}73 \approx 10{,}5\,(\text{cm})$ ja $7{,}0 + 4{,}5\cdot 1{,}73 \approx 14{,}8\,(\text{cm})$.

150. Kun seinää vastaan kohtisuoria sivuja merkitään x:llä, on seinän suuntaisen sivun pituus $20 - 2x$. Saadaan yhtälö $(20 - 2x)x = 45$, jonka ratkaisut ovat $x \approx 3{,}4$ tai $x \approx 6{,}6$. Seinää vastaan kohtisuora sivu voi olla 3,4 m tai 6,6 m.



151. Kuvion merkintöjen perusteella saadaan yhtälö $x^2 + (140 - x)^2 = 100^2$ eli $2x^2 - 280x + 9600 = 0$. Ratkaisut ovat $x = 60$ tai $x = 80$. Alueen pinta-alaksi tulee $60 \times 80\,\text{m}^2 = 0{,}48\,\text{ha}$.

152. **a)** Yhtälön $\frac{n(n-3)}{2} = 90$ sievennetylle muodolle $n^2 - 3n - 180 = 0$ saadaan ratkaisut $n = 15$ tai $n = -12$. Kyseinen monikulmio on näin ollen 15-kulmio.

b) Yhtälöllä $\frac{n(n-3)}{2} = 100$ ei ole kokonaislukujuuria ($n \approx 15{,}7$ tai $n \approx -12{,}7$), joten ei ole olemassa monikulmiota, jossa olisi 100 lävistäjää.

153. Olkoon alkuperäinen hinta a, jolloin kahden nousun jälkeinen hinta on $1{,}2a$. Nousuista saadaan yhtälö $(1 + \frac{p}{100})^2 a = 1{,}2a$, joka sievenee muotoon $p^2 + 200p - 2000 = 0$. Yhtälön ratkaisut ovat $p \approx 9{,}5$ tai $p \approx -209{,}5$, joista vain edellinen käy.

154. **a)** Ratkaistaan yhtälö $1{,}5 + 17{,}7t - 4{,}9t^2 = 10$. Yhtälö sievenee muotoon $-4{,}9t^2 + 17{,}7t - 8{,}5 = 0$, ja sen ratkaisut ovat $t \approx 0{,}6$ tai $t \approx 3{,}0$. Kappale on 10 metrin korkeudella, kun $t \approx 0{,}6\,\text{s}$ tai $t \approx 3{,}0\,\text{s}$.

b) Kappale osuu maahan, kun $1{,}5 + 17{,}7t - 4{,}9t^2 = 0$. Yhtälön ratkaisut ovat $t \approx -0{,}1$ tai $t \approx 3{,}7$. Ratkaisuksi hyväksytään vain arvo $t \approx 3{,}7$ s.

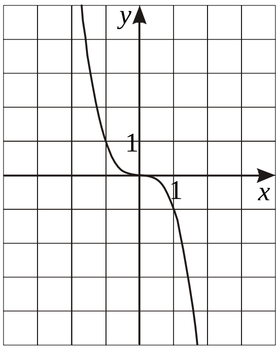
155. Merkitään toista kateettia kirjaimella x, jolloin toinen kateetti on $s - x$. Kateetit ja hypotenuusa toteuttavat yhtälön $x^2 + (s - x)^2 = a^2$, joka sievenee muotoon $2x^2 - 2sx + s^2 - a^2 = 0$. Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}x(s - x) = \frac{1}{2}(sx - x^2)$. Muokataan edellä oleva toisen asteen yhtälö ensin muotoon $2(sx - x^2) = s^2 - a^2$ ja edelleen $\frac{1}{2}(sx - x^2) = \frac{1}{4}(s^2 - a^2)$. Viimeksi saatu tulos on kysytty pinta-ala.

156. Olkoon neliön sivun pituus aluksi a, jolloin ala on a^2 ja piiri $4a$. Pienentyneen neliön ala on tällöin $0{,}75\,a^2$, sivun pituus $a\sqrt{0{,}75}$ ja piiri $4a\sqrt{0{,}75}$. Neliön piiri on lyhentynyt $\frac{4a - 4a\sqrt{0{,}75}}{4a} = 1 - \sqrt{0{,}75} = 100(1 - \sqrt{0{,}75})\,\% = (100 - 50\sqrt{3})\,\% \approx 13{,}4\,\%$.

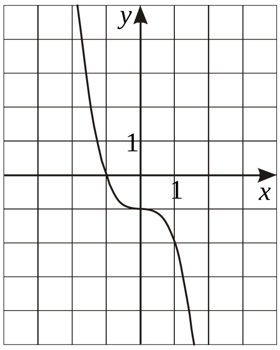
Korkeamman asteen yhtälö

1 Korkeamman asteen polynomifunktio

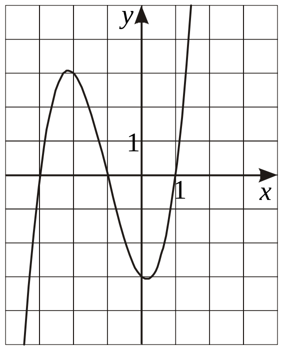
158. **a)** $f(x) = -x^3$



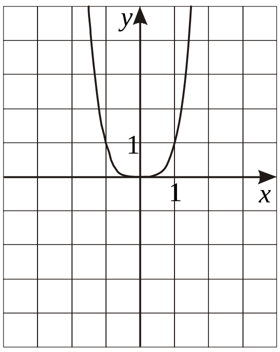
b) $f(x) = -x^3 - 1$



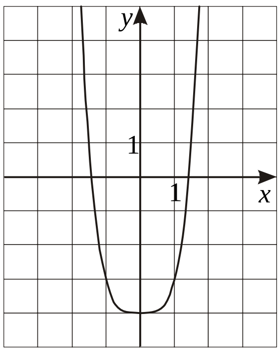
c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$



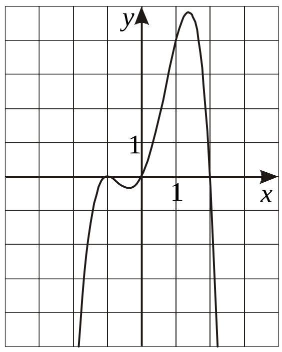
d) $f(x) = x^4$



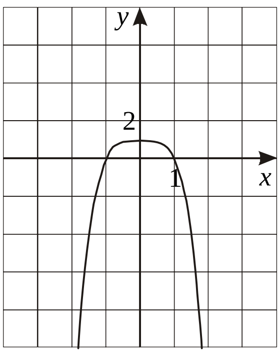
e) $f(x) = x^4 - 4$



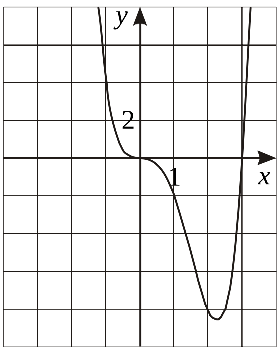
f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$



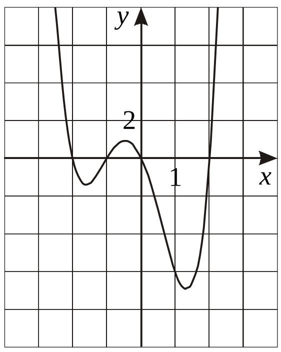
159. **a)** $f(x) = -x^4 + 1$



b) $f(x) = x^4 - 3x^3$



c) $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$



a) Funktion $f(x) = -x^4 + 1$ arvot ovat positiivisia, kun $-1 < x < 1$, ja negatiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 1$.
b) Funktion $f(x) = x^4 - 3x^3$ arvot ovat positiivisia, kun $x < 0$ tai $x > 3$, ja negatiivisia, kun $0 < x < 3$.
c) Funktion $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -2$ tai $-1 < x < 0$ tai $x > 2$, ja negatiivisia, kun $-2 < x < -1$ tai $0 < x < 2$.

2 Korkeamman asteen yhtälö

167. **a)** $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) $4x + 8 = (x+2)^3 \Leftrightarrow 4(x+2) - (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(4 - x^2 - 4x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(-x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = 0$ tai $x = -2$

168. **a)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ tai $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ tai $x = \pm 2$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ tai $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm\sqrt{3}$

169. **a)** $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ tai $x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm 2$

b) $4x^5 + 11x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x^4 + 11x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x^2 = -3$ tai $x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \pm\frac{1}{2}$

170. Muodostetaan annetuista ehdosta yhtälö.
$(x-1) + x + (x+1) = (x-1)x(x+1) \Leftrightarrow 3x = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$. Ratkaisuna $x = -2$ tai $x = 0$ tai $x = 2$. Ehdon täyttävät luvut ovat –3, –2 ja –1 tai –1, 0 ja 1 tai 1, 2 ja 3.

171. **a)** $x^3 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -1$ tai $x = 2$

b) $(2x-1)^3 = 2 - 4x \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)[(2x-1)^2 + 2] = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(4x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

172. **a)** $x^2 + 4x + 4 = x^2(x+2) \Leftrightarrow (x+2)^2 - x^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+2-x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 2$

b) $(1+x^2)^3 = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

174. 1° Tulon nollasäännön perusteella $2x + 1 = 0$ tai $1 - 2x = 0$ tai $x + 1 = 0$, joista $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -1$.

2° Sieventämällä päästään muotoon $-4x^3 - 4x^2 + x = 0$. Edelleen
$x(-4x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

175. Kun sijoitetaan juuren arvo $x = 1$ annettuun yhtälöön, saadaan $5a - 5 = 0$, josta $a = 1$. Yhtälönä on nyt $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$ eli $x(x^2 + 3x - 4) = 0$. Ratkaisut ovat $x = 0$, $x = 1$ tai $x = -4$. Juuren $x = 1$ lisäksi yhtälöllä on juurina myös $x = 0$ ja $x = -4$.

176. Annetun funktion kuvaaja leikkaa x-akselin ainoastaan kerran, jos yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ on vain yksi reaalinen ratkaisu. $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2(x+2) + (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Polynomiepäyhtälöt

1 Toisen asteen epäyhtälö

184. **a)** Lauseke on reaalinen, kun $x^2-9\ge 0$ eli kun $x\le -3$ tai $x\ge 3$.
b) Lauseke on reaalinen, kun $x(2-x)\ge 0$ eli arvoilla $0\le x\le 2$.

185. Yhtälöllä ei ole reaalijuuria, jos diskriminantti $D=a^2+12a<0$. Epäyhtälön ratkaisuna $-12<a<0$.

186. Jos suorakulmion yhden sivun pituus on x m, niin viereisen sivun pituus on $(34 - x)$ m. Alaa koskevasta ehdosta saadaan epäyhtälö $x(34-x)\ge 240$ eli $x^2-34x+240\le 0$. Epäyhtälö toteutuu arvoilla $10\le x\le 24$, joten 10 m $\le$ sivun pituus $\le$ 24 m.

188. Annetun yhtälön juuret ovat reaaliset silloin, kun $D=(3a+1)^2-4\cdot 81\ge 0$ eli $9a^2+6a-323\ge 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $a\le -\frac{19}{3}$ tai $a\ge \frac{17}{3}$.

189. Annettu funktio on määritelty, kun $x\ne 1$ ja $5x+3-2x^2\ge 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $-\frac{1}{2}\le x\le 3$. Näin ollen funktio on määritelty, kun $-\frac{1}{2}\le x\le 3, x\ne 1$.

190. Ratkaistaan erikseen epäyhtälöt $x^2+x>1{,}5-1{,}5x$ ja $1{,}5-1{,}5x>x-1$. Epäyhtälöt sievenevät muotoon $x^2+2{,}5x-1{,}5>0$ ja $-2{,}5x+2{,}5>0$. Edellinen toteutuu arvoilla $x<-3$ tai $x>0{,}5$, jälkimmäinen arvoilla $x<1$. Kaksoisepäyhtälön ratkaisu on täten $x<-3$ tai $0{,}5<x<1$.

191. Lauseke on reaalinen, kun $3x\ge 0$ ja $3-x^2\ge 0$. Edellinen toteutuu, kun $x\ge 0$, jälkimmäinen, kun $3-x^2\ge 0$ eli arvoilla $-\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3}$. Molemmat ehdot toteutuvat, kun $0\le x\le \sqrt{3}$.

192. Jos suorakulmion yhden sivun pituus on x m, niin viereisen sivun pituus on $(160 - x)$ m ja suorakulmion ala $x(160 - x)$. Asetetaan epäyhtälö $x(160-x)\le 6400$ eli $-x^2+160x-6400\le 0$. Epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla, mikä osoittaa, että pinta-ala ei ainakaan ylitä arvoa 6 400 m^2. Toisaalta kyseinen arvo saavutetaan x:n arvolla 80 (m), jolloin pinta-ala on juuri 64 aaria.

193. Funktion $f(x)=-2x^2+3x+c$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Kuvaaja ei kohtaa x-akselia, kun yhtälöllä $-2x^2+3x+c=0$ ei ole reaalisia ratkaisuja. Näin on, kun $D=9+8c<0$ eli $c<-\frac{9}{8}$.

194. Koska funktio on aidosti vähenevä ja $f(x^2) < f(18-3x)$, niin $x^2 > 18-3x$. Ratkaistaan epäyhtälö $x^2+3x-18>0$. Ratkaisuna $x < -6$ tai $x > 3$.

195. Epäyhtälön $x^2-2x-2>0$ ratkaisu on $x < 1-\sqrt{3} \approx -0{,}73$ tai $x > 1+\sqrt{3} \approx 2{,}73$. Epäyhtälö $3x - \frac{1}{4} < 4x$ eli $-x - \frac{1}{4} < 0$ toteutuu, kun $x > -\frac{1}{4} = -0{,}25$. Molemmat epäyhtälöt toteutuvat vain, jos $x > 1+\sqrt{3}$. Se merkitsee, että ne luvut, jotka toteuttavat epäyhtälön $x^2-2x-2>0$, eivät välttämättä toteuta epäyhtälöä $3x-\frac{1}{4} < 4x$.

196. Ratkaistaan epäyhtälö $1{,}5+17{,}7t-4{,}9t^2 > 10$. Epäyhtälö sievenee muotoon $-4{,}9t^2+17{,}7t-8{,}5>0$. Likiarvoratkaisu on $0{,}57 < t < 3{,}04$. Kappale on yli kymmenen metrin korkeudella aikavälillä 0,6 s < t < 3,0 s eli 2,4 sekuntia.

2 Korkeamman asteen epäyhtälö

201. Jos reaaliluku on x, on sen kuution ja neliön summa positiivinen, kun $x^2+x^3>0$. Epäyhtälö kirjoitetaan muotoon $x^2(x+1)>0$, josta nähdään sen toteutuvan, kun $x+1>0$ ja $x \neq 0$. Tehtävässä asetetun ehdon toteuttavat kaikki reaaliluvut $x > -1$ ja $x \neq 0$.

202. Neliöjuurilauseke on arvoltaan reaalinen, kun juurrettava ei ole negatiivinen. Reaalisuusehdon eli neliöjuuren määrittelyehdon mukaan on oltava $x^5-x^3 \geq 0$ eli $x^3(x^2-1)\geq 0$. Laaditaan tekijöiden ja niiden tulon merkkikaavio. Sen perusteella nähdään, että juurilauseke on reaalinen, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 1$.

x^3	−	−	+	+
x^2-1	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	-1	0	1	

203. **a)** Sievennetään epäyhtälö siirtämällä kaikki termit vasemmalle ja ryhmittelemällä termit. $2x^3+2 \leq x^2+4x \Leftrightarrow 2x^3-x^2-4x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1)-2(2x-1)\leq 0$ $\Leftrightarrow (2x-1)(x^2-2)\leq 0$. Laaditaan tekijöiden ja niiden tulon merkkikaavio. Sen perusteella tulos on $x \leq -\sqrt{2}$ tai $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

$2x - 1$	−	−	+	+
$x^2 - 2$	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	

b) Ratkaistaan aluksi bikvadraattisesta yhtälöstä $x^4-11x^2+18=0$ muuttujan toinen potenssi x^2. Saadaan $x^2=2$ tai $x^2=9$. Alkuperäinen polynomi jakautuu tällöin tekijöihin, ja saadaan esitysmuoto $x^4-11x^2+18=(x^2-2)(x^2-9)<0$. Laaditaan tekijöiden ja niiden tulon merkkikaavio: Sen perusteella $-3 < x < -\sqrt{2}$ tai $\sqrt{2} < x < 3$.

$x^2 - 2$	+	+	−	+	+
$x^2 - 9$	+	−	−	−	+
tulo	+	−	+	−	+
	-3	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	3	

204.a) Sievennetään epäyhtälö siirtämällä kaikki termit vasemmalle ja ryhmittelemällä termit. $x^3+x^2 \le x+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-(x+1)\le 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)-(x+2)\le 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)\le 0.$ Koska aina $(x+1)^2 \ge 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x-1\le 0$ eli arvoilla $x \le 1.$ (Tällöin mukaan tulee myös $x = -1$.)

b) Sievennetään: $3x^4-7x^3 > 12x^2-28x \Leftrightarrow (3x^4-12x^2)-(7x^3-28x)>0$
$\Leftrightarrow 3x^2(x^2-4)-7x(x^2-4)>0$
$\Leftrightarrow (x^2-4)(3x^2-7x)>0$
Merkkikaavion mukaan tulos on
$x<-2$ tai $0<x<2$ tai $x>2\frac{1}{3}$.

x^2-4	+	−	−	+	+
$3x^2-7x$	+	+	−	−	+
tulo	+	−	+	−	+
	-2	0	2	$2\frac{1}{3}$	

205. **a)** Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.
$2x^3-x^2-6x+3\ge 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1)-3(2x-1)\ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-3)\ge 0.$

Laaditun merkkikaavion perusteella
$-\sqrt{3}\le x\le \frac{1}{2}$ tai $x\ge\sqrt{3}.$

$2x-1$	−	−	+	+
x^2-3	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

b) Epäyhtälö $x^4-x^2>-\frac{1}{4}$ voidaan kirjoittaa muotoon $x^4-x^2+\frac{1}{4}>0$
$\Leftrightarrow (x^2-\frac{1}{2})^2>0$. Vasen puoli on toisena potenssina positiivinen muulloin paitsi, kun $x^2-\frac{1}{2}=0$ eli $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$ Näin ollen epäyhtälö toteutuu, kun $x\ne\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*Neliöjuuriyhtälö ja – epäyhtälö

1 Neliöjuuriyhtälö

209. **a)** Ennen neliöön korottamista tutkitaan sekä neliöjuuren määrittelyehto että neliöjuuren arvoon liittyvä ehto. Edellisen perusteella $x-1\ge 0$, ja jälkimmäisen ehdon mukaan $x-1\ge 0$. Yhdistettynä ehdot antavat tuloksen $x\ge 1.$ Korottamalla neliöön saadaan $\sqrt{x-1}=x-1 \Leftrightarrow x-1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ tai $x=2.$ Molemmat saaduista juurista täyttävät ehdon $x\ge 1.$

b) Määrittelyehdon mukaan $x^2+3\ge 0,$ mikä toteutuu kaikilla x:n arvoilla. Neliöjuuriehdon perusteella $x\ge 0.$ Viimeksi saatu on myös yhdistetty ehto. Neliöön korottamisen jälkeen saadaan muoto $x^2+3=4x^2 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$ Näistä ainoastaan $x=1$ täyttää ehdon $x\ge 0.$

210. **a)** Määrittelyehto $2x^2 - 3x - 1 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ tai $x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Neliöjuuren arvoon liittyvän ehdon mukaan tulee olla $x \geq 1$. Ehtojen yhdistämisen tuloksena $x \geq \frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}8$. Alkuperäisen yhtälön neliöön korottaminen antaa
$2x^2 - 3x - 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 2$. Näistä ainoastaan jälkimmäinen täyttää yhdistetyn ehdon.

Toinen tapa: Yhtälön $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = x - 1$ korottaminen toiseen potenssiin antaa juuriehdokkaat $x = -1$ ja $x = 2$. Sijoitetaan nämä alkuperäiseen yhtälöön, jolloin saadaan vastaavasti yhtälöt $\sqrt{4} = -2$ ja $\sqrt{1} = 1$. Vain juuri $x = 2$ hyväksytään.

b) Termien siirrolla päästään muotoon $\sqrt{12x+1} = 19 - 12x$. Soveltamalla yhtälöön määrittelyehtoja saadaan $12x + 1 \geq 0$ ja $19 - 12x \geq 0$. Yhdistämällä päädytään ehtoon $-\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{19}{12} (= 1\frac{7}{12})$. Alkuperäisen yhtälön neliöönkorotus antaa

$12x + 1 = 144x^2 - 456x + 361 \Leftrightarrow 144x^2 - 468x + 360 = 0 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{4} = 1\frac{3}{12}$ tai $x = 2$.

Ratkaisuista vain edellinen eli $x = 1\frac{1}{4}$ toteuttaa alussa esitetyt ehdot.

Toinen tapa: Juuriehdokkaista vain $x = 1\frac{1}{4}$ toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

211. **a)** Neliöjuurien määrittelyehdot $2x - 1 \geq 0$ eli $x \geq \frac{1}{2}$ ja $x^2 - 1 \geq 0$ eli $x \leq -1$ tai $x \geq 1$ yhdistämällä saadaan ehdoksi $x \geq 1$. Neliöön korottaminen puolestaan antaa yhtälön $x^2 - 2x = 0$, jonka ratkaisuna $x = 0$ tai $x = 2$. Näistä vain jälkimmäinen toteuttaa ehdon $x \geq 1$ (tai alkuperäisen yhtälön).

b) Termejä siirtämällä päädytään muotoon $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{2x+1}$. Neliöön korottaminen antaa yhtälön $x^2 - x - 2 = 0$, jonka ratkaisuina $x = -1$ tai $x = 2$. Vain jälkimmäinen toteuttaa alkuperäisen yhtälön (tai alkuperäisen yhtälön määrittelyehdon $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$).

212. Termien siirrolla päästään muotoon $\sqrt{43 - 3x} = x - 11$. Korotetaan yhtälö neliöön, jolloin $43 - 3x = (x-11)^2 \Leftrightarrow 43 - 3x = x^2 - 22x + 121 \Leftrightarrow x^2 - 19x + 78 = 0$
$x = 6$ tai $x = 13$. Vain luku 13 toteuttaa alkuperäisen yhtälön (tai alkuperäisen yhtälön määrittelyehdon $11 \leq x \leq 14\frac{1}{3}$).

2 Neliöjuuriepäyhtälö

214. **a)** Epäyhtälö $\sqrt{x} < 4$ on määritelty, kun $x \geq 0$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia. Neliöön korottaminen tuottaa epäyhtälön $x < 16$. Kun otetaan huomioon määrittelyehto, saadaan $0 \leq x < 16$.

b) Epäyhtälö $\sqrt{x-1} > 2$ on määritelty, kun $x \geq 1$. Neliöön korottaminen tuottaa määrittelyehtoon liitettynä yhtäpitävän epäyhtälön $x - 1 > 4$ eli $x > 5$. Yhdessä määrittelyehdon kanssa saadaan tulokseksi $x > 5$.

215. **a)** Epäyhtälö $\sqrt{3-x} < 2$ on määritelty, kun $3 - x \geq 0$ eli $x \leq 3$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia. Neliöön korottaminen tuottaa epäyhtälön $3 - x < 4$ eli $x > -1$. Yhdistämällä ehdot saadaan tulokseksi $-1 < x \leq 3$.

b) Epäyhtälö $\sqrt{1-2x} \geq 1 - x$ on määritelty, kun $1 - 2x \geq 0$ eli $x \leq \frac{1}{2}$. Neliöönkorotusehtona on $x \leq \frac{1}{2}$ ja $1 - x \geq 0$ eli $x \leq 1$. Yhdistämällä ehdot saadaan $x \leq \frac{1}{2}$. Tällöin $\sqrt{1-2x} \geq 1 - x \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$. Saatu tulos täyttää myös ehdon $x \leq \frac{1}{2}$.

216. **a)** Termejä siirtämällä epäyhtälö saadaan muotoon $x - 2 < \sqrt{x}$, joka on määritelty, kun $x \geq 0$. Vasemman puolen mukaan erotetaan kaksi tapausta:

1°. $x - 2 < 0$ eli $x < 2$. Tällöin alkuperäisen epäyhtälön vasen puoli on negatiivinen ja epäyhtälö toteutuu kaikilla arvoilla $0 \leq x < 2$.

2°. $x - 2 \geq 0$ eli $x \geq 2$. (Täyttää myös ehdon $x \geq 0$.) Neliöön korottaminen antaa nyt yhtäpitävästi $x - 2 < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Yhdistämällä saatu tulos ehtoon $x \geq 2$, saadaan $2 \leq x < 4$.

Kohdissa 1° ja 2° saatiin osaratkaisut. Niiden yhdistäminen antaa lopputulokseksi $0 \leq x < 4$.

b) Epäyhtälö $\sqrt{2x+3} > x$ on määritelty, kun $2x + 3 \geq 0$ eli $x \geq -1{,}5$. Oikean puolen mukaan erotetaan kaksi tapausta:

1°. $x \leq 0$. Koska neliöjuuren arvo on aina vähintään 0, kaikki arvot $-1{,}5 \leq x \leq 0$ toteuttavat alkuperäisen epäyhtälön.

2°. $x > 0$. Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, saadaan yhtäpitävästi $\sqrt{2x+3} > x \Leftrightarrow 2x + 3 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Yhdessä ehdon $x > 0$ kanssa päädytään tulokseen $0 < x < 3$.

Kohtien 1° ja 2° yhdistäminen antaa lopputulokseksi $-1{,}5 \leq x < 3$.

Lisätehtäviä

Polynomien summa, erotus ja tulo

6. Binomien summa on $4x^2+8y^2+xy-8y^2-2xy-6x^2=-2x^2-xy$.

a) $-2x^2-xy=-2(-7)^2-(-7)\cdot 11=-98+77=-21$

b) $-2x^2-xy=2(-0{,}3)^2-0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18-0{,}18=0$

7. **a)** $x-\{n-[n-(n+x)]\}=x-\{n-[n-n-x]\}=x-\{n+x\}=x-n-x=-n$

b) $2-(x+1)-[(x^2-1)-(2x^2-x)]=2-x-1-(x^2-1-2x^2+x)$
$=2-x-1-x^2+1+2x^2-x=x^2-2x+2$

10. **a)** $2s^3(s^2-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}s^2(2-s)=2s^5-\frac{1}{2}s^3-s^2+\frac{1}{2}s^3=2s^5-s^2$

b) $(2t-u)(2t^2+tu-u^2)=4t^3+2t^2u-2tu^2-2t^2u-tu^2+u^3$
$=4t^3-3tu^2+u^3$

11. **a)** $8a^2(a-2)-4a(3a^3+5)-6(a^3-2a)=8a^3-16a^2-12a^4-20a-6a^3+12a$
$=-12a^4+2a^3-16a^2-8a$

b) $(5a+2)(2-5a)-(2a+4)(4+2a)=4-25a^2-(4a^2+16a+16)$
$=4-25a^2-4a^2-16a-16=-29a^2-16a-12$

12. **a)** $(2a-b)(2a^2+ab-b^2)=4a^3+2a^2b-2ab^2-2a^2b-ab^2+b^3$
$=4a^3-3ab^2+b^3$

b) $(a^2-a+2)(-1+a-2a^2-2a^3)$
$=-a^2+a^3-2a^4-2a^5+a-a^2+2a^3+2a^4-2+2a-4a^2-4a^3$
$=-2a^5-a^3-6a^2+3a-2$

13. **a)** $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)$
$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2+(a-b)(bc-ab-c^2+ac)$
$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2+abc-a^2b-ac^2+a^2c-b^2c$
$+ab^2+bc^2-abc=0$

b) $(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10})$
$=1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10}$
$-q-q^2-q^3-q^4-q^5-q^6-q^7-q^8-q^9-q^{10}-q^{11}$
$=1-q^{11}$

Binomikaavat

4. **a)** $(0{,}2x^2y-0{,}6y^3)^2=0{,}04x^2y^2-0{,}24x^2y^3+0{,}36y^6$

b) $(\frac{3}{4}m+\frac{1}{3}n)^2=\frac{9}{16}m^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{9}n^2$

c) $((r+s)(r-s))^2=(r^2-s^2)^2=r^4-2r^2s^2+s^4$

d) $((a^n-b^n)(a^n+b^n))^2=(a^{2n}-b^{2n})^2=a^{4n}-2a^{2n}b^{2n}+b^{4n}$

5. **a)** $(a-3)^2-(3-a)^2=(a-3)^2-(a-3)^2=0$

b) $(b-1)(b+1)-(b-1)^2=(b-1)(b+1-b+1)=(b-1)\cdot 2=2b-2$

Vaihtoehtoisesti: $=b^2-1-b^2+2b-1=2b-2$

c) $(2c+3)^2(2c-3)^2=[(2c+3)(2c-3)]^2=(4c^2-9)^2=16c^4-72c^2+81$

d) $(x+y+z)(x+y-z)=[(x+y)+z][(x+y)-z]$

$=(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$

6. **a)** $(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)=(\sqrt{2})^2-2^2=2-4=-2$

b) $(\sqrt{3}+1)^2-2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}=4$

c) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2=12-18=-6$

d) $\sqrt{5+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{7}}=\sqrt{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}=\sqrt{25-7}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

7. **a)** $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{6})}{(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{3}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}=\frac{(2+\sqrt{7})\sqrt{7}}{2^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{2\sqrt{7}+7}{4-7}=-\frac{2\sqrt{7}+7}{3}$

d) $\frac{8-3\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}}=\frac{(2+\sqrt{10})(8-3\sqrt{10})}{2^2-(\sqrt{10})^2}=\frac{16-6\sqrt{10}+8\sqrt{10}-30}{-6}$

$=\frac{-14+2\sqrt{10}}{-6}=\frac{7-\sqrt{10}}{3}$

8. **a)** $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

$=[(a^2+b^2)+ab][(a^2+b^2)-ab][a^4+b^4-a^2b^2]$

$=[(a^2+b^2)^2-(ab)^2](a^4+b^4-a^2b^2)$

$=(a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)=(a^4+b^4+a^2b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$

$=(a^4+b^4)^2-(a^2b^2)^2=a^8+2a^4b^4+b^8-a^4b^4=a^8+a^4b^4+b^8$

b) $(x^2y^2-y^4)[(xy+y^2)^2-2xy^3]=(x^2y^2-y^4)(x^2y^2+2xy^3+y^4-2xy^3)$

$=(x^2y^2-y^4)(x^2y^2+y^4)=(x^2y^2)^2-(y^4)^2=x^4y^4-y^8$

Polynomin jakaminen tekijöihin

4. **a)** $3a^5 + 12a^3 + 12a = 3a(a^4 + 4a^2 + 4) = 3a(a^2 + 2)^2$

b) $2t^5 - 32t = 2t(t^4 - 16) = 2t(t^2 + 4)(t^2 - 4) = 2t(t^2 + 4)(t + 2)(t - 2)$

c) $3a^3b + 3ab - 6a^2b = 3ab(a^2 - 2a + 1) = 3ab(a - 1)^2$

5. **a)** $(\pi - 4)^2 + \pi - 4 = (\pi - 4)(\pi - 4 + 1) = (\pi - 4)(\pi - 3)$

b) $(1 + x)^2 - (1 + x)^3 = (1 + x)^2(1 - 1 - x) = -x(1 + x)^2$

6. **a)** $2u^3 + 2u + u^2 + 1 = 2u(u^2 + 1) + (u^2 + 1) = (u^2 + 1)(2u + 1)$

b) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = x^2(x + 4) - (x + 4) = (x + 4)(x^2 - 1) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)$

7. **a)** Jos $x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + k = (x - 6)^2$, niin $k = 36$.

b) Jos $kx^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$, niin $k = 4$.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

1. Kuvaajat ovat suoria. Suorat ovat yhdensuuntaisia, koska kaikilla on sama kulmakerroin ($k = 2$). **a**-kohdan suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, –3), **b**-kohdan suora kulkee origon kautta ja **c**-kohdan suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3).

2. **a)** Yhtälön $-4x + 8 = 0$ ratkaiseminen antaa tulokseksi $x = 2$, joka on annetun funktion nollakohta.

b) Yhtälön $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ ratkaiseminen antaa tulokseksi $x = -\frac{1}{3}$, joka on annetun funktion nollakohta.

c) Yhtälön $0{,}3175x + 63{,}5 = 0$ ratkaiseminen antaa tulokseksi $x = -200$, joka on annetun funktion nollakohta.

Rationaalilauseke

2. **a)** $\frac{x^2 + x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x + 1$

b) $\frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$

c) $\frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 2} = \frac{(x + 1)^2}{2(x + 1)} = \frac{x + 1}{2}$

3. **a)** $\frac{2}{a} - \frac{2 - b}{a} = \frac{2 - 2 + b}{a} = \frac{b}{a}$

b) $b - \frac{2b - 1}{3} = \frac{3b - 2b + 1}{3} = \frac{b + 1}{3}$

c) $\frac{x^2 + 4}{x} - x = \frac{x^2 + 4 - x^2}{x} = \frac{4}{x}$

4. **a)** $\frac{3}{a-1}+\frac{1}{a+1}=\frac{3(a+1)+(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{4a+2}{a^2-1}$

b) $\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}=\frac{2a}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a+b}=\frac{2a-(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a-b}$

c) $\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+1}{a^2-a}=\frac{a+3}{(a+1)(a-1)}-\frac{a+1}{a(a-1)}=\frac{a(a+3)-(a+1)^2}{a(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a^2+3a-a^2-2a-1}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a-1}{a(a+1)(a-1)}=\frac{1}{a^2+a}$

5. **a)** $\frac{a-5}{3}\cdot\frac{6a}{2a-10}=\frac{(a-5)\cdot 6a}{3\cdot 2(a-5)}=a$

b) $(a-\frac{1}{a})\cdot\frac{a}{a+1}=\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a}{a+1}=\frac{(a+1)(a-1)\cdot a}{a(a+1)}=a-1$

c) $\frac{a^2-9}{15a^2}:\frac{a+3}{3a}=\frac{(a+3)(a-3)\cdot 3a}{15a^2\cdot(a+3)}=\frac{a-3}{5a}$

6. **a)** $\frac{a^2+a}{2}:(a+1)=\frac{a(a+1)}{2\cdot(a+1)}=\frac{a}{2}$ **b)** $\frac{a^2+a}{2}:a+1=\frac{a(a+1)}{2\cdot a}+1=\frac{a+1+2}{2}=\frac{a+3}{2}$

c) $a-2:\frac{4}{a-2}=a-\frac{2(a-2)}{4}=\frac{2a-a+2}{2}=\frac{a+2}{2}$

Toisen asteen yhtälö

4. **a)** $x(x+2)=2(x+2)\Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0\Leftrightarrow x=-2$ tai $x=2$

b) $x^2-3x=7(x-3)\Leftrightarrow x(x-3)-7(x-3)=0\Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ tai $x=7$

c) $x^2-4=x+2\Leftrightarrow (x+2)(x-2)-(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2-1)=0\Leftrightarrow x=-2$ tai $x=3$

5. **a)** $(3x+1)^2=6x\Leftrightarrow 9x^2+6x+1-6x=0\Leftrightarrow 9x^2+1=0$. Ei ratkaisua.

b) $x^2-25=4x+20\Leftrightarrow (x+5)(x-5)-4(x+5)=0\Leftrightarrow (x+5)(x-5-4)=0$

$\Leftrightarrow x=-5$ tai $x=9$

c) $x^2+\sqrt{2}\,x^2=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow x^2(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x\pm 1$

6. **a)** $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=11\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{5})^2=11\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm 4$

b) $(\sqrt{2}\,x-1)(\sqrt{3}\,x+1)=0\Leftrightarrow \sqrt{2}x-1=0$ tai $\sqrt{3}\,x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. Toisen asteen yhtälön $(ax-b)(bx+2)=0$ juuret $x_1=\frac{1}{2}$ ja $x_2=\frac{1}{3}$ toteuttavat yhtälön, jolloin $(\frac{1}{2}a-b)(\frac{1}{3}b+2)=0$ tai $(\frac{1}{3}a-b)(\frac{1}{2}b+2)=0$. Tulon nollasääntö johtaa yhtälöpareihin, joista ratkeaa $b=-6$ ja $a=-12$ tai $b=-4$ ja $a=-12$.

10. **a)** $(2x-1)(3x+2)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0$ tai $3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ tai $x=-\frac{2}{3}$

b) $(2x-1)(3x+2)=5 \Leftrightarrow 6x^2+x-2=5 \Leftrightarrow 6x^2+x-7=0 \Leftrightarrow x=1$ tai $x=-1\frac{1}{6}$

11. **a)** $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{3}x+6=0 \Leftrightarrow 3x^2+14x+36=0$. Ei ratkaisua.

b) $\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow 8x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ tai $x=-\frac{1}{4}$

12. **a)** $x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$

b) $3x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

13. **a)** $4x^2+4\sqrt{5}\,x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\sqrt{5}\pm\sqrt{64}}{8}=\frac{-4\sqrt{5}\pm8}{8}=\frac{-\sqrt{5}\pm2}{2}$

b) $-x^2+2\sqrt{2}\,x+2=0 \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}\,x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{16}}{2}=\sqrt{2}\pm2$

15. Ratkaisun $x=-\frac{1}{3}$ sijoittaminen alkuperäiseen yhtälöön antaa yhtälön $6\cdot(-\frac{1}{3})^2+a(-\frac{1}{3})+3=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}a+\frac{11}{3}=0 \Leftrightarrow a=11$. Toinen juuri saadaan ratkaisemalla yhtälö $6x^2+11x+3=0$. Ratkaisut ovat $x=-\frac{1}{3}$ tai $x=-1\frac{1}{2}$.

Diskriminantti

2. Yhtälöllä $-5x^2+6x+2a-1=0$ on vain yksi ratkaisu, kun $D=6^2-4(-5)(2a-1)=0 \Leftrightarrow 40a+16=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{5}$.

3. Koska $D=1^2-4\cdot1\cdot(t^2+1)=-4t^2-3<0$ kaikilla t:n arvoilla, yhtälöllä ei ole reaalijuuria.

4. Koska $D=(k-8)^2-4(-4k+15)=k^2-16k+64+16k-60=k^2+4>0$ kaikilla k:n arvoilla, yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta.

Juurien summa ja tulo

2. Juurien summan perusteella $x_2 + (-2) = -6$, jolloin $x_2 = -4.$ Juurien tulon perusteella $x_1 x_2 = a = (-2)(-4) = 8.$

4. Kirjoitetaan annettu yhtälö aluksi muotoon $x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$. Juurien keskiarvo on summan puolikas eli $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$

Toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin

2. **a)** $4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$

b) Yhtälön $x^2 + x - \frac{4}{9} = 0$ ratkaisut ovat $x = \frac{1}{3}$ tai $x = -\frac{4}{3}.$ Tällöin

$x^2 + x - \frac{4}{9} = (x - \frac{1}{3})(x + \frac{4}{3})$

c) Yhtälön $10x^2 - x - 3 = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{5}.$ Tällöin

$10x^2 - x - 3 = 10(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{5}) = (2x+1)(5x-3)$

3. **a)** Yhtälön $-x^2 + 10x + 24 = 0$ ratkaisuina $x = 12$ tai $x = -2.$ Näin ollen $-x^2 + 10x + 24 = -(x-12)(x+2) = (12-x)(x+2)$.

b) Yhtälöllä $2x^2 - 8x + 9 = 0$ ei ole ratkaisua, joten trinomi $2x^2 - 8x + 9$ ei jakaudu tekijöihin.

c) Yhtälön $2x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ juuret ovat $\sqrt{3}$ ja $\frac{1}{2}$, joten

$2x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 2(x - \sqrt{3})(x - \frac{1}{2}) = (x - \sqrt{3})(2x - 1)$.

4. **a)** $\frac{y^2 - 6y + 8}{2y^2 - 5y + 2} = \frac{(y-2)(y-4)}{2(y-2)(y - \frac{1}{2})} = \frac{y-4}{2y-1}$

b) $\frac{25 - y^2}{y^2 + 3y - 10} = \frac{(5-y)(5+y)}{(y-2)(y+5)} = \frac{5-y}{y-2}$

c) $\frac{z^2 - 2}{z^2 - 3\sqrt{2}\,z + 4} = \frac{(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})}{(z - \sqrt{2})(z - 2\sqrt{2})} = \frac{z + \sqrt{2}}{z - 2\sqrt{2}}$

5. Jotta murtolausekkeen $\dfrac{x^2+x+t}{(1-x)(2-x)}$ supistaminen olisi mahdollista, osoittajan on oltava jaollinen joko binomilla $1 - x$ tai binomilla $2 - x$.

Jaollisuus binomilla $1 - x$ merkitsee, että osoittajan nollakohta on 1. Yhtälöstä $1^2+1+t=0$ saadaan $t = -2$. Tällöin

$$\frac{x^2+x+t}{(1-x)(2-x)}=\frac{x^2+x-2}{(1-x)(2-x)}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}.$$

Jaollisuus binomilla $2 - x$ merkitsee vastaavasti, että osoittajan nollakohta on 2. Silloin $t = -6$ ja osoittajan tekijät $x - 2$ ja $x + 3$. Supistettu muoto on $\dfrac{x+3}{x-1}$.

Sovelluksia

1. **a)** Merkitään etsittävää lukua kirjaimella x. Annettujen ehtojen perusteella saadaan yhtälö $\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{x}{4}=\dfrac{x}{2}$, joka sievenee muotoon $x^2-6x=0.$ Ratkaisuna $x = 6$ tai $x = 0$. Etsitty luku on näin ollen luku kuusi tai luku nolla.

b) Merkitään etsittävää lukua kirjaimella x**.** Ehdot täyttää yhtälö $\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{x}{4}=1,$ jonka ratkaisuna etsityksi luvuksi saadaan $2\sqrt{3}$ tai $-2\sqrt{3}.$

2. Olkoon toinen luku x, jolloin toinen on $10 - x$. Yhtälön $x(10 - x) = 16$ eli $x^2-10x+16=0$ ratkaisuna $x=2$ tai $x=8$. Luvut ovat 2 ja 8.

3. Merkitään yhtä suorakulmion sivua kirjaimella x. Viereisen sivun pituus on tällöin $\dfrac{86-2x}{2}=43-x$. Muodostetaan pinta-alasta yhtälö $x(43-x)=450$ eli $x^2-43x+450=0$. Ratkaisuna $x = 25$ tai $x = 18$. Suorakulmion sivujen pituudet ovat 18 m ja 25 m.

4. Jos neliölaatan sivu on x (cm), sen ala on x^2 ja suorakaidelaatan ala $(x + 1{,}0)(x + 2{,}0)$. Laattojen menekkien suhde 32 : 45 merkitsee, että 45 neliölaatalla päällystetään yhtä suuri ala kuin 32 suorakaidelaatalla. Siis $45x^2 = 32(x + 1{,}0)(x + 2{,}0)$, sievennettynä $13x^2-96x-64=0$. Siitä $x = 8$ (tai $x = -8/13$). Laattojen mitat ovat $8{,}0 \times 8{,}0$ cm ja $9{,}0 \times 10{,}0$ cm.

5. Kun esine osuu lennon jälkeen maahan, on lentokorkeus $y = 0$. Ratkaistaan yhtälö $1+3x-0{,}05x^2=0.$ Ratkaisuna $x\approx-0{,}33$ tai $x\approx 60{,}33$. Tulos tarkoittaa, että esine lentää 58 metrin etäisyydellä olevaan saareen saakka.

6. Olkoon kuution särmän pituus x (m). Annetuista ehdoista muodostuu yhtälö

$$(x+1)^3-x^3=2\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-x^3=\frac{7}{3}\Leftrightarrow 3x^2+3x-\frac{4}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\text{ tai } x=-1\frac{1}{4}.$$ Särmän alkuperäinen pituus on $\dfrac{1}{3}$ m.

7. Merkitään kaistan leveyttä x:llä. Kaistan pinta-ala on sama kuin alkuperäisen alueen pinta-ala. Saadaan yhtälö $4x^2 + 2 \cdot 3{,}6 \cdot x + 2 \cdot 5{,}4 \cdot x = 3{,}6 \cdot 5{,}4$, joka sievenee muotoon $4x^2 + 18x - 19{,}44 = 0$. Yhtälön ratkaisuna x = –5,4 tai x = 0,9. Kaistan leveys on 0,9 metriä.

8. Olkoon tuotteen hinta aluksi a. Kahden muutoksen jälkeen hinta on $(1-\frac{2p}{100})(1+\frac{p}{100})a$, joka on 94,5 % alkuperäisestä. Saadaan yhtälö $(1-\frac{2p}{100})(1+\frac{p}{100})a = \frac{94{,}5}{100}a$, josta sievennysten jälkeen $2p^2 + 100p - 550 = 0$. Sen ratkaisuna $p = -55$ tai $p = 5$. Alkuperäinen korotusprosentti oli 5.

Korkeamman asteen yhtälö

3. **a)** $x^3 - x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - (x+2)) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = -1$

b) $x^3 - x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ tai $x = -1$

4. **a)** $(3x-1)^3 = 9x^2 - 1 \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (3x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(9x^2 - 9x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = \frac{1}{3}$

b) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+4) - 4(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2 - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = -4$ tai $x = \pm 2$

5. **a)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$ tai $x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = \pm 3$ tai $x = \pm 1$

b) $x^5 + 4x^3 - 32x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 4x^2 - 32) = 0 \Leftrightarrow x((x^2)^2 + 4x^2 - 32) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ tai $x^2 = -8$ tai $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \pm 2$

6. $$\frac{-6x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \frac{(1-2x)(3x-1)}{x^2(2x-1) + (2x-1)} = \frac{(1-2x)(3x-1)}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{(2x-1)(1-3x)}{(2x-1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{1-3x}{x^2+1}$$

Toisen asteen epäyhtälö

4. **a)** Yhtälöllä $-2x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$ ei ole ratkaisua. Koska $y = -2x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ esittää alaspäin aukeavaa paraabelia, ei myöskään epäyhtälöllä $-2x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ ole ratkaisua.

b) Epäyhtälö $x^2+2\le 5(x-1)$ sievenee muotoon $x^2-5x+7\le 0$. Yhtälöllä $x^2-5x+7=0$ ei ole ratkaisua. Koska $y=x^2-5x+7$ esittää ylöspäin aukeavaa paraabelia, ei myöskään epäyhtälöllä $x^2-5x+7\le 0$ ole ratkaisua.

5. **a)** Epäyhtälö sievenee epäyhtälöksi $x^2-3x>0$, jonka ratkaisuna $x<0$ tai $x>3$.
b) Epäyhtälö $(x-2)^2\le 0$ toteutuu vain, kun $x=2$.

6. **a)** Epäyhtälö sievenee muotoon $x^2+x-2\ge 0$. Ratkaisuna on $x\le -2$ tai $x\ge 1$.
b) Epäyhtälö sievenee muotoon $x^2+x-6\ge 0$. Ratkaisuna on $x\le -3$ tai $x\ge 2$.

7. **a)** Hajotetaan kaksoisepäyhtälö epäyhtälöiksi $x^2-1>0$ ja $x^2-4<0$. Edellinen toteutuu, kun $x<-1$ tai $x>1$, jälkimmäinen arvoilla $-2<x<2$. Yhteinen ratkaisualue on $-2<x<-1$ tai $1<x<2$.
b) Kaksoisepäyhtälö kirjoitetaan epäyhtälöiksi $2x-1\le x^2-4$ ja $x^2-4<12$. Sievennysten jälkeen saadaan muodot $x^2-2x-3\ge 0$ ja $x^2-16<0$. Edellinen toteutuu arvoilla $x\le -1$ tai $x\ge 3$, jälkimmäinen arvoilla $-4<x<4$. Yhteinen ratkaisualue on $-4<x\le -1$ tai $3\le x<4$.

8. **a)** Lauseke on reaalinen, kun $(2x+3)(3x+2)\ge 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $x\le -\frac{3}{2}$ tai $x\ge -\frac{2}{3}$.
b) Lauseke on reaalinen, kun $x^2+2x+2\ge 0$. Epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

Korkeamman asteen epäyhtälö

1. **a)** Laaditaan tekijöiden ja tulon merkkikaavio. Sen perusteella $x<0$ tai $1<x<2$.

x	−	+	+	+
x - 1	−	−	+	+
x - 2	−	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	0	1	2	

b) Merkkikaavion perusteella $-1\le x\le 2$ tai $3\le x\le 5$.

2x - 4	−	−	+	+	+
2 + 2x	−	+	+	+	+
x - 3	−	−	−	+	+
5 - x	+	+	+	+	−
tulo	−	+	−	+	−
	-1	2	3	5	

2. **a)** Merkkikaavion perusteella $-1<x<0$ tai $x>1$.

x - 1	−	−	−	+
x	−	−	+	+
x + 1	−	+	+	+
tulo	−	+	−	+
	-1	0	1	

b) Merkkikaavion perusteella saadaan $1 < x < 2$. Koska tulon tulee olla negatiivinen, on vielä asetettava $x \neq 0$.

x^2	+	+	+	+
$x + 1$	−	+	+	+
x - 2	−	−	−	+
tulo	+	−	−	+

-1 0 2

3. **a)** Koska aina $(x-5)^2 \geq 0$ ja $x^2 + 1 > 0$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

b) Merkkikaavion perusteella $-4 \leq x \leq 5$.

$x^2 + 4x$	+	−	+	+
x^2 - $5x$	+	+	−	+
tulo	+	−	−	+

-4 0 5

4. **a)** Merkkikaavion mukaan $-1 < x < 2$ tai $x > 4$.

2 - x	+	+	−	−
x^2 - $3x$ - 4	+	−	−	+
tulo	+	−	+	−

-1 2 4

b) Epäyhtälö $x^4 - 11x^2 + 18 < 0$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x^2 - 2)(x^2 - 9) < 0$. Merkkikaaviosta nähdään ratkaisu. $-3 < x < -\sqrt{2}$ tai $\sqrt{2} < x < 3$.

x^2 - 2	+	+	−	+	+
x^2 - 9	+	−	−	−	+
tulo	+	−	+	−	+

-3 $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ 3

5. **a)** $x^3 - \dfrac{x}{9} < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - \dfrac{1}{9}) < 0$

Merkkikaaviosta $x < -\dfrac{1}{3}$ tai $0 < x < \dfrac{1}{3}$.

x	−	−	+	+
$x^2 - \frac{1}{9}$	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+

$-\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$

b) $x^3 - x^2 - 2x + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 2(x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2) \leq 0$

Merkkikaaviosta $x \leq -\sqrt{2}$ tai $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

x - 1	−	−	+	+
x^2 - 2	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+

$-\sqrt{2}$ 1 $\sqrt{2}$

Pikatesti

2. **a)** $P(-3) = -3 \cdot (-3) + 2 = 11$

b) $Q(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{4}$

c) $P(x) + Q(x) = -3x + 2 + x^2 + 3x - 2 = x^2$

3. **a)** $-2a(1 - 5a^2) = 10a^3 - 2a$

b) $(3b - 4)(4 + 3b) = (3b - 4)(3b + 4) = 9b^2 - 16$

c) $(-c + 6)^2 = c^2 - 12c + 36$

4. **a)** $2a^2 - 6a = 2a(a-3)$ **b)** $4b^2 - 25 = (2b+5)(2b-5)$ **c)** $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

5. **a)** $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{5}{4a} = \dfrac{10}{4a} + \dfrac{5}{4a} = \dfrac{15}{4a}$

b) $\dfrac{b}{b+1} - \dfrac{2b}{(b+1)^2} = \dfrac{b(b+1)}{(b+1)^2} - \dfrac{2b}{(b+1)^2} = \dfrac{b^2 - b}{b^2 + 2b + 1}$

c) $\dfrac{a^2 - 4}{5a} \cdot \dfrac{25a^2}{a-2} = \dfrac{(a-2)(a+2) \cdot 25a^2}{5a \cdot (a-2)} = 5a^2 + 10a$

6. **a)** $2x(1-3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \dfrac{1}{3}$

b) $3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -\dfrac{2}{3}$

c) $x(x+1) = 2(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 2$

7. **a)** $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 2$

b) $4x(x+2) + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = -\dfrac{1}{4}$

8. Yhtälöllä $-x^2 + 6x + a = 0$ on tarkalleen yksi ratkaisu silloin, kun $D = 6^2 - 4(-1) \cdot a = 0$ eli $a = -9$.

9. **a)** $x(x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 3$ tai $x = -4$

b) $x^3 + 5x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+5) + (x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = -5$

10. **a)** $x^2 + 5x - 6 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le 1$

b) Merkkikaavion mukaan $x < -3$ tai $1 < x < 3$.

$2x$ - 2	−	−	+	+
x + 3	−	+	+	+
3 - x	+	+	+	−
tulo	+	−	+	−
	-3	1	3	

Kertauskoe 1

1. **a)** $(2a^3 - 4a^2 + 3a) - (-4a^2 + 3a - 1) = 2a^3 - 4a^2 + 3a + 4a^2 - 3a + 1 = 2a^3 + 1$

b) $1 - (2-a)^2 - (2-a)(2+a) = 1 - 4 + 4a - a^2 - 4 + a^2 = 4a - 7$

2. **a)** $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{s-r}{rs} = s - r$, koska käänteislukujen tulo $rs = 1$.

b) $(y^2+2)^2 - (2y-3)^2 = y^4 + 4y^2 + 4 - (4y^2 - 12y + 9)$

$= y^4 + 4y^2 + 4 - 4y^2 + 12y - 9 = y^4 + 12y - 5$

c) $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - x} = \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = x + 1$

3. **a)** $4-\frac{x^2}{3}=0 \Leftrightarrow 12-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$

b) $3x^2-8x=3 \Leftrightarrow 3x^2-8x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ tai $x=3$

c) $x^3-5x^2-14x=0 \Leftrightarrow x(x^2-5x-14)=0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x=-2$ tai $x=7$

4. **a)** $(x-1)^2<9 \Leftrightarrow x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow -2<x<4$

b) Lauseke $\sqrt{1-x-2x^2}$ on määritelty, kun $1-x-2x^2 \geq 0$. Epäyhtälö toteutuu, kun $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

5. Vaatimuksesta, että työmatkan kesto on enintään puoli tuntia, saadaan epäyhtälö $0{,}01m^2+0{,}03m+18 \leq 30$ eli $m^2+3m-1200 \leq 0$. Epäyhtälö toteutuu arvoilla $0 \leq m \leq \frac{-3+\sqrt{4\,809}}{2} \approx 33{,}2$. Liikennevirta m saa olla enintään 33 autoa minuutissa.

6. **a)** Yhtälöllä $tx^2+tx+t-1=0$ on täsmälleen yksi juuri silloin, kun $D=t^2-4t(t-1)=0$ eli $-3t^2+4t=0 \Leftrightarrow t=0$ tai $t=\frac{4}{3}$. Näistä vain jälkimmäinen käy. Sijoitetaan saatu t:n arvo alkuperäiseen yhtälöön, jolloin $\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$ eli $4x^2+4x+1=0$. Yhtälön ratkaisuna $x=-\frac{1}{2}$.

b) Muodostetaan diskriminantti
$D=(a-2)^2-4a(-2)=a^2-4a+4+8a=a^2+4a+4=(a+2)^2$.
Koska $D=(a+2)^2 \geq 0$, yhtälöllä on reaalijuuria kaikilla vakion a arvoilla.

7. **a)** $x^4-6x^2+8=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-6x^2+8=0 \Leftrightarrow x^2=2$ tai $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ tai $x=\pm 2$

b) $x^3+x^2>5x+5 \Leftrightarrow x^2(x+1)-5(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-5)>0$

Oheisen merkkikaavion mukaan ratkaisu on $-\sqrt{5}<x<-1$ tai $x>\sqrt{5}$.

$x+1$	−	−	+	+
x^2-5	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+
	$-\sqrt{5}$	-1	$\sqrt{5}$	

***8.** **a)** Määrittelyehdon mukaan $4-x \geq 0$ eli $x \leq 4$, ja neliöjuuren arvoon liittyvän ehdon mukaan $x+3 \geq 0$. Yhdistettyinä ehdot antavat tuloksen $-3 \leq x \leq 4$. Korottamalla neliöön saadaan $4-x=x^2+6x+9$ eli $x^2+7x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{29}}{2}$. Näistä valitaan alkuehtojen nojalla $x=\frac{-7+\sqrt{29}}{2}$.

b) Reaalisuus- ja neliöjuuriehdot yhdistettyinä edellyttävät, että $x \geq 0$. Neliöön korotus antaa tuloksen $x+2<x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2>0 \Leftrightarrow x<-1$ tai $x>2$. Ottamalla huomioon alussa asetettu ehto saadaan ratkaisuksi $x>2$.

Kertauskoe 2

1. **a)** $-3a(-4a)^2 = -3a \cdot 16a^2 = -48a^3$ **b)** $\dfrac{3b+3}{6b+6} = \dfrac{3(b+1)}{6(b+1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $(-3c+4)^2 = 9c^2 - 24c + 16$ **d)** $(d-d^2)(d+d^2) = d^2 - d^4$

e) $3e - 3e^3 = 3e(1-e^2) = 3e(1-e)(1+e)$ **f)** $1 + f^2 - 2f = (1-f)^2$

2. **a)** $(3a-2)^2 - (3-a)(3+a) = 9a^2 - 12a + 4 - 9 + a^2 = 10a^2 - 12a - 5$

b) $\dfrac{4b^2-1}{4b^2-4b+1} = \dfrac{(2b+1)(2b-1)}{(2b-1)^2} = \dfrac{2b+1}{2b-1}$

3. **a)** $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 + 1 = -8 + 12 - 2 + 1 = 3$

b) $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 + 3 = 2\frac{3}{8}$

c) $x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = \dfrac{1}{2}$

4. Yhtälön $2x^2 - ax + a = 0$ juuret ovat reaaliset, kun $D = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a \geq 0$. Epäyhtälön $a^2 - 8a \geq 0$ ratkaisuna $a \leq 0$ tai $a \geq 8$.

5. **a)** $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1) - 3(2x-1) = (2x-1)(x^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ tai $x = \pm\sqrt{3}$

b) $x^3 + 2x^2 \geq 3x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) \geq 0$. Merkkikaaviosta nähdään, että $-3 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 1$

x	−	−	+	+
$x^2 + 2x - 3$	+	−	−	+
tulo	−	+	−	+

-3 0 1

6. Janan pituus on 1 (m), pidemmän osan pituus x ja lyhyemmän $1 - x$. Silloin $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$, josta $x^2 + x - 1 = 0$ ja $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Janan pituudeksi sopii vain $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$. Alkuperäisen janan osien pituudet ovat 0,618 m ja 0,382 m.

7. Sijoitetaan $x = -1$ annettuun yhtälöön. $(-1)^3 + a(-1)^2 - 2a^2(-1) - 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1{,}5$ tai $a = 1$. Näistä jälkimmäinen on positiivinen.
Yhtälö on $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$. Jaetaan yhtälön vasen puoli tekijöihin ryhmittelemällä. $x^2(x+1) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = \pm\sqrt{2}$.

***8.** Kun oletuksen ehto $x \geq 0$ on voimassa, epäyhtälöstä $x + 4 \geq 4\sqrt{x}$ saadaan yhtäpitävä epäyhtälö neliöön korottamalla. Tällöin
$x + 4 \geq 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+4)^2 \geq 16x \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - 16x \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0$.
Saatu tulos todistaa alkuperäisen väitteen paikkansa pitävyyden.