Yhdensuuntaisuusehto

- Jos on olemassa sellainen reaaliluku $t \neq 0$, että

$$\bar{a} = t\bar{b}$$

niin vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia (skalaarilla kertomisen määritelmän perusteella).

- Myös käänteinen lause pätee:

Siis jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia, niin on olemassa sellainen reaaliluku t, että $\bar{a} = t\bar{b}$.

- Tulos voidaan esittää *yhdensuuntaisuusehtona*

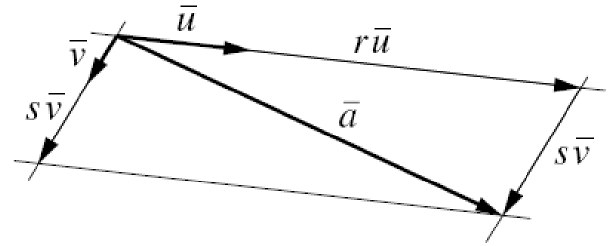
$$\bar{a} = t\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} || \bar{b}$$

Vektorin komponentit

- Mikä tahansa tason vektori $\bar{a}$ voidaan esittää kahden muun keskenään erisuuntaisen vektorin $\bar{u}$ ja $\bar{v}$, $(\bar{u} \nparallel \bar{v})$ avulla muodossa

$$\boxed{\bar{a} = r\bar{u} + s\bar{v},}$$

missä r ja s ovat reaalilukuja.

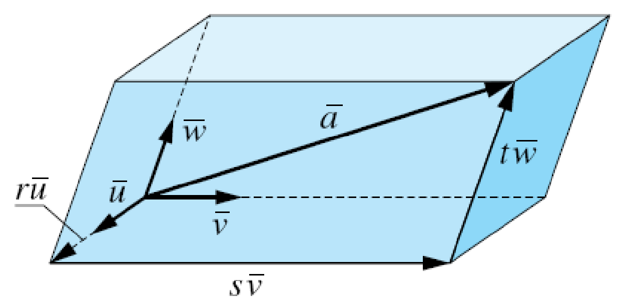


- Tällöin sanotaan, että $r\bar{u}$ ja $s\bar{v}$ ovat vektorin $\bar{a}$ vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ suuntaiset komponentit eli $\bar{a}$ on jaettu vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ suuntaisiin komponentteihin.
- Vastaavasti kolmiulotteinen tilanne:

Avaruuden vektorin komponentit

$$\bar{a} = r\bar{u} + s\bar{v} + t\bar{w},$$

missä r, s ja t ovat reaalilukuja.



Komponenttien yksikäsitteisyyslause

Olkoot $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ kaksi erisuuntaista vektoria ($\bar{u} \neq \bar{0}$ ja $\bar{v} \neq \bar{0}$).

Tällöin: jos $r\bar{u} + s\bar{v} = p\bar{u} + q\bar{v}$, niin $r = p$ ja $s = q$.

- Lauseen avulla voidaan jakaa vektoreja komponentteihin algebrallisesti.
- **Esimerkkitehtävä:**
- Esitä vektori $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 7\bar{\jmath}$ vektorien $\bar{u} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\bar{v} = -3\bar{\imath} + \overline{2\jmath}$ komponentteihin jaettuna.
- **Ratkaisu:**
- Etsitään sellaiset luvut *s* ja *t*, että

$$\bar{a} = s\bar{u} + t\bar{v}$$

$$2\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} = s(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) + t(-3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath})$$

$$2\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} = s\bar{\imath} + s\bar{\jmath} - 3t\bar{\imath} + 2t\bar{\jmath}$$

$$\underline{2}\bar{\imath} + \underline{7}\bar{\jmath} = \underline{(s - 3t)}\bar{\imath} + \underline{(s + 2t)}\bar{\jmath}$$

Vertaillaan kantavektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimia puolittain.

Komponenttien yksikäsitteisyyden perusteella saadaan yhtälöpari:

$$-\begin{cases} s+2t=7 \\ s-3t\ =2 \end{cases}$$

Vähennetään puolittain:

$$5t=5$$

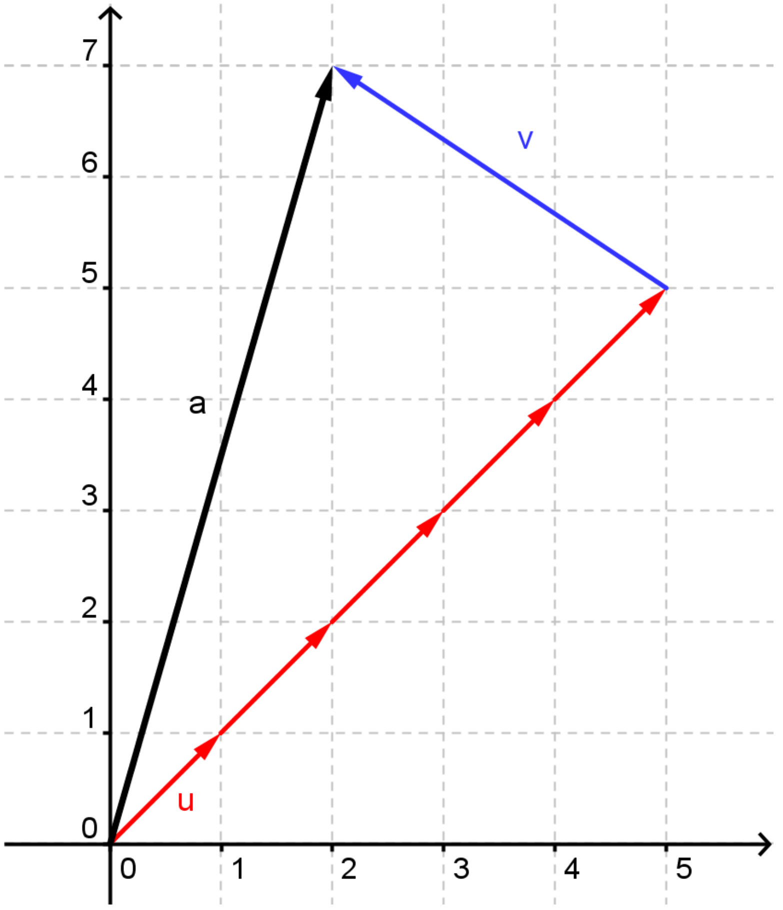
$$t=1$$

Sijoitetaan alempaan yhtälöön

$$s-3=2$$

$$s=5$$

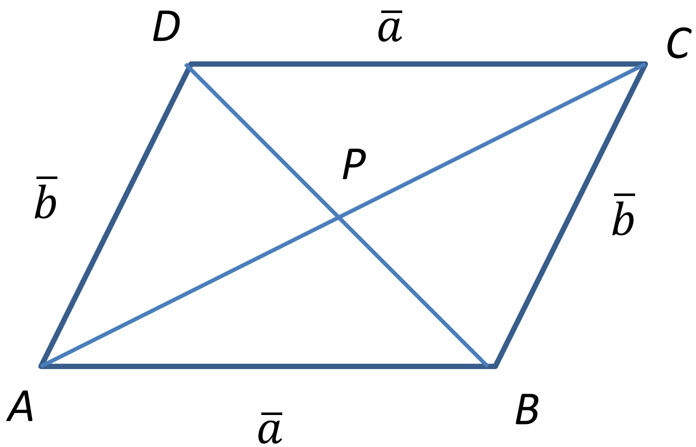
Siis: $\underline{\underline{\bar{a}=2\bar{\imath}+7\bar{\jmath}=5\bar{u}+\ \bar{v}}}$



Osoita (vektoreilla), että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

Oletus: Nelikulmio *ABCD* on suunnikas eli $\overline{AB} = \overline{DC}$ ja $\overline{AD} = \overline{BC}$. (Vastakkaiset sivut yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.)

Väite: Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa eli $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ja $\overline{PD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$,
kun *P* on lävistäjien leikkauspiste.



Todistus:
Merkitään $\overline{AB} = \overline{DC} = \bar{a}$ ja
$\overline{AD} = \overline{BC} = \bar{b}$.
Lävistäjät voidaan esittää muodossa
$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{a} + \bar{b}$ ja
$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} - \bar{a}$.
Nyt voidaan merkitä $\overline{AP} = s\overline{AC}$ ja
$\overline{PD} = r\overline{BD}$, missä $0 < r < 1$ ja $0 < s < 1$.

(Pitää osoittaa, että jakosuhteet $s = r = ½$, jolloin piste *P* puolittaa lävistäjät.)

Esitetään vektori $\bar{b}$ (tai vastaavasti $\bar{a}$) pisteen *P* kautta kulkevien vektorien avulla:

$$\bar{b} = \overline{AP} + \overline{PD} = s\overline{AC} + r\overline{BD}$$

$$\bar{b} = s(\bar{a} + \bar{b}) + r(\bar{b} - \bar{a}) = s\bar{a} + s\bar{b} + r\bar{b} - r\bar{a} = s\bar{a} + s\bar{b} + r\bar{b} - r\bar{a} = (s - r)\bar{a} + (s + r)\bar{b}.$$

Komponenttien yksikäsitteisyyden perusteella $s - r = 0$ ja $s + r = 1$ eli $s = r = ½$.
Tämä todistaa väitteen.